Organisation der Übungen: Antje Peters Raum 2.107 peters@th.physik.uni-frankfurt.de

---

Blatt 13

vom 27.1.2017, Abgabe am 3.2.2017 in der Vorlesung

42) Greensche Funktion des harmonischen Oszillators (schriftlich) *(3+2+3=8 Punkte)*

Betrachte den ungedämpften harmonischen Oszillator in 1 Dimension, auf den die anregende Kraft $F(t)$ wirkt. Wie aus der Mechnik bekannt wird dieser durch die lineare inhomogene Differentialgleichung

$$\underbrace{\left(m\frac{d^2}{dt^2} + k\right)}_{D(t)} x(t) \quad = \quad F(t) \qquad (\star)$$

beschrieben.

i. Bestimme eine Greensche Funktion des Differentialoperators $D(t)$, d.h. löse

$$D(t)G(t,t') \quad = \quad \delta(t - t') \qquad (\star\star).$$

Konstruiere $G(t,t')$ so, dass die Randbedingung $\lim_{t\to-\infty} G(t,t') = 0$ erfüllt ist.
Hinweis: für $t < t'$ und für $t > t'$ ist es jeweils einfach, die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $(\star\star)$ anzugeben. Eine mögliche Wahl ist $G(t,t') = 0$ für $t < t'$ und $G(t,t') = A\sin(\omega(t - t'))$ für $t > t'$. Begründe, dass diese Wahl geeignet ist, d.h. bei Anwendung von $D(t)$ eine δ-Funktion $\delta(t - t')$ entsteht. Setze diese beiden Lösungen dann so zusammen, dass die Differentialgleichung $(\star\star)$ auch für $t = t'$ erfüllt ist, d.h. bestimme A entsprechend (hierzu sind eventuell Deine Überlegungen aus Aufgabe 11 hilfreich).

ii. Gib mit Hilfe von $G(t,t')$ einen Integralausdruck für die allgemeine Lösung von $(\star)$ für beliebige anregende Kraft $F(t)$ an.

iii. Betrachte nun einen harmonischen Oszillator, der für $t < 0$ in Ruhe ist. Im Zeitraum $0 \leq t \leq T$ wirkt die anregende Kraft $F(t) = F_0 = \text{const.}$ Für $t > T$ gibt es keine anregende Kraft. Bestimme mit Deinem Ergebnis aus ii. die Trajektorie $x(t)$ für beliebige Zeiten. Skizziere und diskutiere die Trajektorie für unterschiedliche T.

43) Energie und Impuls von monochromatischen Ebenen Wellen (mündlich) ***(2+2=4 Punkte)***

Berechne mit Hilfe des Energie-Impuls-Tensors die Energiedichte und die Energiestromdichte einer ebenen monochromatischen Welle. Betrachte dabei die beiden Fälle

i. lineare Polarisation,

ii. zirkulare Polarisation.

Berechne außerdem die zeitlichen Mittelwerte von Energiedichte und Energiestromdichte. Erläutere anhand geeigneter Skizzen von E-Feld und B-Feld, warum sich zeitlich nicht gemittelte und zeitlich gemittelte Größen bei linearer Polarisation unterscheiden, nicht aber bei zirkularer Polarisation.

44) Wellengleichung für E-Feld und B-Feld (schriftlich) ***(2+0.5+0.5+1=4 Punkte)***

i. Zeige, ausgehend von den Maxwell-Gleichungen im Vakuum ($j^\mu = 0$), dass $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ die Wellengleichungen

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle\right)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad = \quad 0 \quad , \quad \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle\right)\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad = \quad 0$$

erfüllen.

ii. Sind diese Wellengleichungen äquivalent zu den Maxwell-Gleichungen im Vakuum?

iii. Sind diese Wellengleichungen in Kombination mit $\nabla\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0$ und $\nabla\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$ äquivalent zu den Maxwell-Gleichungen im Vakuum?

iv. Zeige, dass die in der Vorlesung diskutierten ebenen Wellen diese Wellengleichungen erfüllen.

45) Wellenpakete (mündlich) ***(1+1+2+1=4 Punkte)***

Betrachte eine Überlagerung ebener elektromagnetischer Wellen im Vakuum, spezifiziert durch

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad = \quad \int dk\, a e^{-(k-k_0)^2/2\sigma^2} \mathbf{e}_x e^{+i(\omega t + kz)} + \text{c.c.}$$

mit komplexer Konstante a, reeller Konstante k_0 und $\omega = |k|c$.

i. Wie lautet das zugehörige $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$?

ii. Beschreibe in Worten, welche ebene elektromagnetischen Wellen mit welcher Stärke überlagert werden.

iii. Zeige durch Ausführen des k-Integrals, dass es sich um eine räumlich beziehungsweise zeitlich begrenzte Welle (ein sogenanntes Wellenpaket) handelt. *(Beachte, dass ω von k abhängt.)*

iv. Schätze mit Deinem Ergebnis die räumliche Ausdehnung des oben angegebenen Gaußschen Wellenpakets ab, wenn die wesentlichen Beiträge vom für den Menschen sichtbaren Licht kommen.