Klausur zu "Theoretische Physik 3 – Elektrodynamik"

21. März 2017

Prof. Marc Wagner
Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Theoretische Physik

6 Aufgaben mit insgesamt 50 Punkten. Die Klausur ist mit 25 oder mehr Punkten bestanden. Jede Aufgabe auf ein separates Blatt. Name und Matrikelnummer auf jedem Blatt angeben.

Aufgabe 1 (2+8=10 Punkte)

Betrachte die Wellengleichung in 1 Raumdimension,

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)z(x,t) \quad = \quad 0.$$

(a) Zeige, dass

$$z(x,t) \quad = \quad z_+(x+ct) + z_-(x-ct)$$

die Wellengleichung für beliebige unabhängige Funktionen z_+ und z_- löst.

(b) Bestimme, welche Einschränkungen für z_+ und z_- gelten, wenn man Neumann-Randbedingungen

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x=0,t) \quad = \quad \frac{\partial z}{\partial x}(x=L,t) \quad = \quad 0$$

fordert.

Aufgabe 2 (2+2+3+4+3=14 Punkte)

(a) Wie lauten die Maxwell-Gleichungen im Vakuum in kovarianter Form?

(b) Vereinfache die in (a) angegebenen Maxwell-Gleichungen für den Fall, dass Lorenz-Eichung $\partial_\mu A^\mu = 0$ vorliegt.

(c) Im Vakuum kann neben Lorenz-Eichung zusätzlich auch noch temporale Eichung $A^0 = 0$ gefordert werden. Zeige, dass es sich bei

$$A^0 \;=\; 0 \quad , \quad \mathbf{A} \;=\; \alpha \mathbf{e}_x \cos(\omega t - kz) \quad , \quad k \;=\; \omega/c \;>\; 0$$

um ein Viererpotential handelt, das sowohl Lorenz-Eichung als auch temporale Eichung erfüllt, und dass dieses Viererpotential die Maxwell-Gleichungen im Vakuum erfüllt.

(d) Berechne für das in (c) angegebene Viererpotential sowohl das elektrische Feld als auch das magnetische Feld. Fertige eine übersichtliche Skizze des elektrischen und des magnetischen Feldes an. Interpretiere das Viererpotential physikalisch, d.h. beschreibe in Worten, welches physikalische Phänomen von diesem Viererpotential beschrieben wird.

(e) Gib die allgemeine Lösung der Maxwell-Gleichungen im Vakuum an, wenn sowohl Lorenz-Eichung als auch temporale Eichung vorliegt.

Aufgabe 3 (6+2=8 Punkte)

(a) Betrachte Elektrostatik in 2 Raumdimensionen. Leite, ausgehend von der Poisson-Gleichung

$$\triangle \Phi(\mathbf{r}) \;=\; -2\pi \rho(\mathbf{r})$$

mit Hilfe des Satzes von Gauß das elektrische Feld einer Punktladung q im Ursprung her. Fertige zu Deiner Anwendung des Satzes von Gauß eine übersichtliche Skizze an.

(b) Berechne aus dem elektrischen Feld durch Integration das zugehörige elektrostatische Potential.

Aufgabe 4 (2+6=8 Punkte)

Berechne das Flächenintegral

$$\int_A d\mathbf{A}\,\mathrm{rot}\mathbf{F}(\mathbf{r}) \quad , \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) \;=\; \alpha \begin{pmatrix} -y \\ +x \\ 0 \end{pmatrix}$$

(A ist eine in der x-y-Ebene liegende im Ursprung zentrierte Kreisscheibe mit Radius R) auf zwei verschiedenen Wegen,

(a) durch Ausführen der Flächenintegration,

(b) indem Du es mit Hilfe des Satzes von Stokes auf ein Kurvenintegral zurückführst und dieses löst (fertige zu Deiner Anwendung des Satzes von Stokes eine übersichtliche Skizze an).

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Zeige durch explizite Rechnung, dass die Komponenten des Feldstärketensors $F^{\mu\nu}$ eichinvariant sind.

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Leite aus den Maxwell-Gleichungen im Vakuum (nicht in kovarianter Form, sondern ausgedrückt durch elektrisches Feld $\mathbf{E}$ und magnetisches Feld $\mathbf{B}$) die Wellengleichung für das elektrische Feld $\mathbf{E}$ her.

