Klausur zu "Theoretische Physik 2 – Klassische Mechanik"

30. September 2020

Prof. Marc Wagner
Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Theoretische Physik

---

5 Aufgaben mit insgesamt 50 Punkten. Die Klausur ist mit 25 oder mehr Punkten bestanden.

Punkteverteilung und Kommentare zur Punkteverteilung in rot.

Aufgabe 1 (2+4+5+3+2=16 Punkte)

Betrachte den relativistischen Streuprozess $A+B \rightarrow C+D$, d.h. zwei Teilchen A und B kollidieren und werden dabei in die Teilchen C und D umgewandelt (beschränke Deine Überlegungen und Rechnungen der Einfachheit halber auf eine Welt mir nur einer Raumdimension[1]). Im Laborsystem ruht das Teilchen B (Masse $m_B > 0$) und wird von dem sich bewegenden masselosen Teilchen A (Energie $E_{A,\mathrm{LAB}}$) getroffen. Die dabei entstehenden Teilchen C und D haben gleiche Masse, $m_C = m_D > 0$.

(A) Wie lautet die Viererimpulserhaltung für diesen Streuprozess?

(B) Bestimme durch geeignetes "Quadrieren" der Viererimpulserhaltung aus (A), die Energien der Teilchen C und D im Schwerpunktsystem (das System, in dem die Summe der räumlichen Impulskomponenten verschwindet), d.h. gib $E_{C,\mathrm{SP}}$ und $E_{D,\mathrm{SP}}$ als Funktionen von m_B und $E_{A,\mathrm{LAB}}$ an.

Hinweis: Die folgenden Teilaufgaben (C) und (D) sind unabhängig von den Teilaufgaben (A) und (B) und können damit losgelöst von (A) und (B) bearbeitet werden.

(C) Bestimme $\beta = v/c$, die Geschwindigkeit eines Boosts in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit, der vom Laborsystem ins Schwerpunktsystem führt. Geh hierzu folgendermaßen vor:

- Gib eine geeignete Boost-Matrix für den Boost vom Laborsystem ins Schwerpunktsystem an.
- Drücke damit $p_{A,\mathrm{SP}}$ und $p_{B,\mathrm{SP}}$ (die räumlichen Impulskomponenten von A und B im Schwerpunktsystem) durch m_B und $E_{A,\mathrm{LAB}}$ aus.
- Setze dann $p_{A,\mathrm{SP}}$ und $p_{B,\mathrm{SP}}$ in Beziehung und löse nach β auf.

[1] Auch wenn die entsprechenden ko- und kontravarianten Vektoren nur zwei Komponenten besitzen, werden sie im Folgenden als Vierervektoren bezeichnet.

Berechne außerdem $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ und $\gamma\beta$. Bringe Deine Ergebnisse für β, γ und $\gamma\beta$ in eine übersichtliche Form, d.h. vereinfache die Ausdrücke soweit wie möglich.

(D) Berechne durch Ausführen eines Boosts mit der in (C) bestimmten Geschwindigkeit die Energien von sowohl A als auch B im Schwerpunktsystem, also $E_{A,\text{SP}}$ und $E_{B,\text{SP}}$. Bringe Deine Ergebnisse in eine übersichtliche Form, d.h. vereinfache die Ausdrücke soweit wie möglich.

(E) Verifiziere Deine Rechnungen und Ergebnisse aus (B) und (D), indem Du die Energieerhaltung überprüfst.

Lösung 1(a) Gesamt: 2

$$\underset{1}{p_A^\mu + p_B^\mu} = \underset{1}{p_C^\mu + p_D^\mu}.$$

Lösung 1(b) Gesamt: 4

Da Angaben für A und B im Laborsystem gegeben und für C und D Größen im Schwerpunktsystem gefragt sind, ist es sinnvoll die Viererimpulserhaltung in Form von 1(a) zu quadrieren.

$$\begin{aligned}
\left(p_A^\mu + p_B^\mu\right)^2 &= \left(p_C^\mu + p_D^\mu\right)^2 \quad \text{0.5 für richtigen Ansatz zum Quadrieren} \\
m_B^2 c^2 + 2E_{A,\text{LAB}} m_B &= \left(p_C^\mu + p_D^\mu\right)^2. \quad \text{1 für Berechnen von } \left(p_A^\mu + p_B^\mu\right)^2\text{. Wenn kleiner Fehler in Ergebnis, 0.5}
\end{aligned}$$

