Organisation der Übungen: **Antje Peters** **Raum 2.107** **peters@th.physik.uni-frankfurt.de**

Blatt 11

vom 13.1.2017, Abgabe am 20.1.2017 in der Vorlesung

36) Rechenübung zu oberen und unteren Indizes (schriftlich) *(2+4=6 Punkte)*

Die Euler-Lagrange-Gleichungen der Elektrodynamik lauten

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} \quad = \quad 0.$$

i. Begründe, dass sich $\partial\mathcal{L}/\partial(\partial_\mu A_\nu)$ bezüglich μ unter Lorentz-Transformationen kontravariant verhält, d.h. wie eine Größe mit einem oberen Index μ (ein strenger mathematischer Beweis ist nicht notwendig).

ii. Führe die in der Vorlesung gezeigte Nebenrechnung

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \quad = \quad -F^{\mu\nu}$$

detailliert mit zahlreichen Zwischenschritten aus. Führe insbesondere die Ableitungen auf die offensichtlich gültige Regel $(\partial/\partial(\partial_\mu A_\nu))\partial_\rho A_\sigma = \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma}$ zurück, indem Du die Produktregel verwendest und gegebenenfalls auftretende obere Indizes mit der Minkowski-Metrik nach unten ziehst.

37) Feldstärketensor und dualer Feldstärketensor (mündlich) *(2+6=8 Punkte)*

i. Drücke $F^{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu}$, $F^\mu{}_\nu$ und $F_\mu{}^\nu$ durch $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ aus.

ii. Betrachte den Ausdruck

$$\mathcal{L} \quad = \quad \# F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}$$

als Kandidat für die Lagrange-Dichte der Elektrodynamik. Dabei ist $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$ der in der Vorlesung eingeführte duale Feldstärketensor.

(a) Zeige, dass $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ invariant unter Lorentz-Transformationen ist, d.h. dass $\epsilon'_{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$.
Hinweis: Überlege, wie Du die Determinante einer Lorentz-Transformation Λ mit Hilfe von $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ in Komponentenschreibweise formulieren kannst.

(b) Drücke $\tilde{F}_{\mu\nu}$ durch $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ aus. Drücke $F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}$ durch $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ aus.

(c) Ist $\mathcal{L}$ Lorentz-invariant? Ist $\mathcal{L}$ eichinvariant? Ist $\mathcal{L}$ paritätsinvariant? Warum eignet sich $\mathcal{L}$ nicht als Lagrange-Dichte oder Teil einer Lagrange-Dichte, die die Elektrodynamik beschreibt?

38) Homogene Maxwell-Gleichungen (schriftlich) ***(6 Punkte)***

Bestimme ausgehend von der kovarianten Form

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} \quad = \quad 0$$

die sogenannten homogenen Maxwell-Gleichungen ausgedrückt durch E-Felder und B-Felder.
Hinweis: Im Lauf der Rechnung ist es zweckmäßig, $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ *durch das dreikomponentige* ϵ_{jkl} *auszudrücken.*