Klausur zu "Theoretische Physik 2 – Klassische Mechanik"

01. August 2022

Prof. Marc Wagner
Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Theoretische Physik

5 Aufgaben mit insgesamt **100** Punkten. Die Klausur ist mit **50** oder mehr Punkten bestanden.

Name: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

Aufgabe	Punkte
1	
2	
3	
4	
5	
Gesamt	
Note	

Aufgabe 1 (3+4+6+8=21 Punkte)

Die Bewegung eines Massenpunkts (Masse m) in 2 Raumdimensionen ist auf die Kurve $\mathbf{r}(\lambda) = (x(\lambda), y(\lambda))$ eingeschränkt. Es wirken keine weiteren Kräfte.

(a) Verwende λ als generalisierte Koordinate und gib die Lagrange-Funktion an.

(b) Bestimme den kanonisch konjugierten Impuls und die Hamilton-Funktion.

(c) Zeige mit Hilfe der Poisson-Klammer, dass der Betrag der Geschwindigkeit eine Erhaltungsgröße ist.

(d) Drücke den Drehimpuls $l = m(x\dot{y} - y\dot{x})$ durch die generalisierte Koordinate und den kanonisch konjugierten Impuls aus. Berechne die Poisson-Klammer $\{H, l\}$ für den Fall $\mathbf{r}(\lambda) = r(\cos(\lambda), \sin(\lambda))$ mit $r > 0$. Was folgt daraus für die Erhaltung des Drehimpulses?

Lösung 1(a)

$$\dot{x} = x'(\lambda)\dot{\lambda}, \qquad \dot{y} = y'(\lambda)\dot{\lambda} \tag{1}$$

$$L = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{m}{2}\Big(x'^2(\lambda) + y'^2(\lambda)\Big)\dot{\lambda}^2, \tag{2}$$

wobei hier und im Folgenden $x' = dx/d\lambda$ und $y' = dy/d\lambda$.

Lösung 1(b)

$$p_\lambda = \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} = m\Big(x'^2(\lambda) + y'^2(\lambda)\Big)\dot{\lambda} \tag{3}$$

$$H = p_\lambda \dot{\lambda} - L = \frac{1}{2m(x'^2(\lambda) + y'^2(\lambda))} p_\lambda^2. \tag{4}$$

Lösung 1(c)

Der Betrag der Geschwindigkeit ist erhalten, wenn das Betragsquadrat der Geschwindigkeit erhalten ist . Dieses ist proportional zu kinetischen Energie sowie zur Hamilton-Funktion, $\dot{\mathbf{r}}^2 = 2T/m = 2H/m$. Aus $\{H, \dot{\mathbf{r}}^2\} = 2\{H, H\}/m = 0$ folgt die Erhaltung des Betrags der Geschwindigkeit.
Alternativ:

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = \Big(x'^2(\lambda) + y'^2(\lambda)\Big)\dot{\lambda}^2 = \frac{p_\lambda^2}{m^2\Big(x'^2(\lambda) + y'^2(\lambda)\Big)} \tag{5}$$

Explizites Berechnen liefert null da die Terme wie oben beschrieben (bis auf einen Vorfaktor) identisch sind.

Lösung 1(d)

Drehimpuls:

$$l = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = m\Big(x(\lambda)y'(\lambda)\dot{\lambda} - y(\lambda)x'(\lambda)\dot{\lambda}\Big) = \frac{x(\lambda)y'(\lambda) - y(\lambda)x'(\lambda)}{x'^2(\lambda) + y'^2(\lambda)} p_\lambda. \tag{6}$$

$x'(\lambda) = -r\sin(\lambda)$, $y'(\lambda) = +r\cos(\lambda)$,
$l = p_\lambda$,
$H = p_\lambda^2/2mr^2$.
Damit $\{H, l\} = \{p_\lambda^2, p_\lambda\}/2mr^2 = 0$, d.h. der Drehimpuls ist erhalten .

Aufgabe 2 (3+4+4+6=17 Punkte)

Ein Massenpunkt (Masse m) bewegt sich auf einer Zylinderfläche mit Radius R, deren Symmetrieachse der z-Achse entspricht. In negative z-Richtung wirkt die konstante Schwerkraft vom Betrag mg.