Im Schwerpunktsystem gilt $p_{D,\text{SP}} = -p_{C,\text{SP}}$ 0.5 für Bedingung in SP und damit $p^\mu_{C,\text{SP}} = (E_{C,\text{SP}}/c, p_{C,\text{SP}})$ und $p^\mu_{D,\text{SP}} = (E_{C,\text{SP}}/c, -p_{C,\text{SP}})$ 0.5 für Verwendung richtiger Viererimpulse (muss nicht explizit so genannt werden) und damit

$$\begin{aligned}
m_B^2 c^2 + 2E_{A,\text{LAB}} m_B &= 4E_{C,\text{SP}}^2/c^2 \quad 1 \\
\rightarrow \quad E_{C,\text{SP}} = E_{D,\text{SP}} &= \frac{1}{2}\left(m_B^2 c^4 + 2E_{A,\text{LAB}} m_B c^2\right)^{1/2}. \quad 0.5
\end{aligned}$$

Lösung 1(c) Gesamt: 5

Boost:

$$\begin{pmatrix} E_{\text{SP}}/c \\ p_{\text{SP}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\text{LAB}}/c \\ p_{\text{LAB}} \end{pmatrix}. \quad 1$$

Damit $p_{A,\text{SP}} = (\gamma\beta + \gamma)E_{A,\text{LAB}}/c$ 0.5 und $p_{B,\text{SP}} = \gamma\beta m_B c$ 0.5.

Im Schwerpunktsystem gilt $0 = p_{A,\mathrm{SP}} + p_{B,\mathrm{SP}}$ 0.5 und damit

$$\begin{aligned}
0 &= \Big(\gamma\beta + \gamma\Big) E_{A,\mathrm{LAB}}/c + \gamma\beta m_B c \\
\rightarrow \quad 0 &= \beta\Big(E_{A,\mathrm{LAB}}/c + m_{B,\mathrm{LAB}} c\Big) + E_{A,\mathrm{LAB}}/c \\
\rightarrow \quad \beta &= -\frac{E_{A,\mathrm{LAB}}}{E_{A,\mathrm{LAB}} + m_B c^2}.
\end{aligned}$$

1: (0.5 für Rechnung und 0.5 für richtiges Ergebnis)

Außerdem

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \left(\frac{1}{1-(E_{A,\mathrm{LAB}}/c)^2/(E_{A,\mathrm{LAB}} + m_B c^2)^2}\right)^{1/2} = \\
&= \left(\frac{(E_{A,\mathrm{LAB}} + m_B c^2)^2}{m_B^2 c^4 + 2E_{A,\mathrm{LAB}} m_B c^2}\right)^{1/2} = \frac{E_{A,\mathrm{LAB}} + m_B c^2}{(m_B^2 c^4 + 2E_{A,\mathrm{LAB}} m_B c^2)^{1/2}}
\end{aligned}$$

1 : (0.5 für Rechnung und 0.5 für richtiges Ergebnis)

$$\gamma\beta = -\frac{E_{A,\mathrm{LAB}}}{(m_B^2 c^4 + 2E_{A,\mathrm{LAB}} m_B c^2)^{1/2}}.$$

0.5

Lösung 1(d) Gesamt: 3

Aus (c) folgt

$$\begin{aligned}
E_{A,\mathrm{SP}}/c &= \underbrace{\Big(\gamma + \gamma\beta\Big)}_{0.5} E_{A,\mathrm{LAB}}/c = \frac{E_{A,\mathrm{LAB}} m_B c}{(m_B^2 c^4 + 2E_{A,\mathrm{LAB}} m_B c^2)^{1/2}} \quad 1 \\
E_{B,\mathrm{SP}}/c &= \underbrace{\gamma m_B c}_{0.5} = \frac{(E_{A,\mathrm{LAB}} + m_B c^2) m_B c}{(m_B^2 c^4 + 2E_{A,\mathrm{LAB}} m_B c^2)^{1/2}} \quad 1
\end{aligned}$$

