Klausur zu “Theoretische Physik 3 – Elektrodynamik”

20. Februar 2017

Prof. Marc Wagner
Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Theoretische Physik

5 Aufgaben mit insgesamt 50 Punkten. Die Klausur ist mit 25 oder mehr Punkten bestanden. Jede Aufgabe auf ein separates Blatt. Name und Matrikelnummer auf jedem Blatt angeben.

Aufgabe 1 (2+2+2=6 Punkte)

Betrachte die beiden Viererpotentiale

$$A^\mu \quad = \quad (E_0 x, 0, 0, 0) \quad , \quad A'^\mu \quad = \quad (0, E_0 ct, 0, 0).$$

(a) Berechne die zugehörigen Feldstärketensoren $F^{\mu\nu}$ und $F'^{\mu\nu}$.

(b) Begründe ohne weitere Rechnung mit Deinen Ergebnissen aus Teilaufgabe (a), dass A^μ und A'^μ eichäquivalent sind. Bestimme die Eichtransformation, die A^μ und A'^μ verbindet, d.h. bestimme die Funktion Λ in $A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \Lambda$.

Betrachte nun ein nicht näher spezifiziertes Viererpotential A^μ.

(c) Begründe, dass $A^0 = A^1 = 0$ keine zulässige Eichfixierung ist.

Aufgabe 2 (4+4+4+2=14 Punkte)

Betrachte die Wellengleichung in 1 Raumdimension,

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) z(x,t) \quad = \quad 0,$$

wobei $z(x,t)$ eine reelle Funktion ist.

(a) Benutze den Separationsansatz $z(x,t) = R(x)T(t)$, um die Lösung der Wellengleichung auf zwei gewöhnliche Differentialgleichungen für $R(x)$ und $T(t)$ zurückzuführen. Gib die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen an.

(b) Bestimme alle linear unabhängigen rellen Lösungen der beiden in Teilaufgabe (a) aufgestellten gewöhnlichen Differentialgleichungen.

(c) Betrachte nun die Dirichlet-Randbedingungen $z(x=0,t) = z(x=L,t) = 0$. Welche Deiner in Teilaufgabe (b) gefundenen Lösungen der Differentialgleichung für $R(x)$ sind weiterhin zulässig, welche werden durch die Randbedingungen ausgeschlossen?

(d) Gib, ausgehend von Deinen Ergebnissen aus Teilaufgabe (b) und Teilaufgabe (c), die allgemeinste mit den Dirichlet-Randbedingungen $z(x=0,t) = z(x=L,t) = 0$ verträgliche Lösung der Wellengleichung an.

Aufgabe 3 (2+2+4=8 Punkte)

(a) Leite, ausgehend von $\nabla \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi\rho(\mathbf{r})$, das Gaußsche Gesetz her. Fertige dabei eine übersichtliche Skizze an, in die Du die in den Integralen auftretenden Flächen und Volumina einzeichnest.

(b) Begründe in Worten, warum das Gaußsche Gesetz geeignet ist, um das elektrische Feld eines unendlich langen homogen geladenen Zylinders zu berechnen, nicht aber das elektrische Feld eines homogen geladenen Würfels.

(c) Berechne das elektrische Feld eines unendlich langen homogen geladenen Zylinders mit Radius R und Ladungsdichte ρ_0.

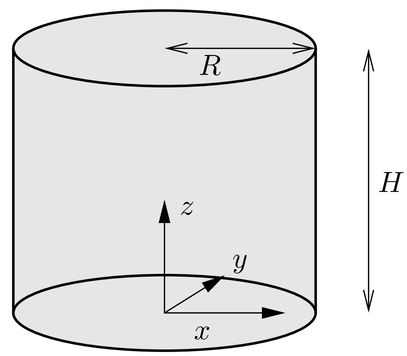
Aufgabe 4 (2+4+4=10 Punkte)

Betrachte einen homogen geladenen Zylinder (Radius R, Höhe H, Ladungsdichte ρ_0), dessen Symmetrieachse der z-Achse entspricht und dessen Boden im Koordinatenursprung zentriert ist (siehe Abbildung).

