Theoretische Physik 2 - Mechanik

Sommersemester 2022 – Prof. Marc Wagner

Martin Pflaumer: pflaumer@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 11

vom 24.06.22, Abgabe am 01.07.22, Besprechung in der Woche vom 04.07.22

Aufgabe 1 [*Poisson-Klammern*] (2+1+1+1=5 Pkt.)

(a) Beweise die sogenannte **Jacobi-Identität**

$$\{A\,,\,\{B\,,\,C\}\} + \{B\,,\,\{C\,,\,A\}\} + \{C\,,\,\{A\,,\,B\}\} \quad = \quad 0.$$

(b) Zeige, dass wenn $I_1(\mathbf{p},\mathbf{q})$ und $I_2(\mathbf{p},\mathbf{q})$ Erhaltungsgrößen sind, auch $\{I_1(\mathbf{p},\mathbf{q})\,,\,I_2(\mathbf{p},\mathbf{q})\}$ eine Erhaltungsgröße ist.

(c) Zeige, dass ein System, das durch die Hamilton-Funktion

$$H \quad = \quad H_1(q_1,\ldots,q_j,p_1,\ldots,p_j) + H_2(q_{j+1},\ldots,q_f,p_{j+1},\ldots,p_f)$$

beschrieben wird, mindestens zwei Erhaltungsgrößen besitzt.

(d) Zeige, dass aus der Erhaltung der Drehimpulskomponenten l_x und l_y die Erhaltung des Quadrats des Drehimpulses $\mathbf{l}^2$ folgt.

Aufgabe 2 [*Betrachtungen im Phasenraum*] (2+2+1+2+2=9 Pkt.)

Ein Teilchen (Masse m) bewegt sich in einer Dimension (Koordinate x) im Potential $V(x) = m\omega^2 x^2/2$.

(a) Stelle die Lagrange-Funktion auf und berechne davon ausgehend die Hamilton-Funktion.

(b) Stelle die Hamiltonischen Bewegungsgleichungen auf und bestimme deren allgemeine Lösung.

(c) Skizziere die Phasenraumtrajektorien.

(d) Nachdem Du in (b) und (c) die zeitliche Entwicklung eines einzelnen Zustands, d.h. eines Punktes im Phasenraum bestimmt hast, wiederhole diese Aufgabe nun für eine Menge von Zuständen, d.h. ein endliches Volumen im Phasenraum, das zum Zeitpunkt $t = 0$ durch die Phasenraumellipse

$$(p,x) \quad = \quad (\tilde{P}_0 + P_0\cos(\lambda), Q_0\sin(\lambda))$$

($\tilde{P}_0$, P_0, Q_0 sind Konstanten, $0 \leq \lambda \leq 2\pi$) beschrieben wird. In anderen Worten, berechne, wie sich die durch λ parametrisierte Kontur der Ellipse mit der Zeit verändert. Beschreibe Dein Ergebnis in Worten. Ist das Phasenraumvolumen der Ellipse erhalten?

Zusätzlich zu der aus obigem Potential $V(x)$ folgenden Kraft wirkt auch noch die Reibungskraft $F_R = -m\alpha\dot{x}$.

(e) Skizziere die Phasenraumtrajektorien. Ist das Phasenraumvolumen noch immer erhalten?
Hinweis: Erweitere die Bewegungsgleichung aus (b) um den Reibungsterm und bestimme die dazugehörigen Lösungen.

Aufgabe 3 [*Kraftmatrix und Eigenwerte*] (3+3=6 Pkt.)

(a) Ein Potential $V(x, y)$ habe die Form

$$V(x,y) \quad = \quad \frac{1}{2}\Big(ax^2 + by^2 + 2cxy\Big).$$

(i) Wie lautet die zugehörige Kraftmatrix K für die Gleichgewichtslage $(x, y) = (0, 0)$?

(ii) Unter welchen Bedingungen an a, b und c ist K

- positiv definit,
- negativ definit,
- indefinit?

Gib jeweils einen Beispielparametersatz (a, b, c) an und skizziere das Potential.
Hinweis: Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist positiv definit, wenn $\det(A) > 0$ *und* $\mathrm{spur}(A) > 0$ *und negativ definit, wenn* $\det(A) > 0$ *und* $\mathrm{spur}(A) < 0$ *(siehe Mathe II).*

(iii) Bestimme ausgehend vom charakteristischen Polynom $\det[M\omega_j - K] = 0$ die Eigenfrequenzen ω_j für die Massenmatrix $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $M_{ij} = \delta_{ij} m$ und $a = 4m\omega_0$, $b = 2m\omega_0$, $c = \sqrt{3}m\omega_0$. (m und ω_0 sind hierbei positive Konstanten).

(b) Ein Potential $U(\mathbf{q})$, $\mathbf{q} = (x, y)$ habe die Form

$$U(\mathbf{q}) \quad = \quad \frac{1}{2}\mathbf{q}^T\Big(\lambda_a\big(\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}^T\big) + \lambda_b\big(\mathbf{b}\otimes\mathbf{b}^T\big)\Big)\mathbf{q} \tag{1}$$

mit $\mathbf{a} = (+\cos(\alpha), +\sin(\alpha))$, $\mathbf{b} = (-\sin(\alpha), +\cos(\alpha))$ und positven λ_a und λ_b. $\otimes$ bezeichnet das äußere Produkt oder tensorielle Produkt.

(i) Wie lautet die zugehörige Kraftmatrix K für die Gleichgewichtslage $(x, y) = (0, 0)$?

(ii) Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren von K.

(iii) Interpretiere Deine Ergebnisse anhand einer Skizze von $U(\mathbf{q})$.

Aufgabe 4 [***Bonusaufgabe:*** *Phasenraumtrajektorien des Pendels*] (2+1+2=5 Pkt.)

Betrachte ein ebenes Pendel (Masse m, Länge l) im konstanten Gravitationsfeld, $V(\varphi) = -mgl\cos(\varphi)$ (die generalisierte Koordinate φ beschreibt die Auslenkung des Pendels aus der Ruhelage).

(a) Stelle die Lagrange-Funktion auf, berechne davon ausgehend die Hamilton-Funktion.

(b) Stelle die Hamiltonischen Bewegungsgleichungen auf.

(c) Berechne die Form der Phasenraumtrajektorien $p_\varphi(\varphi)$ und skizziere diese Trajektorien sowohl für kleine als auch für große Energien. Welche spezielle Rolle spielen Trajektorien mit Energie $E = mgl$?