Klausur zu "Theoretische Physik 2 – Klassische Mechanik"

19. September 2022

Prof. Marc Wagner
Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Theoretische Physik

6 Aufgaben mit insgesamt **100** Punkten. Die Klausur ist mit **50** oder mehr Punkten bestanden.

Name: ____________________

Matrikelnummer: ____________________

Aufgabe	Punkte
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Gesamt	
Note	

Aufgabe 1 (4+10+4+4=22 Punkte)

Ein Massenpunkt (Masse m) bewegt sich in 3 Raumdimensionen unter Einfluss der Schwerkraft $\mathbf{F} = -mg\mathbf{e}_z$. Seine Bewegung ist auf das Paraboloid $z(x, y) = \lambda(x^2 + y^2)$ eingeschränkt ($\lambda > 0$ ist eine Konstante). Verwende bei der Lösung der folgenden Teilaufgaben (x, y) als generalisierte Koordinaten.

(a) Gib die kinetische Energie, die potentielle Energie sowie die Lagrange-Funktion an, jeweils vollständig ausgedrückt durch die generalisierten Koordinaten.

(b) Bestimme die Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen.

Betrachte im Folgenden kleine Schwingungen um die stabile Gleichgewichtslage $(x, y) = (0, 0)$.

(c) Vereinfache die Bewegungsgleichungen aus (b), indem Du sie linear in den generalisierten Koordinaten und deren Zeitableitungen näherst.

(d) Löse die linearisierten Bewegungsgleichungen für die Anfangsbedingungen $x(t = 0) = 0$, $y(t = 0) = y_0$, $\dot{x}(t = 0) = \dot{y}(t = 0) = 0$.

Lösung 1(a)

$$T = \frac{m}{2}\Big(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\Big) = \frac{m}{2}\Big(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \Big(2\lambda(x\dot{x} + y\dot{y})\Big)^2\Big) \tag{1}$$

$$V = mgz = mg\lambda(x^2 + y^2) \tag{2}$$

$$L = T - V. \tag{3}$$

Lösung 1(b)

Nebenrechnungen:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\Big(\dot{x} + 4\lambda^2(x\dot{x} + y\dot{y})x\Big) \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\Big(\ddot{x} + 4\lambda^2(\dot{x}^2 + x\ddot{x} + \dot{y}^2 + y\ddot{y})x + 4\lambda^2(x\dot{x} + y\dot{y})\dot{x}\Big) \tag{5}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 4m\lambda^2(x\dot{x} + y\dot{y})\dot{x} - 2mg\lambda x. \tag{6}$$

Damit x-BGl

$$\begin{aligned}&\ddot{x} + 4\lambda^2(\dot{x}^2 + x\ddot{x} + \dot{y}^2 + y\ddot{y})x + 4\lambda^2(x\dot{x} + y\dot{y})\dot{x} - 4\lambda^2(x\dot{x} + y\dot{y})\dot{x} + 2g\lambda x = \\ &\quad = \ddot{x} + 4\lambda^2(\dot{x}^2 + x\ddot{x} + \dot{y}^2 + y\ddot{y})x + 2g\lambda x = 0.\end{aligned} \tag{7}$$

y-BGl analog, muss aus Symmetriegründen identische Form wie x-BGl haben,

$$\ddot{y} + 4\lambda^2(\dot{x}^2 + x\ddot{x} + \dot{y}^2 + y\ddot{y})y + 2g\lambda y = 0. \tag{8}$$

Lösung 1(c)

$\ddot{x} + 2g\lambda x = 0$, $\ddot{y} + 2g\lambda y = 0$.

Lösung 1(d)

Entkoppelte BGls die unabhängigen harmonischen Oszillatoren mit Frequenz $\omega = \sqrt{2g\lambda}$ entsprechen. Damit $x(t) = 0$, $y(t) = y_0 \cos(\sqrt{2g\lambda}t)$.

Aufgabe 2 (6+6+8+4=24 Punkte)

(a) Berechne, ausgehend von der üblichen Beziehung zwischen kartesischen Koordinaten (x, y, z) und Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ), den metrischen Tensor g_{jk} für Kugelkoordinaten.
Die Angabe des Ergebnisses reicht nicht aus. Der Rechenweg muss klar erkennbar sein.

