Theoretische Physik 2 - Mechanik

Sommersemester 2022 – Prof. Marc Wagner

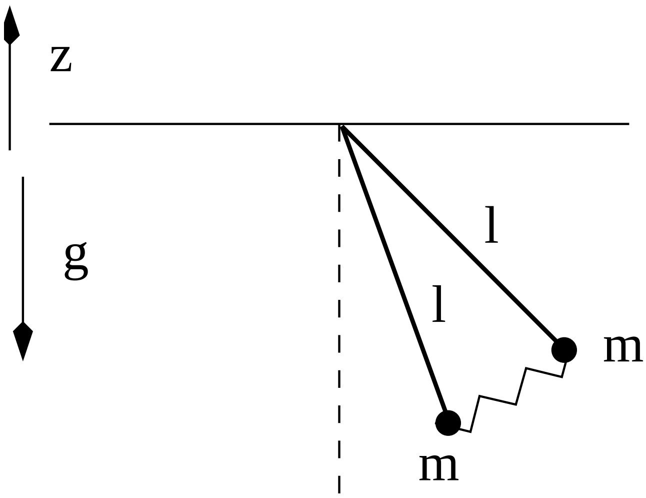
Martin Pflaumer: `pflaumer@itp.uni-frankfurt.de`

Aufgabenblatt 12

vom 01.07.22, Abgabe am 08.07.22, Besprechung in der Woche vom 11.07.22

Aufgabe 1 [*Kleine Schwingungen gekoppelter Pendel*] `(3+2+3+2=10 Pkt.)`

Zwei identische ebene Pendel (Masse m und Länge l) mit gemeinsamem Aufhängepunkt führen Schwingungen unter dem Einfluss des homogenen Schwerefeldes aus. Die Pendel sind mit einer Feder verbunden, die eine anziehende Kraft vom Betrag $F = m\omega^2|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ ($\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ sind die Positionen der beiden Pendelmassen) entsprechend dem Hookschen Gesetz ausübt.



(a) Stelle die Lagrange-Funktion auf und gib die Bewegungsgleichungen an.
Hinweis: Auch wenn die Winkelauslenkungen φ_1 und φ_2 der beiden Pendel aus einer jeweils senkrecht nach unten zeigenden Lage mögliche generalisierte Koordinaten sind, ist es zweckmäßiger die Koordinaten ψ und χ, definiert durch $\psi = (\varphi_1 + \varphi_2)$ und $\chi = (\varphi_1 - \varphi_2)$, zu verwenden. Zum Umformen sind die trigonometrische Relationen $\cos(x) + \cos(y) = 2\cos(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$ sowie $\cos(x)\cos(y)+\sin(x)\sin(y) = \cos(x-y)$ nützlich. Es ist außerdem nützlich, im Folgenden in dimensionslose Größen zu transformieren, indem $\tau = \sqrt{g/l}t$ und $L' = L/(mgl)$ verwendet wird.

(b) Bestimme sämtliche Gleichgewichtslagen (sowohl stabil als auch instabil).

Betrachte im Folgenden kleine Schwingungen.

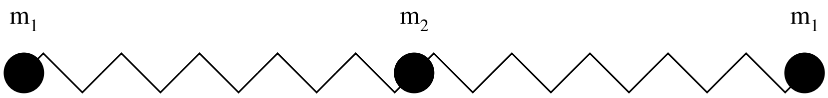
(c) (i) Berechne die Normalschwingungen um die Gleichgewichtslagen (sowohl um stabile als auch instabile Gleichgewichtslagen) indem Du die jeweilige Massen- und die Kraftmatrix aufstellst und daraus die Frequenzen der Normalschwingungen berechnest.

(ii) Diskutiere anhand Deiner Ergebnisse, welche Gleichgewichtslagen stabil und welche instabil sind.

(d) Was ändert sich, wenn die attraktive Federkraft durch eine repulsive, ansonsten gleiche Kraft ersetzt wird? Beschreibe, ausgehend von deinen Ergebnissen in (c), welche Gleichgewichtslagen stabil und welche instabil sind.
Hinweis: Es muss nicht die gesamte Rechnung wiederholt werden, sondern nur die Änderung von $\omega^2 \to -\omega^2$ untersucht werden.

Aufgabe 2 [*Kleine Schwingungen mit Federn verbundener Massenpunkte*] `(4+1+1=6 Pkt.)`

In einer Dimension sind drei Massenpunkte (Massen m_1 [2×] und m_2) über zwei identische Federn (Ruhelängen 0, Federkonstanten k) miteinander verbunden (siehe Abbildung).



(a) Bestimme Eigenfrequenzen und Eigenvektoren der Normalschwingungen um die Gleichgewichtslage sowie deren Energien. Normiere dazu die Eigenvektoren so, dass $\vec{a}_i^T M \vec{a}_j = \delta_{ij}$.

(b) Interpretiere Deine Ergebnisse, insbesondere die auftretende Eigenfrequenz $\omega = 0$. Sind die Gleichgewichtslagen stabil?

Aufgabe 3 [*Hilfreiche Formel zum Testen berechneter Eigenfrequenzen*] `(2+2=4 Pkt.)`

(a) Leite eine einfache allgemeine Beziehung zwischen

$$\sum_j (\omega_j)^2$$

(ω_j sind die Eigenfrequenzen) und der zugehörigen Massen- und Kraftmatrix ausgehend von der Eigenwertgleichung ab.

(b) Überprüfe Dein Ergebnis am in der Vorlesung diskutierten Beispiel der vertikalen Bewegung von 2 Massenpunkten, die mit Federn verbunden sind (siehe S. 58 ff. Skript Theo 2 Sommersemester 2022). Verwende dazu die in (218) und (219) definierte Massen- und Kraftmatrix für den Spezialfall $m_1 = m_2 = m$, $\kappa_1/3 = \kappa_2/2 = \kappa$. Nutze außerdem die in (233) hergeleiteten Eigenfrequenzen.