Lösung 1(a)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2} z_+(x+ct) &= z_+''(x+ct)c^2 \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2} z_+(x+ct) &= z_+''(x+ct)
\end{aligned}$$

($'$ bezeichnet die Ableitung nach dem Argument von z_+), damit erfüllt $z(x,t) = z_+(x+ct)$ die Wellengleichung.

Analog für $z_-(x-ct)$.

Da die Wellengleichung eine lineare DGl ist, wird sie auch von $z_+(x+ct) + z_-(x-ct)$ erfüllt.

Lösung 1(b)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x}(x,t) &= z_+'(x+ct) + z_-'(x-ct) \\
\rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x}(x=0,t) &= z_+'(+ct) + z_-'(-ct) = 0 \quad , \\
\frac{\partial z}{\partial x}(x=L,t) &= z_+'(L+ct) + z_-'(L-ct) = 0 \\
\rightarrow \quad z_+'(+u) + z_-'(-u) &= 0 \quad , \quad z_+'(2L+u) + z_-'(-u) = 0 \\
\rightarrow \quad z_+'(u) - z_+'(2L+u) &= 0 \\
\rightarrow \quad z_+'(u) &= z_+'(2L+u),
\end{aligned}$$

also ist z_+' eine $2L$-periodische Funktion beziehungsweise

$$z_+(u) = z_+(2L+u) + C_1 \quad \text{(1. Bedingung)}$$

mit beliebiger Konstante C_1. Es folgt

$$\begin{aligned}
z_-'(u) &= -z_+'(-u) \\
\rightarrow \quad z_-(u) &= z_+(-u) + C_2 \quad \text{(2. Bedingung)}
\end{aligned}$$

mit beliebiger Konstante C_2.

Einsetzen (optional, ist laut Aufgabenstellung (b) nicht erforderlich):

$$
\begin{aligned}
z(x,t) &= z_+(x+ct) + z_-(x-ct) = z_+(+x+ct) + z_+(-x+ct) + C_2 \\
\text{mit} \quad z_+(u) &= z_+(2L+u)
\end{aligned}
$$

(macht offensichtlich, dass Neumann-Randbedingungen erfüllt sind; man sieht außerdem, dass die Konstanten C_1 und C_2 nicht unabhängig sind, eine von beiden kann also weggelassen werden, z.B. $C_1 = 0$).

Lösung 2(a)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0.$$

Lösung 2(b)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu\Big(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\Big) = \Box A^\nu = 0.$$

Lösung 2(c)

Temporale Eichung entspricht $A^0 = 0$ ... also erfüllt.

Lorenz-Eichung:

$$\partial_\mu A^\mu = \nabla \mathbf{A} = \nabla\Big(\alpha \mathbf{e}_x \cos(\omega t - kz)\Big) = \alpha \mathbf{e}_x \sin(\omega t - kz) k \mathbf{e}_z = 0$$

... also auch erfüllt.

Maxwell-Gleichungen:

- 0-Komponente: $\Box A^0 = 0$ ... erfüllt. Analog 2-Komponente und 3-Komponente.
- 1-Komponente:

  $$\Box A^1 = \Box\Big(\alpha\cos(\omega t - kz)\Big) = -\alpha\cos(\omega t - kz)\underbrace{\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)}_{=0} = 0$$

  ... erfüllt.

Lösung 2(d)

E-Feld und B-Feld:

$$
\begin{aligned}
E_j &= F^{j0} = \partial^j A^0 - \partial^0 A^j = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}A^j \\
\rightarrow \quad E_x &= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}A^1 = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\alpha\cos(\omega t - kz) = \frac{\alpha\omega}{c}\sin(\omega t - kz) \\
\rightarrow \quad E_y &= E_z = 0 \\
B_j &= -\frac{1}{2}\epsilon_{jkl}F^{kl} = \frac{1}{2}\epsilon_{jkl}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}A^l - \frac{\partial}{\partial x^l}A^k\right) \\
\rightarrow \quad B_x &= B_z = 0 \\
\rightarrow \quad B_y &= \frac{\partial}{\partial z}A^1 = \frac{\partial}{\partial z}\alpha\cos(\omega t - kz) = \alpha k\sin(\omega t - kz) = E_x.
\end{aligned}
$$

Viererpotential beschreibt eine ebene monochromatische Lichtwelle, Ausbreitungsrichtung ist z-Richtung, Licht ist linear polarisiert, Frequenz des Lichts ist $f = \omega/2\pi$ (experimentell näherungsweise realisierbar z.B. durch einen Laserstrahl in z-Richtung).