(b) Die Christoffel-Symbole wurden in der Vorlesung als

$$\Gamma^j_{km} = \frac{g^{jl}}{2}\left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial q^m} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{km}}{\partial q^l}\right)$$

definiert. Berechne mit dieser Definition und Deinem Ergebnis aus Teilaufgabe (a) für g_{jk} die Christoffel-Symbole $\Gamma^r_{\vartheta\varphi}$, $\Gamma^\varphi_{r\vartheta}$ und $\Gamma^\vartheta_{\varphi\varphi}$.

(c) Gib die kinetische Energie in Kugelkoordinaten an und berechne mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen die Bewegungsgleichungen eines freien Teilchens in Kugelkoordinaten.

(d) Verifiziere mit der in der Vorlesung hergeleiteten freien Bewegungsgleichung, $\ddot{q}^j = -\Gamma^j_{km}\dot{q}^k\dot{q}^m$, und Deiner Ergebnisse aus Teilaufgabe (c) Dein Ergebnis für $\Gamma^\vartheta_{\varphi\varphi}$ aus Teilaufgabe (b). Gib außerdem unter Verwendung Deiner Ergebnisse aus Teilaufgabe (c) $\Gamma^\vartheta_{r\vartheta}$ an.

Lösung 2(a)

Kugelkoordinaten: $(x, y, z) = (r\sin(\vartheta)\cos(\varphi), r\sin(\vartheta)\sin(\varphi), r\cos(\vartheta))$.

Metrischer Tensor:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} +\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ +\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ +\cos(\vartheta) \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} = r \begin{pmatrix} +\cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ +\cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ -\sin(\vartheta) \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = r \begin{pmatrix} +\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ -\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$g_{jk} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^j}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2(\vartheta). \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Lösung 2(b)

$\Gamma^r_{\vartheta\varphi} = \Gamma^\varphi_{r\vartheta} = 0$ (weil $g^{jl} = 0$, falls $j \neq l$, und damit in der Klammer nur Ableitungen von g_{jk} mit $j \neq k$ betragen können; da aber $g_{jk} = 0$ für $j \neq k$ verschwinden diese Ableitungen).

$$\Gamma^\vartheta_{\varphi\varphi} = \frac{g^{\vartheta\vartheta}}{2}\left(\underbrace{\frac{\partial g_{\vartheta\varphi}}{\partial \varphi}} + \underbrace{\frac{\partial g_{\vartheta\varphi}}{\partial \varphi}} - \underbrace{\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \vartheta}}\right) = \frac{1}{2r^2}\Big(-2r^2\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\Big) = -\sin(\vartheta)\cos(\vartheta). \tag{13}$$

Lösung 2(c)

$$T = \frac{m}{2}\Big(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2(\vartheta)\dot{\varphi}^2\Big). \tag{14}$$

Mit Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} = \frac{\partial L}{\partial q^j} \tag{15}$$

folgt

$$\ddot{r} = r\Big(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2(\vartheta)\dot{\varphi}^2\Big) \tag{16}$$

$$2r\dot{r}\dot{\vartheta} + r^2\ddot{\vartheta} = r^2\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\dot{\varphi}^2 \quad \to \quad \ddot{\vartheta} = \sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\dot{\varphi}^2 - \frac{2\dot{r}\dot{\vartheta}}{r} \tag{17}$$

$$r^2\sin^2(\vartheta)\dot{\varphi} = \text{const.} \tag{18}$$

Lösung 2(d)

Aus $\ddot{q}^j = -\Gamma^j_{km}\dot{q}^k\dot{q}^m$ folgt für die ϑ-Bewegungsgleichung:

$$\ddot{\vartheta} = -\Gamma^j_{km}\dot{q}^k\dot{q}^m \sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\dot{\varphi}^2 - \frac{2\dot{r}\dot{\vartheta}}{r} \tag{19}$$

Vorfaktor des $\dot{\varphi}^2$-Terms in der ϑ-Bewegungsgleichung ist $\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)$. Dieser Vorfaktor entspricht $-\Gamma^{\vartheta}_{\varphi\varphi}$. Damit konsistent.

$\Gamma^{\vartheta}_{r\vartheta} = 1/r$.

Aufgabe 3 (2+5+2+3=12 Punkte)

Betrachte den Zerfallsprozess eines Teilchens A in die Teilchen B und C, d.h. $A \to B + C$, im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie. Alle drei Teilchen haben nicht-verschwindende Massen, $m_A > 0$, $m_B > 0$, $m_C > 0$.

(a) Wie lautet die diesem Zerfallsprozess entsprechende Viererimpulserhaltung?