Lösung 1(e) Gesamt: 2

Energieerhaltung: $E_{A,\mathrm{SP}} + E_{B,\mathrm{SP}} = E_{C,\mathrm{SP}} + E_{D,\mathrm{SP}}$. 0.5

Linke Seite:

$$E_{A,\mathrm{SP}} + E_{B,\mathrm{SP}} = \underbrace{\frac{m_B^2 c^4 + 2E_{A,\mathrm{LAB}} m_B c^2}{(m_B^2 c^4 + 2E_{A,\mathrm{LAB}} m_B c^2)^{1/2}}}_{0.5\ \text{(Rechenweg)}} = \Big(m_B^2 c^4 + 2E_{A,\mathrm{LAB}} m_B c^2\Big)^{1/2} \quad 0.5.$$

Wie erwartet entspricht dies der rechten Seite, 0.5

$$E_{C,\mathrm{SP}} + E_{D,\mathrm{SP}} = 2E_{C,\mathrm{SP}} = \Big(m_B^2 c^4 + 2E_{A,\mathrm{LAB}} m_B c^2\Big)^{1/2}.$$

Aufgabe 2 (3+5+3=11 Punkte)

Zwei sich in einer Raumdimension bewegende Teilchen (Koordinaten q^1 und q^2, jeweils Masse m) sind mit einer Feder (genügt dem Hookschen Gesetz, Federkonstante k, Ruhelänge 0) verbunden. Außerdem sind sie mit jeweils einer Feder mit dem Ursprung verbunden (genügen ebenfalls dem Hookschen Gesetz, Federkonstanten K_1 und K_2, Ruhelänge 0).

(a) Gib die Massen- und die Kraftmatrix sowie die Lagrange-Funktion des Systems an.

(b) Löse für den Fall $K_1 = K_2$ das generalisierte Eigenwertproblem und berechne die Eigenvektoren. Bestimme die allgemeine reelle Lösung der Bewegungsgleichungen.

(c) Bestimme für den gleichen Fall wie in (b) die spezielle Lösung der Bewegungsgleichungen für die Anfangsbedingungen $q^1(t=0) = q^2(t=0) = 0$ und $\dot{q}^1(t=0) = -\dot{q}^2(t=0) = v_0$.

Lösung 2(a) Gesamt: 3

Massen- und Kraftmatrix:

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \quad 1 \quad , \quad K = \begin{pmatrix} K_1 + k & -k \\ -k & K_2 + k \end{pmatrix} \quad 1 \text{ (0.5 wenn Vorzeichenfehler)}.$$

Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T M \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}\mathbf{q}^T K \mathbf{q}. \quad 1$$

Lösung 2(b) Gesamt: 5

Eigenfrequenzen:

$$0 = \det\Big(\underbrace{-M\omega_j^2 + K}_{0.5}\Big) = \Big(-m\omega_j^2 + K_1 + k\Big)^2 - k^2$$

$$\rightarrow \quad -m\omega_j^2 + K_1 + k = \pm k \quad 1 \text{ für Rechnung}$$

$$\rightarrow \quad \omega_j^2 + K_1 + k = \frac{K_1 + k \pm k}{m},$$

also $\omega_1^2 = K_1/m$ 0.5 und $\omega_2^2 = (K_1 + 2k)/m$ 0.5.

Eigenvektoren:

$$(-M\omega_j^2 + K\Big)\mathbf{a}_j = 0. \quad 0.5 \text{ (für Ansatz zur Berechnung)}$$

$j = 1$:

$$\begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \mathbf{a}_1 = 0$$

$$\rightarrow \quad \mathbf{a}_1 = (+1, +1)^T \quad 0.5.$$

$j = 2$:

$$\begin{pmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{pmatrix} \mathbf{a}_2 = 0$$
$$\rightarrow \quad \mathbf{a}_2 = (+1, -1)^T \ \ 0.5.$$

Wenn Eigenvektoren falsch aber Ansatz und Rechenweg richtig 0.5 von 1

Allgemeine Lösung:

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{j=1}^{2} \mathbf{a}_j \Big(A_j \cos(\omega_j t) + B_j \sin(\omega_j t) \Big) \ \ 1$$

mit unbestimmten reellen A_j und B_j.

