Theoretische Physik 2 - Mechanik

Sommersemester 2022 – Prof. Marc Wagner

Martin Pflaumer: pflaumer@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 6

vom 20.05.22, Abgabe am 27.05.22, Besprechung in der Woche vom 30.05.22

Aufgabe 1 [*Diskrete Mechanik*] (2+2=4 Pkt.)

Häufig ist es notwendig, die Gleichungen der Mechanik zu diskretisieren, z.B. wenn numerische Rechnungen ausgeführt werden müssen. Die Trajektorie $\mathbf{r}(t)$, $t \in [t_i, t_f]$ wird dann durch $3(N+1)$ Variablen $\mathbf{r}_j$, $j = 0, \ldots, N$ ersetzt mit den Entsprechungen

$$\begin{aligned} t &\equiv t_i + j\Delta t, \text{ wobei } \Delta t = (t_f - t_i)/N, \\ \mathbf{r}_j &\equiv \mathbf{r}(t_i + j\Delta t). \end{aligned}$$

Die Wirkung dieser "diskreten Mechanik" ist kein Funktional, sondern eine Funktion in den $3(N+1)$ Variablen $\mathbf{r}_j$,

$$S(\mathbf{r}_j) = \sum_{j=1}^{N} \Delta t \bigg(\frac{1}{2} m \mathbf{v}_j^2 - \frac{1}{2} \Big(V(\mathbf{r}_j) + V(\mathbf{r}_{j-1}) \Big) \bigg)$$

mit

$$\mathbf{v}_j = \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j-1}}{\Delta t}.$$

Dabei ist $V(\mathbf{r})$ die potentielle Energie.

Analog zur in der Vorlesung diskutierten "kontinuierlichen Mechanik" ergeben sich die Bewegungsgleichungen aus der Forderung $dS = 0$ bei beliebiger Variation $d\mathbf{r}_j$, $j = 1, \ldots, N-1$, d.h. die Randwerte $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_i$ und $\mathbf{r}_N = \mathbf{r}_f$ werden festgehalten.

(a) Leite die Bewegungsgleichungen der diskreten Mechanik her, indem Du S minimierst, und interpretiere Dein Ergebnis, durch Vergleich mit den bekannten Bewegungsgleichungen der kontinuierlichen Mechanik.

(b) Berechne die diskreten Trajektorien $\mathbf{r}_j$ für $V(\mathbf{r}) = 0$ sowie für $V(\mathbf{r}) = mgz$. Vergleiche mit den entsprechenden kontinuierlichen Trajektorien.

Aufgabe 2 [*Beltrami-Identität*] (2+2=4 Pkt.)

Hängt die Lagrange-Funktion von einer generalisierten Koordinate und deren Zeitableitung aber nicht explizit von der Zeit ab, d.h. sie hat die Form $L(\dot{q}, q)$, so ist die sogenannte **Beltrami-Identität**

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L = \text{const}$$

äquivalent zur Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

(a) Beweise die Beltrami-Identität ausgehend von der Euler-Lagrange-Gleichung.

(b) Stelle die Lagrange-Funktion eines Teilchens (Masse m) in einem Potential $V(x)$ für eine Raumdimension x auf und benutze die Beltrami-Identität, um die Bewegungsgleichung herzuleiten. Wiederhole die Herleitung einer äquivalenten Bewegungsgleichung mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung. Vergleiche und interpretiere Deine Ergebnisse.

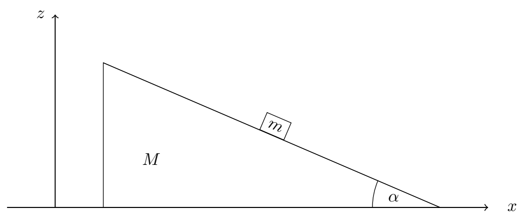
Aufgabe 3 [*Bewegliche schiefe Ebene*] `(1+3+2=6 Pkt.)`

Eine schiefe Ebene der Masse M mit einer Neigung α bewegt sich ohne Reibung auf einer horizontalen Fläche. Auf der schiefen Ebene befindet sich eine Masse m, die sich unter Wirkung der Gravitationskraft $\boldsymbol{F}_G = -g\boldsymbol{e}_z$ ohne Reibung auf der schiefen Ebene bewegt (siehe Abbildung). Nimm an, dass die Bewegung nur in der xz-Ebene stattfindet.

(a) Definiere geeignete generalisierte Koordinaten für das System und drücke die Position der schiefen Ebene und der Masse m in kartesischen Koordinaten durch die generalisierten Koordinaten aus.

(b) Bestimme die Lagrange-Funktion in diesen generalisierten Koordinaten.

(c) Stelle die Bewegungsgleichungen der generalisierten Koordinaten auf und löse sie.



Aufgabe 4 [*Brachistochrone*] `(2+2+1+1=6 Pkt.)`

Zwischen zwei auf verschiedener Höhe y gelegenen Punkten $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0) = (0, 0)$ und $\mathbf{P}_1 = (x_1, y_1)$ ($x_1 > x_0 = 0$, $y_1 < y_0 = 0$) ist eine Verbindungskurve $y(x)$ ("Brachistochrone") derart zu bestimmen, dass die "Fallzeit" eines Teilchens minimal wird, das sich unter dem Einfluss der konstanten Schwerkraft $\mathbf{F} = -mg\mathbf{e}_y$ reibungsfrei entlang dieser Kurve von $\mathbf{P}_0$ nach $\mathbf{P}_1$ bewegt (am Ausgangspunkt $\mathbf{P}_0$ sei das Teilchen in Ruhe).

(a) Formuliere das Variationsproblem, das heißt gib ein geeignetes zu minimierendes Funktional an.
Hinweis: Drücke die Fallzeit als Integral aus, in dem die Geschwindigkeit auftritt. Dieses Integral ähnelt dem Wirkungsfunktional $S = \int_{t_i}^{t_f} dt\, L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t)$ und ermöglicht die Bestimmung einer Differentialgleichung mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen, deren Lösung der Brachistochrone entspricht. Verwende den Energiesatz, um die Geschwindigkeit durch y auszudrücken.

(b) Bestimme mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung die Differentialgleichung für die Brachistochrone. (Die DGL soll nicht gelöst werden.)
Hinweis: Zur finalen Umformung ist die Ableitung $\frac{d}{dx}(y(1+y'^2)) = y'(1+y'^2) + 2yy'y''$ *nützlich.*

(c) Bestimme mit Hilfe der Beltrami-Identität die Differentialgleichung des Brachistochronen-Systems. (Die DGL soll nicht gelöst werden.) Zeige durch explizite Rechnung, dass diese Differentialgleichung und die der vorherigen Teilaufgabe äquivalent sind.

(d) Eine Parameterdarstellung der Brachistochrone lautet
$x(\alpha) = R(\alpha - \sin(\alpha))$, $y(\alpha) = R(\cos(\alpha) - 1)$. Zeige, dass diese Darstellung die in (b) bzw. (c) hergeleitete Differentialgleichung erfüllt.