(b) Berechne, ausgehend von der Viererimpulserhaltung, die Energie des Teilchens B im Ruhesystem des Teilchens A.

(c) Gib die Energie des Teilchens B im Ruhesystem des Teilchens B an.

(d) Berechne für den Fall $m_B = m_C$ den Betrag des Dreierimpulses des Teilchens B im Ruhesystem des Teilchens A.

Lösung 3(a)

$p^\mu_A = p^\mu_B + p^\mu_C$.

Lösung 3(b)

$$p^\mu_C p_{C,\mu} = (p^\mu_A - p^\mu_B)(p_{A,\mu} - p_{B,\mu}) \tag{20}$$

$$\rightarrow \quad m_C^2 c^2 = m_A^2 c^2 + m_B^2 c^2 - 2 p^\mu_A p_{B,\mu} = m_A^2 c^2 + m_B^2 c^2 - 2 m_A E_B \tag{21}$$

$$\rightarrow \quad E_B = \frac{(m_A^2 + m_B^2 - m_C^2)c^2}{2m_A}. \tag{22}$$

Lösung 3(c)

$E_B = m_B c^2$.

Lösung 3(d)

$$|\mathbf{p}_B| = \sqrt{E_B^2/c^2 - m_b^2 c^2} = \sqrt{m_A^2 c^2/4 - m_b^2 c^2}. \tag{23}$$

Aufgabe 4 (4+6+3=13 Punkte)

(a) Zeige, durch Verwendung der definierenden Eigenschaft von Lorentz-Transformationen $\eta_{\mu\nu} = \Lambda^\rho{}_\mu \eta_{\rho\sigma} \Lambda^\sigma{}_\nu$, dass für zwei Vierervektoren A^μ und B^μ der Ausdruck $A^\mu B_\mu$ Lorentz-invariant ist.

(b) Zeige, dass sich ∂^μ wie ein kontravarainter Vierervektor transformiert, d.h. dass $\partial'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \partial^\nu$ gilt.
Hinweis: Du kannst die in den Übungen gezeigte Beziehung $(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu$ *verwenden.*

(c) Berechne beziehungsweise vereinfache den Ausdruck $p_A^\mu p_{A,\mu} \eta^\nu{}_\nu \partial_\rho x^\rho + p_B^\mu \eta_{\mu\nu} p_B^\nu$. Dabei bezeichnet p_A^μ den Viererimpuls eines massiven Teilchens mit Masse m_A und p_B^μ den Viererimpuls eines masselosen Teilchens.

Lösung 4(a)

$A^\mu B_\mu = A^\mu \eta_{\mu\nu} B^\nu = A^\mu \Lambda^\rho{}_\mu \eta_{\rho\sigma} \Lambda^\sigma \nu B^\nu = A'^\rho \eta_{\rho\sigma} B'^\sigma = A'^\mu B'_\mu.$

Lösung 4(b)

$$\partial^\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\nu = \eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \eta^{\mu\nu} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x'^\rho} = \eta^{\mu\nu} \Lambda^\rho{}_\nu \partial'_\rho = \Lambda_\rho{}^\mu \partial'^\rho, \tag{24}$$

wobei $x'^\nu = \Lambda^\nu{}_\alpha x^\alpha$ verwendet wurde.
Multiplikation mit $\Lambda^\nu{}_\mu$ und Verwendung der genannten Beziehung in der Form $\eta^\nu{}_\rho = \Lambda^\nu{}_\mu \Lambda_\rho{}^\mu$:

$$\Lambda^\nu{}_\mu \partial^\mu = \Lambda^\nu{}_\mu \Lambda_\rho{}^\mu \partial'^\rho = \eta^\nu{}_\rho \partial'^\rho = \partial'^\nu. \tag{25}$$

Lösung 4(c)

$p_A^\mu p_{A,\mu} \eta^\nu{}_\nu \partial_\rho x^\rho + p_B^\mu \eta_{\mu\nu} p_B^\nu = 16 m_A^2 c^2.$

Aufgabe 5 (5+5=10 Punkte)

(a) Bestimme die allgemeine Lösung der Wellengleichung

$$\ddot{z}(x,t) - v^2 z''(x,t) = 0$$

($v > 0$ bezeichnet eine Konstante) für periodische Randbedingungen $z(x+L,t) = z(x,t)$.

