Theoretische Physik 2 - Mechanik

Sommersemester 2022 – Prof. Marc Wagner

Martin Pflaumer: `pflaumer@itp.uni-frankfurt.de`

Aufgabenblatt 10

vom 17.06.22, Abgabe am 24.06.22, Besprechung in der Woche vom 27.06.22

Aufgabe 1 [*Hamilton-Formalismus 1*] (1+1=2 Pkt.)

Ein Teilchen bewegt sich in der x-z-Ebene auf einer vorgegebenen Kurve $z = f(x)$ unter dem Einfluss der in z-Richtung wirkenden konstanten Schwerkraft.

(a) Berechne die Lagrange-Funktion und die Hamilton-Funktion.

(b) Wie lauten die Hamiltonischen Bewegungsgleichungen?

Aufgabe 2 [*Hamilton-Formalismus 2*] (1+1+2+2=6 Pkt.)

(a) Bestimme, ausgehend von der Lagrange-Funktion, die Hamilton-Funktion eines Massenpunktes (potentielle Energie V) in Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ).

(b) Drücke das Drehimpulsquadrat durch die Koordinaten (r, ϑ, φ) und die zugehörigen kanonisch konjugierten Impulse aus.

(c) Zeige mit Hilfe der Poisson-Klammern, dass für ein sphärisch symmetrisches Potential $V = V(r)$ der Drehimpuls erhalten ist.

(d) Gehe von einem sphärisch symmetrischem Potential $V = V(r)$ aus und führe ausgehend von den vorliegenden Erhaltungsgrößen (Energieerhaltung und Drehimpulserhaltung) die Berechnung der Bahn des Massenpunkts auf Integrale zurück.

Aufgabe 3 [*Poisson-Klammern*] (1+3=4 Pkt.)

Betrachte die folgende Hamilton-Funktion:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{\gamma}{|\mathbf{r}|}.$$

(a) Um welches bekannte physikalische Problem handelt es sich?

(b) Zeige mit Hilfe der Poisson-Klammern, dass der Runge-Lenz-Vektor

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{l} + m\gamma \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

($\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ ist der Drehimpuls) eine Erhaltungsgröße ist.
Hinweis: Es ist zweckmäßig, in Komponentenschreibweise zu arbeiten.

Aufgabe 4 [*Hamiltonische Bewegungsgleichungen*] `(4+4=8 Pkt.)`

Ein Massepunkt m bewegt sich in einem zylindersymmetrischen Potential $V(\rho, z)$. Bestimme die Hamilton-Funktion und die hamiltonischen Bewegungsgleichungen bezüglich eines Koordinatensystems, das mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die Symmetrieachse rotiert in:

(a) kartesischen Koordinaten (x', y', z'),

(b) Zylinderkoordinaten (ρ', φ', z').

Hinweis: Gehe bei Aufgabenteil (b) folgendermaßen vor: 1. Bestimme den Zusammenhang zwischen x', y' *und* ρ', φ'. *2. Bestimme die neuen kanonischen Impulse* $p_{\rho'}$, $p_{\varphi'}$ *in Abhängigkeit von* $p_{x'}$, $p_{y'}$ *durch Ableiten des Lagrangian aus (a) nach den neuen Variablen (Verwende für die partiellen Ableitungen den Zusammenhang aus 1.). 3. Drücke daraus folgend die Impulse* $p_{x'}$, $p_{y'}$ *durch* $p_{\rho'}$, $p_{\varphi'}$ *aus und setze diese in die Hamilton-Funktion aus (a) ein.*