(a) Bestimme das Monopolmoment Q des Zylinders.

(b) Bestimme das Dipolmoment $\mathbf{p}$ des Zylinders bezüglich des Koordinatenursprungs.

(c) Gib näherungsweise das elektrostatische Potential $\Phi(\mathbf{r})$ und das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ für große Entfernungen $|\mathbf{r}|$ vom Ursprung an. Berücksichtige dabei sowohl Monopol- als auch Dipolmoment (höhere Ordnungen können ignoriert werden).



Aufgabe 5 (4+2+6=12 Punkte)

Elektrisches und magnetisches Feld und Feldstärketensor hängen, wie aus der Vorlesung bekannt, wie folgt zusammen: $E_j = -F^{0j}$, $B_j = -(1/2)\epsilon_{jkl}F^{kl}$.

(a) Drücke F^{jk} durch B_j aus, d.h. invertiere die Beziehung $B_j = -(1/2)\epsilon_{jkl}F^{kl}$.
Hinweis: Ein zweckmäßiges Vorgehen ist die Berechnung beziehungsweise Vereinfachung von $\epsilon_{jkl}B_l$.
Hinweis: Die Angabe des Endergebnisses ist nicht ausreichend, die einzelnen Rechenschritte müssen klar erkennbar sein.

(b) Drücke $F_{\mu\nu}$ durch die Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes aus, z.B. indem Du $F_{\mu\nu}$ in Matrixschreibweise angibst.

(c) Leite, ausgehend von $\partial_\mu F^{\mu\nu} = (4\pi/c)j^\nu$ die inhomogenen Maxwell-Gleichungen ausgedrückt durch elektrisches und magnetisches Feld her.
Hinweis: Die Angabe des Endergebnisses ist nicht ausreichend, die einzelnen Rechenschritte müssen klar erkennbar sein.

Lösung 1(a)

$$
\begin{aligned}
F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \\
\rightarrow \quad & F^{01} = -\partial^1 A^0 = +E_0 \quad , \quad F^{10} = -F^{01} = -E_0 \quad , \quad F^{\mu\nu} = 0 \text{ sonst} \\
\rightarrow \quad & F'^{01} = +\partial^0 A'^1 = +E_0 \quad , \quad F'^{10} = -F'^{01} = -E_0 \quad , \quad F'^{\mu\nu} = 0 \text{ sonst.}
\end{aligned}
$$

Lösung 1(b)

Eichäquivalent, da E-Feld und B-Feld identisch,

$$\Lambda = E_0 ctx.$$

Lösung 1(c)

Aufgrund von $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ würde $F^{01} = F^{10} = 0$ gelten, d.h. ein nicht-verschwindendes E-Feld in x-Richtung wäre ausgeschlossen. Das ist eine physikalische Einschränkung. $A^0 = A^1 = 0$ ist damit keine zulässige Eichfixierung.

Lösung 2(a)

Ansatz $z(x,t) = R(x)T(t)$.

Damit

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} &= \frac{R''(x)}{R(x)} = -k^2 = \text{const} \\
\rightarrow \quad \ddot{T}(t) &= -c^2k^2T(t) \quad , \quad R''(x) = -k^2R(x).
\end{aligned}
$$

Lösung 2(b)

Linear unabhängige Lösungen der Gleichungen sind für $k > 0$

- $T(t) = \cos(\omega t)$ und $T(t) = \sin(\omega t)$ mit $\omega = ck$,
- $R(x) = \cos(kx)$ und $R(x) = \sin(kx)$

bzw. für $k = 0$

- $T(t) = 1$ und $T(t) = t$,
- $R(x) = 1$ und $R(x) = x$.

Lösung 2(c)

RBs eliminieren $R(x) = 1$, $R(x) = x$, $R(x) = \cos(kx)$.

RB $z(x = 0, t) = 0$ erlaubt $R(x) = \sin(kx)$. Aufgrund von $z(x = L, t) = 0$ muss $k = (\pi/L)n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ sein.