(b) Betrachte erneut die Wellengleichung aus Teilaufgabe (a) mit den gleichen periodischen Randbedingungen und bestimme die Lösung für die Anfangsbedingungen
$z(x,t=0) = A\cos(2\pi x/L)$, $\dot{z}(x,t=0) = 0$.

Lösung 5(a)

Allgemeine Lösung ohne Berücksichtigung von Randbedingungen: $z(x,t) = z_+(x+vt)+z_-(x-vt)$, wobei z_+ und z_- beliebige reelle Funktionen in einer Variable sind.

Periodische Randbedingungen $z(x+L,t) = z(x,t)$ führen auf $z_+(x+L+vt)+z_-(x+L-vt) = z_+(x+vt)+z_-(x-vt)$. Da dies für beliebige x und t gelten muss, folgt $z_+(u+L) = z_+(u)$ und $z_-(u+L) = z_-(u)$, d.h. z_+ und z_- müssen L-periodische Funktionen sein.

Lösung 5(b)

$z(x,t=0) = z_+(x)+z_-(x) = A\cos(2\pi x/L)$ und $\dot{z}(x,t=0) = (z'_+(x) - z'_-(x))v = 0$.

Damit folgt $z'_+(x) = z'_-(x)$ und daraus $z_-(x) = z_+(x) + c$.

Damit $2z_+(x) + c = A\cos(2\pi x/L)$ bzw. $z_+(x) = (A\cos(2\pi x/L) - c)/2$ und $z_-(x) = (A\cos(2\pi x/L) + c)/2$.

Einsetzen in allgemeine Lösung aus Teilaufgabe (a):
$z(x,t) = (A/2)(\cos(2\pi(x+vt)/L) + \cos(2\pi(x-vt)/L))$.

Aufgabe 6 (3+6+10=19 Punkte)

Zwei Massenpunkte (Massen m_1 und m_2) bewegen sich im 2-dimensionalen flachen Raum, der durch die kartesischen Koordinaten (x,y) beschrieben wird. Die beiden Massenpunkte sind mit einer Feder verbunden, die dem Hookschen Gesetz genügt (Federkonstante k). In negative y-Richtung wirkt die konstante Schwerkraft vom jeweiligen Betrag $|\mathbf{F}_j| = m_j g$. Die Bewegung des Massenpunkts mit Masse m_1 ist außerdem auf die x-Achse eingeschränkt.

(a) Verwende die generalisierten Koordinaten (x_1, x_2, y_2), die die x- beziehungsweise y-Koordinaten der Massenpunkte bezeichnen, und gib die Lagrange-Funktion in diesen Koordinaten an.

(b) Bestimme mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen die Bewegungsgleichungen.

(c) Bestimme die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen.
Hinweis: In x-Richtung ist der Übergang zu einer Schwerpunktkoordinate $X = (m_1x_1 + m_2x_2)/(m_1 + m_2)$ und einer Relativkoordinate $x = x_2 - x_1$ zweckmäßig. Es ist ausreichend, die allgemeine Lösung in diesen Koordinaten und y_2 anzugeben, d.h. es ist nicht notwendig, auf x_1 und x_2 zurückzutransformieren.

Lösung 6(a)

$$L = \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - \frac{k}{2}\Big((x_2 - x_1)^2 + y_2^2\Big) - m_2 g y_2. \tag{26}$$

Lösung 6(b)

$$m_1\ddot{x}_1 = +k(x_2 - x_1) \tag{27}$$
$$m_2\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) \tag{28}$$
$$m_2\ddot{y}_2 = -ky_2 - m_2 g. \tag{29}$$

Lösung 6(c)

Transformation auf Schwerpunkt- und Relativkoordinate im Wesentlichen durch Addition und Subtraktion der ersten beiden Bewegungsgleichungen aus Teilaufgabe (b):

$$(m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2) = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{X} = 0 \tag{30}$$
$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -k(x_2 - x_1)\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}\right) \quad \rightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{k}{\mu}x \tag{31}$$

mit $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$.

Allgemeine Lösungen der Gleichungen entsprechen bekannten Standardproblemen (freies Teilchen, harmonischer Oszillator):

$$X = V_0 t + X_0 \quad , \quad x = A\cos(\sqrt{k/\mu}t + \varphi_0) \quad , \quad y_2 = B\cos(\sqrt{k/m_2}t + \psi_0) - \frac{m_2 g}{k} \tag{32}$$

mit unbestimmten Konstanten V_0, X_0, A, φ_0, B, ψ_0.