(a) Wähle geeignete generalisierte Koordinaten und gib die Lagrange-Funktion an.

(b) Berechne mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen die Bewegungsgleichungen.

(c) Bestimme die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen.

(d) Bestimme die Lösung der Bewegungsgleichungen für die Anfangsbedingungen $\mathbf{r}(t=0) = (R, 0, 0)$, $\dot{\mathbf{r}}(t=0) = (0, v_{y,0}, 0)$.

Lösung 2(a)

Generalisierte Koordinaten (φ, z) mit $\mathbf{r} = (R\cos(\varphi), R\sin(\varphi), z)$.

Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{m}{2}\Big(r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\Big) - mgz. \tag{7}$$

Lösung 2(b)

Aus

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial L}{\partial q^j} = 0 \tag{8}$$

folgt

$$\dot{\varphi} = \text{const} \quad \text{(zyklische Variable)} \quad , \quad \ddot{z} = -g. \tag{9}$$

Lösung 2(c)

$$\varphi(t) = \omega t + \varphi_0 \quad , \quad z(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_{z,0}t + z_0 \tag{10}$$

mit unbestimmten Konstanten ω, φ_0, $v_{z,0}$ und z_0.

Lösung 2(d)

Anfangsbedingungen entsprechen $\varphi(t = 0) = 0$, $z(t = 0) = 0$, $\dot{\varphi}(t = 0) = v_{y,0}/R$, $\dot{z}(t = 0) = 0$. Damit $\omega = v_{y,0}/R$, $\varphi_0 = 0$, $v_{z,0} = 0$ und $z_0 = 0$,d.h.

$$\varphi(t) = \frac{v_{y,0}}{R}t \quad , \quad z(t) = -\frac{gt^2}{2}. \tag{11}$$

Aufgabe 3 (4+5+4+6+6=25 Punkte)

(a) Ein Zug (Länge $2L$ in seinem Ruhesystem Σ_{Zug}) fährt mit konstanter Geschwindigkeit v durch einen Tunnel (Länge L in dessen Ruhesystem Σ_{Tunnel}).

(i) Mit welcher Geschwindigkeit v muss der Zug fahren, dass er aus Sicht eines in Σ_{Tunnel} ruhenden Beobachters exakt in den Tunnel passt, d.h. sich zum gleichen Zeitpunkt die Zugspitze am Tunnelausgang und das Zugende an Tunneleingang befindet?

(ii) Der Lokführer, der in Σ_{Zug} ruht, misst den Zeitunterschied zwischen den beiden Ereignissen

* Zugspitze erreicht Tunnelausgang,
* Zugende erreicht Tunneleingang.

Berechne diesen Zeitunterschied.

(b) Zwei Züge fahren die gleiche Bahnstrecke (Streckenlänge L) in der gleichen Zeit T. Zug A fährt dabei mit konstanter Geschwindigkeit $\bar{v} = L/T$, Zug B startet mit Geschwindigkeit 0 und erhöht diese linear, bis er das Ziel erreicht.

(i) Welche Einschränkung an L und T muss gelten, damit die oben beschriebenen Zugfahrten physikalisch überhaupt möglich sind?

(ii) Berechne die Zeitspanne um die ein Fahrgast in Zug A und um die ein Fahrgast in Zug B altert?

(iii) Welcher der beiden Fahrgäste hat bei kleinem $\bar{v}/c$ mehr Lebenszeit verloren? Beantworte diese Frage, indem Du eine Taylor-Näherung der beiden Zeitspannen in $\bar{v}/c$ ausführst, bis zur niedrigsten Ordnung, in der sich die beiden Zeitspannen unterscheiden.
Hinweis:

$$\int dx\,\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}\Big(\sqrt{1-x^2}\,x + \arcsin(x)\Big) \quad , \quad \arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5). \tag{12}$$

Lösung 3(a)

(i):
Längenkontraktion um Faktor $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} = 2$. Damit $\beta^2 = 3/4$ bzw. $\beta = v/c = \sqrt{3}/2$.