Lösung 2(e)

$$
A^0 = 0 \quad , \quad \mathbf{A} = \int d^3k \left(\mathbf{a}(\mathbf{k})e^{+i(\omega t - \mathbf{kr})} + (\mathbf{a}(\mathbf{k}))^* e^{-i(\omega t - \mathbf{kr})}\right)
$$

mit beliebiger komplexer Funktion $\mathbf{a}(\mathbf{k})$, die $\mathbf{a}(\mathbf{k}) \perp \mathbf{k}$ erfüllt, und $\omega = |\mathbf{k}|c$.

Lösung 3(a)

Aus $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ folgt

$$
\nabla\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 2\pi\rho(\mathbf{r}) = 2\pi q\delta(\mathbf{r}).
$$

Aus Symmetriegründen muss $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\mathbf{e}_r$ gelten.
Volumenintegral über eine im Ursprung zentrierte Kreisfläche V mit Radius r:

- Linke Seite:

$$
\int_V d^2r\, \nabla\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \oint_A d\mathbf{A}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 2\pi r E(r).
$$

- Rechte Seite:

$$\int_V d^2r\, 2\pi q \delta(\mathbf{r}) \quad = \quad 2\pi q.$$

Damit

$$E(r) \quad = \quad \frac{q}{r} \quad \text{beziehungsweise} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad = \quad \frac{q}{r}\mathbf{e}_r.$$

Lösung 3(b)

Elektrostatisches Potential durch Integration,

$$\Phi(r) \quad = \quad \int dr\, E(r) \quad = \quad q \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

mit physikalisch irrelevanter Konstante r_0.

Lösung 4(a)

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\mathbf{F}(\mathbf{r}) \quad &= \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\alpha \end{pmatrix} \\ \int_A d\mathbf{A}\, \mathrm{rot}\mathbf{F}(\mathbf{r}) \quad &= \quad 2\pi R^2 \alpha. \end{aligned}$$

Lösung 4(b)

$$\int_A d\mathbf{A}\, \mathrm{rot}\mathbf{F}(\mathbf{r}) \quad = \quad \oint_C d\mathbf{r}\, \mathbf{F}(\mathbf{r}) \quad = \quad \int_0^{2\pi} d\lambda\, \frac{d\mathbf{r}(\lambda)}{d\lambda} \mathbf{F}(\mathbf{r}(\lambda)) \quad = \quad \ldots$$

Parametrisierung der Randkurve:

$$\mathbf{r}(\lambda) \quad = \quad R \begin{pmatrix} \cos(\lambda) \\ \sin(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{d\mathbf{r}(\lambda)}{d\lambda} \quad = \quad R \begin{pmatrix} -\sin(\lambda) \\ +\cos(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Forsetzung der Rechnung:

$$\ldots \quad = \quad \int_0^{2\pi} d\lambda\, R \begin{pmatrix} -\sin(\lambda) \\ +\cos(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix} \alpha R \begin{pmatrix} -\sin(\lambda) \\ +\cos(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix} \quad = \quad 2\pi R^2 \alpha.$$

Lösung 5

Ausgangspunkt ist die Definition von Eichtransformationen: $A'^{\mu} = A^{\mu} - \partial^{\mu}\Lambda$.
Damit

$$\begin{aligned} F'^{\mu\nu} \quad &= \quad \partial^{\mu} A'^{\nu} - \partial^{\nu} A'^{\mu} \quad = \quad \partial^{\mu}\Big(A^{\nu} - \partial^{\nu}\Lambda\Big) - \partial^{\nu}\Big(A^{\mu} - \partial^{\mu}\Lambda\Big) \quad = \\ &= \quad \underbrace{\partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}}_{=F^{\mu\nu}} - \underbrace{\Big(\partial^{\mu}\partial^{\nu}\Lambda - \partial^{\nu}\partial^{\mu}\Lambda\Big)}_{=0} \quad = \quad F^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Lösung 6

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} \quad &= \quad 0 \\ \rightarrow \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{B} + \nabla \times \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} \quad &= \quad 0. \end{aligned}$$

Einsetzen von

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} \quad = \quad 0$$

liefert

$$0 \quad = \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{B} + \nabla \times \Big(\nabla \times \mathbf{B}\Big) \quad = \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{B} + \nabla \underbrace{(\nabla \mathbf{B})}_{=0} - \triangle \mathbf{B} \quad = \quad \Box \mathbf{B}.$$