0.5 wenn Summation fehlt *oder* $a_j/A_j/B_j$ fehlt *oder* nur sin /cos

Lösung 2(c) Gesamt: 3

Aus $q^1(t=0) = q^2(t=0) = 0$ folgt $A_j = 0$. 1

$$\dot{q}^1(t=0) = +v_0 = \sum_{j=1}^{2} a_j^1 B_j \omega_j \cos(\omega_j t)$$
$$\dot{q}^2(t=0) = -v_0 = \sum_{j=1}^{2} a_j^2 B_j \omega_j \cos(\omega_j t)$$

0.5 (muss nicht explizit da stehen, sondern Punkte für Rechenweg)

Die Normalschwingung $j = 2$ mit Eigenvektor $\mathbf{a}_2 = (+1, -1)^T$ erfüllt gerade die gegebenen Anfangsbedingungen 0.5,

$$\mathbf{q}(t) = \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{v}{\omega_2} \sin(\omega_2 t). \ \ 1 \text{ (wenn Konstanten nicht eingesetzt: 0.5)}$$

Aufgabe 3 (2+3+3+3=11 Punkte)

Betrachte ein sich in zwei Raumdimensionen bewegendes Teilchen (Masse m) beschrieben durch kartesische Koordinaten $\mathbf{r} = (x, y)$. Dabei liegt ein rotationssymmetrisches Potential $V(|\mathbf{r}|)$ vor.

(a) Gib die zugehörige Lagrange-Funktion an und zeige, dass diese invariant unter Rotationen ist.

(b) Bestimme mit Hilfe des Noether-Theorems die der Rotationssymmetrie zugeordnete Erhaltungsgröße. Um welche bekannte physikalische Größe handelt es sich?

(c) Bestimme aus der Lagrange-Funktion mit einer Legendre-Transformation die Hamilton-Funktion des Systems.

(d) Weise mit Hilfe von Poisson-Klammern nach, dass der Drehimpuls zeitlich erhalten ist.

Lösung 3(a) Gesamt: 2

Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - V(|\mathbf{r}|). \quad 1$$

$\dot{\mathbf{r}}^2$ 0.5 und $|\mathbf{r}|$ (und damit $V(|\mathbf{r}|)$) 0.5 sind rotationsinvariant, damit auch L.

Lösung 3(b) Gesamt: 3

Transformation:

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\cos(s) & -\sin(s) \\ +\sin(s) & +\cos(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad 1$$

Erhaltungsgröße:

$$I = \underbrace{\frac{\partial L(\dot{q}^j, q^j)}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial q^k(s)}{\partial s}}_{0.5}\Bigg|_{s=0} = m\Big(x\dot{y} - y\dot{x}\Big). \quad 1 \tag{1}$$

I entspricht gerade dem Drehimpuls. 0.5

Lösung 3(c) Gesamt: 3

Kanonisch konjugierte Impulse: $p_x = \partial L/\partial \dot{x} = m\dot{x}$ 0.5 und $p_y = \partial L/\partial \dot{y} = m\dot{y}$ 0.5 .

Hamilton-Funktion:

$$H = \underbrace{p_x\dot{x} + p_y\dot{y} - L}_{\text{1 (für explizite Nennung der Legendre-Trafo)}} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + V(|\mathbf{r}|). \quad 1$$

Lösung 3(d) Gesamt: 3

Drehimpuls: $L = xp_y - yp_x$. 0.5 (muss nicht explizit genannt werden, außreichend, wenn in Rechnung richtig (d.h. mit Impulsen) verwendet)

Poission-Klammer:

$$\begin{aligned}
\underset{0.5}{\{H,L\}} &= \frac{1}{2m}\{p_x^2,L\} + \frac{1}{2m}\{p_y^2,L\} + \{V(|\mathbf{r}|),L\} \\
\{p_x^2,L\} &= +\{p_x^2,xp_y\} = -2p_xp_y \quad 0.5 \\
\{p_y^2,L\} &= -\{p_y^2,yp_x\} = +2p_yp_x \quad 0.5 \\
\{\tilde{V}(x^2+y^2),xp_y-yp_x\} &= \tilde{V}'(x^2+y^2)2x(-y)+\tilde{V}'(x^2+y^2)2y(+x) = 0 \quad \text{0.5 (wenn Potential-Teil richtig)} \\
\to \quad \{H,L\} &= 0, \quad 0.5
\end{aligned}$$

wobei $\tilde{V}(x^2+y^2) = V(|\mathbf{r}|)$ definiert wurde. $\{H,L\}=0$ beweist, dass L zeitlich erhalten ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Berechne das Trägheitsmoment eines um seine Symmetrieachse drehbaren homogenen Zylinders (Radius d, Höhe H, Masse M).