Lösung 2(d)

Allgemeine reelle Lösung durch lineare Superposition:

$$z(x,t) \quad = \quad \sum_{n>0} \Big(a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t) \Big) \sin(k_n x) \quad , \quad k_n = (\pi/L)n \quad , \quad \omega_n = c k_n,$$

wobei a_n und b_n reelle Konstanten sind.

Lösung 3(a)

$$\begin{aligned}
\nabla \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad &= \quad 4\pi\rho(\mathbf{r}) \\
\rightarrow \quad \int_V d^3r \, \nabla \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad &= \quad \int_V d^3r \, 4\pi\rho(\mathbf{r}) \\
\rightarrow \quad \oint_A d\mathbf{A} \, \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad &= \quad 4\pi Q_{\text{innerhalb von } V}.
\end{aligned}$$

Lösung 3(b)

Gaußsches Gesetz erfordert symmetrisches Problem, d.h. geschlossene Flächen, auf denen das E-Feld "konstant" ist. Das ist der Fall für den unendlich ausgedehnten Zylinder, nicht aber für den Würfel.

Lösung 3(c)

Benutze zylinderförmiges Volumen V mit Radius r, E-Feld steht senkrecht auf Zylinderfläche, $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\mathbf{e}_r$,

$$\begin{aligned} 2\pi r L E(r) &= 4\pi Q_{\text{innerhalb von } V} \\ \to \quad E(r) &= \frac{2Q_{\text{innerhalb von } V}}{rL}. \end{aligned}$$

Fallunterscheidung:

- $r < R$:

  $$E(r) = 2\pi\rho_0 r.$$

- $r \geq R$:

  $$E(r) = \frac{2\pi\rho_0 R^2}{r}.$$

Lösung 4(a)

$$Q = \rho_0 V = \pi\rho_0 R^2 H.$$

Lösung 4(b)

$p_x = p_y = 0$ aus Symmetriegründen,

$$p_z = \int_0^R dr\, r \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H dz\, \rho_0 z = \rho_0 \frac{R^2}{2}\, 2\pi\, \frac{H^2}{2} = \frac{\pi\rho_0 R^2 H^2}{2}.$$

Lösung 4(c)

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{pr}}{r^3} = \frac{Q}{r} + \frac{p_z z}{r^3} \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\nabla\Phi(\mathbf{r}) = \frac{Q\mathbf{r}}{r^3} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{pr})\mathbf{r}}{r^5} = \frac{Q\mathbf{r}}{r^3} - \frac{p_z \mathbf{e}_z}{r^3} + \frac{3p_z z\mathbf{r}}{r^5}. \end{aligned}$$

Lösung 5(a)

$$\epsilon_{jkl}B_l \quad = \quad -\frac{1}{2}\epsilon_{jkl}\epsilon_{lmn}F^{mn} \quad = \quad -\frac{1}{2}\Big(\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}\Big)F^{mn} \quad = \quad -F^{jk}.$$

Lösung 5(b)

$$\begin{aligned}
F^{\mu\nu} \quad &= \quad \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ +E_x & 0 & -B_z & +B_y \\ +E_y & +B_z & 0 & -B_x \\ +E_z & -B_y & +B_x & 0 \end{pmatrix} \\
\rightarrow \quad F_{\mu\nu} \quad &= \quad \begin{pmatrix} 0 & +E_x & +E_y & +E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & +B_y \\ -E_y & +B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & +B_x & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Lösung 5(c)

$$\begin{aligned}
\partial_\mu F^{\mu 0} \quad &= \quad \partial_j F^{j0} \quad = \quad \frac{\partial}{\partial x^j}E_j \\
\rightarrow \quad \nabla \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \quad &= \quad 4\pi\rho(\mathbf{r},t) \\
\partial_\mu F^{\mu j} \quad &= \quad \partial_0 F^{0j} + \partial_k F^{kj} \quad = \quad -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}E_j + \frac{\partial}{\partial x^k}\Big(- \epsilon_{kjl}B_l\Big) \quad = \quad -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}E_j + \epsilon_{jkl}\frac{\partial}{\partial x^k}B_l \\
\rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \quad &= \quad \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r},t).
\end{aligned}$$