(ii):
Ereignisse in Σ_{Tunnel} (bei geeigneter Wahl des Koordinatenursprungs): $(0, L)$ und $(0, 0)$ (Zug fährt in positive x-Richtung).
Ereignisse in Σ_{Zug} via Boost mit Matrix

$$\Lambda = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

d.h. $\gamma(-\beta, 1)L$ und $(0, 0)$. Damit Zeitdifferenz $\gamma\beta L/c = \sqrt{3}L/c$.

Lösung 3(b)

(i):
Im "Laborsystem" $v_B = 2\bar{v}t/T$ (wenn Zugfahrt bei $t = 0$ beginnt) . Damit muss $L/T = \bar{v} \leq c/2$ gelten, da kein Zug schneller als Lichtgeschwindigkeit fahren kann.

(ii):
Eigenzeit, Fahrgast in Zug A:

$$\tau_A = \int_0^T dt\, \sqrt{1 - (\bar{v}/c)^2} = \sqrt{1 - (\bar{v}/c)^2}T. \tag{14}$$

Eigenzeit, Fahrgast in Zug B:

$$\begin{aligned}\tau_B &= \int_0^T dt\, \sqrt{1 - (2\bar{v}t/cT)^2} = \frac{cT}{2\bar{v}} \int_0^{2\bar{v}/c} dx\, \sqrt{1 - x^2} = \\ &= \frac{cT}{2\bar{v}} \left(\sqrt{1 - (2\bar{v}/c)^2}(\bar{v}/c) + \frac{1}{2}\arcsin(2\bar{v}/c) \right),\end{aligned} \tag{15}$$

wobei Substitution $x = 2\bar{v}t/cT$ verwendet wurde.

(iii):
Eigenzeit, Fahrgast in Zug A:

$$\tau_A \approx \left(1 - \frac{\bar{v}^2}{2c^2}\right)T. \tag{16}$$

Eigenzeit, Fahrgast in Zug B:

$$\tau_B \approx \left(\frac{1}{2} - \frac{\bar{v}^2}{c^2} + \frac{1}{2} + \frac{\bar{v}^2}{3c^2}\right)T = \left(1 - \frac{2\bar{v}^2}{3c^2}\right)T. \tag{17}$$

Fahrgast in Zug A also stärker gealtert.

Aufgabe 4 (3+5+10+3=21 Punkte)

Zwei Massenpunkte (beide haben die gleiche Masse m) bewegen sich in 1 Raumdimension (Koordinaten q^1 und q^2). Die Massenpunkte sind mit einer Feder verbunden (Federkonstante k, Ruhelänge 0). Außerdem ist jeder der Massenpunkte mit jeweils einer weiteren Feder (ebenfalls Federkonstante k, Ruhelänge 0) mit dem Ursprung verbunden.

(a) Gib die Lagrange-Funktion in den Koordinaten (q^1, q^2) an.

(b) Bestimme die Massen- und die Kraftmatrix.

(c) Bestimme die beiden Normalschwingungen des Systems. Beschreibe die beiden Bewegungsformen in Worten oder mit einer aussagekräftigen Skizze.

(d) Gib die Lagrange-Funktion in Normalkoordinaten (ξ^1, ξ^2) an, sowie die entsprechende Transformation zwischen (ξ^1, ξ^2) und (q^1, q^2).

Lösung 4(a)

$$L = \frac{m}{2}(\dot{q}^2)^2 + \frac{m}{2}(\dot{q}^1)^2 - \frac{k}{2}(q^2 - q^1)^2 - \frac{k}{2}(q^1)^2 - \frac{k}{2}(q^2)^2. \tag{18}$$

Lösung 4(b)

$$L = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}M\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}\mathbf{q}K\mathbf{q} \tag{19}$$

mit Massen- und Kraftmatrix

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \quad , \quad K = \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Lösung 4(c)

$$\det\Big(-M\omega_j^2 + K\Big) = (-m\omega_j^2 + 2k)^2 - k^2 = 0 \tag{21}$$

$$-m\omega_j^2 + 2k = \pm k, \tag{22}$$

d.h. $\omega_1^2 = k/m$ und $\omega_2^2 = 3k/m$.

