Organisation der Übungen: **Antje Peters** **Raum 2.107** **peters@th.physik.uni-frankfurt.de**

Blatt 10

vom 23.12.2016, Abgabe am 13.1.2017 in der Vorlesung

32) Magnetischer Punktdipol (schriftlich) *(3 Punkte)*

Berechne die Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$, die ein magnetisches Dipolfeld

$$\mathbf{A} = \frac{\vec{\mu} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

generiert (eine solche Stromdichte wird als magnetischer Punktdipol bezeichnet). Beschreibe die resultierende Stromdichte in Worten und fertige eine entsprechende Skizze an.
Hinweis: Für die auftretende δ-Funktion bietet sich die in Abschnitt 2.3 besprochene Darstellung durch eine Gauß-Funktion an.

33) Rotierende geladene Kugel (mündlich) *(1+2+2+1=6 Punkte)*

Betrachte eine im Ursprung zentrierte Kugel (Radius R), die homogen geladen ist (Gesamtladung q) und mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = (0, 0, \omega_0)$ rotiert.

i. Bestimme die zugehörige Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$.

ii. Berechne das durch die Rotation erzeugte magnetische Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ für Abstände $r \gg R$.
Hinweis: Berechne zunächst das magnetische Dipolmoment $\vec{\mu}$.

iii. Die Kugel weist außerdem eine homogene Massendichte auf (Gesamtmasse m). Berechne den Drehimpuls $\mathbf{l}$ der Kugel. In welcher Beziehung stehen magnetisches Dipolmoment $\vec{\mu}$ und Drehimpuls $\mathbf{l}$?

iv. Elementarteilchen besitzen eine Eigenschaft, die als Spin bezeichnet wird und die häufig bildlich als Rotation des Elementarteilchens um seinen Schwerpunkt beschrieben wird. Wende dieses Bild auf das Elektron an, d.h. prüfe, ob Deine in iii. gefundene Beziehung zwischen $\vec{\mu}$ und $\mathbf{l}$ für das Elektron erfüllt ist (schlage dazu Ladung, Masse, magnetisches Dipolomoment und Drehimpuls des Elektrons in der Literatur nach; beachte, dass in der Vorlesung im Gauß-System gerechnet wird).
Abweichungen von der in iii. *gefundenen Beziehung werden durch den gyromagnetischen Faktor (auch g-Faktor) beschrieben. Der gyromagnetische Faktor des Elektrons kann auf mehr als 10 Dezimalstellen genau gemessen und mit ähnlicher Genauigkeit im Rahmen der Quantenfeldtheorie berechnet werden.*

34) Lorentz-Invarianz und Eichinvarianz von Größen mit Viererindizes (schriftlich) *(1+2+1=4 Punkte)*

i. Zeige, dass d^4x Lorentz-invariant ist, d.h. $d^4x' = d^4x$ für zwei Intertialsysteme Σ und Σ' gilt.

ii. Zeige, dass $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ ein kovarianter Vierervektor ist, d.h. für Lorentz-Transformationen Λ

$$\partial'_\mu \quad = \quad \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu$$

gilt (Ausgangspunkt Deines Beweises sollte $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ sein).
Hinweis: Drücke zunächst Λ^{-1} durch Λ in Komponentenschreibweise aus.

iii. Zeige, dass die beiden Ausdrücke

$$\mathcal{L}_1 \quad = \quad \#(\partial_\mu A^\nu)(\partial^\mu A_\nu) \quad , \quad \mathcal{L}_1 \quad = \quad \#(\partial_\mu A^\nu)(\partial_\nu A^\nu)$$

nicht eichinvariant und daher keine geeigneten Kandidaten für die Langrange-Dichte der Elektrodynamik sind.

35) Transformationsverhalten des elektrischen und magnetischen Feldes (mündlich) *(2+5=7 Punkte)*

i. Bestimme das Transformationsverhalten von $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ bei einem Boost in x-Richtung. Begründe, dass in einer relativistischen Theorie elektrische und magnetische Phänomene nicht losgelöst voneinander betrachtet werden können, d.h. dass z.B. eine relativistische Version der Elektrostatik keinen Sinn macht.
Hinweis: Verwende die Definition des Feldstärketensors $F^{\mu\nu}$.

ii. Untersuche das Transformationsverhalten von elektrischen und magnetischen Feldern und Potentialen unter Raumspiegelung $\mathbf{r} \to_P \mathbf{r}' = -\mathbf{r}$, d.h. unter Parität P.

  (a) Wie verhält sich das magnetische Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ unter Parität?
  Hinweis: Betrachte geeignete, d.h. einfache Ströme, z.B. einen geraden stromdurchflossenen Draht.

  (b) Wie verhält sich das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ unter Parität?
  Hinweis: Betrachte eine geeignete, d.h. einfache Ladungsverteilung, z.B. eine Punktladung.

  (c) Wie verhält sich ∂_μ unter Parität?

  (d) Schließe aus Deinen Ergebnissen aus (a) und (c) auf das Transformationsverhalten von $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ unter Parität.

  (e) Schließe aus Deinen Ergebnissen aus (a), (c) und (d) auf das Transformationsverhalten von $\Phi(\mathbf{r})$ unter Parität. Welches Transformationsverhalten zeigt somit $A^\mu(x)$ unter Parität?