Lösung 4 Gesamt: 4

Lege das Koordinatensystem so, dass die z-Achse die Symetrieachse ist:

$$J = \underbrace{\int d^3r\,\rho(\mathbf{r})\left(x^2+y^2\right)}_{\text{0.5 für Ansatz + 1 für richtiges } \mathbf{x}_\perp} = \underbrace{\frac{M}{\pi d^2 H}\int_0^d dr\,r^3\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^H dz}_{\text{0.5 für Trafo in Zylinder Koord. + 1 für Rechenweg/ Berechnung Integrale}}$$

$$= \frac{Md^2}{2} \quad \text{1 (0.5 wenn } \rho \text{ nicht eingesetzt).}$$

Aufgabe 5 (2+4.5+1.5 = 8 Punkte)

Ein Teilchen (Masse m) bewegt sich kräftefrei in einer Ebene.

(a) Verwende zunächst die kartesischen Koordinaten (x,y) und berechne den metrischen Tensor und gib die Lagrange-Funktion an.

(b) Die Bewegung des Teilchens findet nun in der rechten Halbebene statt, d.h. $x>0$. Verwende nun als generalisierte Koordinaten x und φ, wobei φ dem Winkel entspricht, der auch bei Polarkoordinaten Verwendung findet. Gib für die Koordinaten (x,φ) den metrischen Tensor und die Lagrange-Funktion an.

(c) Ist eine Beschreibung der Bewegung des Teilchens mit den generalisierten Koordinaten (x,φ) möglich, wenn desen Bewegung nicht eingeschränkt ist, also in der gesamten Ebene stattfinden kann? Begründe Deine Antwort.

Lösung 5(a) Gesamt: 2

Lagrange-Funktion:

$$L \;=\; T \;=\; \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \;\; 1.$$

Damit kann der metrische Tensor abgelesen werden: $g_{xx} \underset{0.5}{=} g_{yy} = 1$, $g_{xy} \underset{0.5}{=} g_{yx} = 0$.

Lösung 5(b) Gesamt: 4.5

$x(x,\varphi) = x$, $y(x,\varphi) = x\tan(\varphi)$. 0.5

Metrischer Tensor:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ \tan(\varphi) \;\; 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ x/\cos^2(\varphi) \;\; 0.5 \end{pmatrix}$$

$$g_{xx} \;=\; 1+\tan^2(\varphi) \;\; 0.5 \quad , \quad g_{\varphi\varphi} \;=\; \frac{x^2}{\cos^4(\varphi)} \;\; 0.5 \quad , \quad g_{x\varphi} \;=\; g_{\varphi x} \;=\; \frac{x\sin(\varphi)}{\cos^3(\varphi)} \;\; 0.5.$$

Lagrange-Funktion:

$$L \;=\; T \;=\; \frac{m}{2}\dot{q}^j g_{jk}\dot{q}^k \;=\; \frac{m}{2}\left(\underset{0.5}{\left(1+\tan^2(\varphi)\right)}\dot{x}^2 + \underset{0.5}{\frac{x^2}{\cos^4(\varphi)}}\dot{\varphi}^2 + 2\underset{0.5}{\frac{x\sin(\varphi)}{\cos^3(\varphi)}}\dot{x}\dot{\varphi}\right).$$

Ist g_{ij} falsch berechnet, jedoch in L richtig eingesetzt, dann F.F. und Abzug nur für falsches g_{ij} (0.5) nicht für L.

Lösung 5(c) Gesamt: 1.5

Nicht möglich 0.5, da Punkte auf der y-Achse nicht durch x und φ beschrieben werden können 1 (bei $x = 0$ und $\varphi = \pm\pi/2$ ist nicht klar, wo genau auf der y-Achse sich das Teilchen befindet).