Zugehörige Eigenvektoren sind aus den entsprechenden Matrizen direkt ablesbar,

$$-M\omega_1^2 + K = \begin{pmatrix} +k & -k \\ -k & +k \end{pmatrix} \quad , \quad -M\omega_2^2 + K = \begin{pmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{pmatrix}, \tag{23}$$

d.h. $\mathbf{a}_1 = (+1, +1)$ und $\mathbf{a}_2 = (+1, -1)$.

Normalschwingungen entsprechen folgenden Bewegungen:
$\mathbf{q}(t) = \mathbf{a}_1(A_1 \cos(\sqrt{k/m}t + \phi_1))$ mit frei wählbaren Konstanten A_1 und ϕ_1, d.h. eine gleichgerichtete Schwingungen der beiden Massenpunkte.
$\mathbf{q}(t) = \mathbf{a}_2(A_2 \cos(\sqrt{3k/m}t + \phi_2))$ mit frei wählbaren Konstanten A_2 und ϕ_2, d.h. eine entgegengerichtete Schwingungen der beiden Massenpunkte.

Lösung 4(d)

$$L = \sum_{j=1,2} \left(\frac{1}{2}(\dot{\xi}^j)^2 - \frac{\omega_j^2}{2}(\xi^j)^2\right). \tag{24}$$

Die Koordinatentransformation lautet

$$\mathbf{q} = (\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2)\vec{\xi}. \tag{25}$$

Aufgabe 5 (3+7+6=16 Punkte)

Ein Massenpunkt (Masse m) bewegt sich in einer Ebene, die durch die kartesischen Koordinaten (x, y) beschrieben wird. Es liegt das Potential $V(x, y) = \alpha \sin((x - y)/\lambda)$ mit $\alpha \neq 0$ und $\lambda > 0$ vor.

(a) Gib die Lagrange-Funktion an.

(b) Das System ist translationsinvariant in Richtung $(+1, +1)$, d.h. invariant unter Verschiebungen im 45°-Winkel zur x-Achse. Gib die zugehörige Transformation $(x(s, t), y(s, t))$ an, die mit dem Parameter s solche Verschiebungen beschreibt. Beweise die Translationsinvarianz des Systems durch Einsetzen dieser Transformation in die Lagrange-Funktion.

(c) Verwende Deine Transformation aus Teilaufgabe (b), $(x(s, t), y(s, t))$, und leite mit dem Noether-Theorem die zugehörige Erhaltungsgröße her. Um welche physikalische Größe handelt es sich bei der Erhaltungsgröße?

Lösung 5(a)

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \alpha \sin\left(\frac{x - y}{\lambda}\right). \tag{26}$$

Lösung 5(b)

$(x(s, t), y(s, t)) = (x + s, y + s)$ (wobei $x \equiv x(t)$ und $y \equiv y(t)$).

Es folgt $(\dot{x}(s, t), \dot{y}(s, t)) = (\dot{x}, \dot{y})$.

Einsetzen in L:

$$\begin{aligned} L(\dot{x}(s,t), \dot{y}(s,t), x(s,t), y(s,t)) &= \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2(s,t) + \dot{y}^2(s,t)\right) - \alpha \sin\left(\frac{x(s,t) - y(s,t)}{\lambda}\right) = \\ &= \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \alpha \sin\left(\frac{x - y}{\lambda}\right) = L(\dot{x}, \dot{y}, x, y). \end{aligned} \tag{27}$$

L ist also s-unabhängig, was die Translationsinvarianz beweist.

Lösung 5(c)

Noether-Theorem:

$$I = \underbrace{\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial x(s,t)}{\partial s}\right|_{s=0} + \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \frac{\partial y(s,t)}{\partial s}\right|_{s=0}} = m(\dot{x} + \dot{y}) = \text{const.} \tag{28}$$

Die Erhaltungsgröße I ist proportional zum kinetischen Impuls in $(+1, +1)$-Richtung.