Organisation der Übungen: **Antje Peters** **Raum 2.107** **peters@th.physik.uni-frankfurt.de**

Blatt 3

vom 4.11.2016, Abgabe am 11.11.2016 in der Vorlesung

7) δ-Funktion (schriftlich) *(3+3=6 Punkte)*

Die in der Vorlesung diskutierte δ-Funktion kann z.B. wie folgt in Form eines Grenzwerts einer stetig differenzierbaren Funktion dargestellt werden: als Expontialfunktion,

$$\delta(x) \quad = \quad \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon^2}} e^{-x^2/\left(2\epsilon^2\right)},$$

oder als Lorentz-Kurve,

$$\delta(x) \quad = \quad \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2},$$

wobei der Grenzwert erst am Ende einer Rechnung zu bilden ist.

i. Zeige einige wesentliche Eigenschaften der δ-Funktion für beide Darstellungen:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta(x - x_0) \quad &= \quad 1 \\ \delta(x - x_0) \quad &= \quad 0 \quad \text{für fest vorgegebenes } x > x_0 \text{ bzw. } x < x_0. \end{aligned}$$

ii. Zeige

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta(x - x_0) e^{-ax} \quad = \quad e^{-ax_0} \tag{1}$$

für die Darstellung mit Exponentialfunktion (berechne zunächst das auftretende Integral und bilde erst danach den Limes $\epsilon \to 0$).

8) Elektrostatisches Potential und E-Feld einer homogen geladenen Kugel (schriftlich) *(3+1=4 Punkte)*

i. Berechne das elektrostatische Potential einer homogen geladenen Kugel (Zentrum im Ursprung, Radius R, Gesamtladung q) durch Lösen des in der Vorlesung diskutierten Integrals

$$\Phi(\mathbf{r}) \quad = \quad \int d^3r' \, \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Hinweis: Die Verwendung von Kugelkoordinaten ist zweckmäßig.

ii. Berechne, ausgehend von $\Phi(\mathbf{r})$ aus Teilaufgabe (a), das E-Feld der homogen geladenen Kugel.

9) "Beweise" der Sätze von Gauß und Stokes (mündlich) ***(3+3=6 Punkte)***

i. Erweitere die in der Vorlesung präsentierte Beweisskizze des Satzes von Gauß von 2 Dimensionen auf 3 Dimensionen.

ii. Beweise analog den Satz von Stokes für den Spezialfall, dass die Fläche in der x-y-Ebene liegt, d.h. eben ist.

10) Anwendungen des Satzes von Gauß (mündlich) ***(2+2=4 Punkte)***

i. Formuliere den Satz von Gauß in einer Dimension. Um welche dir seit der Schulzeit bekannte Beziehung handelt es sich?

ii. Berechne das Integral

$$\int_V d^3r \, \nabla \mathbf{f}(\mathbf{r}) \quad , \quad \mathbf{f} \; = \; (x^3 \, , \, 0 \, , \, 0)$$

(*V* ist ein Zylinder mit Höhe *L* und Radius *R*, dessen Symmetrieachse der *z*-Achse entspricht) auf zwei unterschiedlichen Wegen,

- durch Lösen des Volumenintegrals,
- durch Anwendung des Satzes von Gauß und Lösen des Oberflächeninegrals,

und verfiziere die Gültigkeit des Satzes von Gauß anhand dieses Beispiels.

Python Übung 4 – Plotten des E-Felds einer homogen geladenen Kugel in der x-y-Ebene

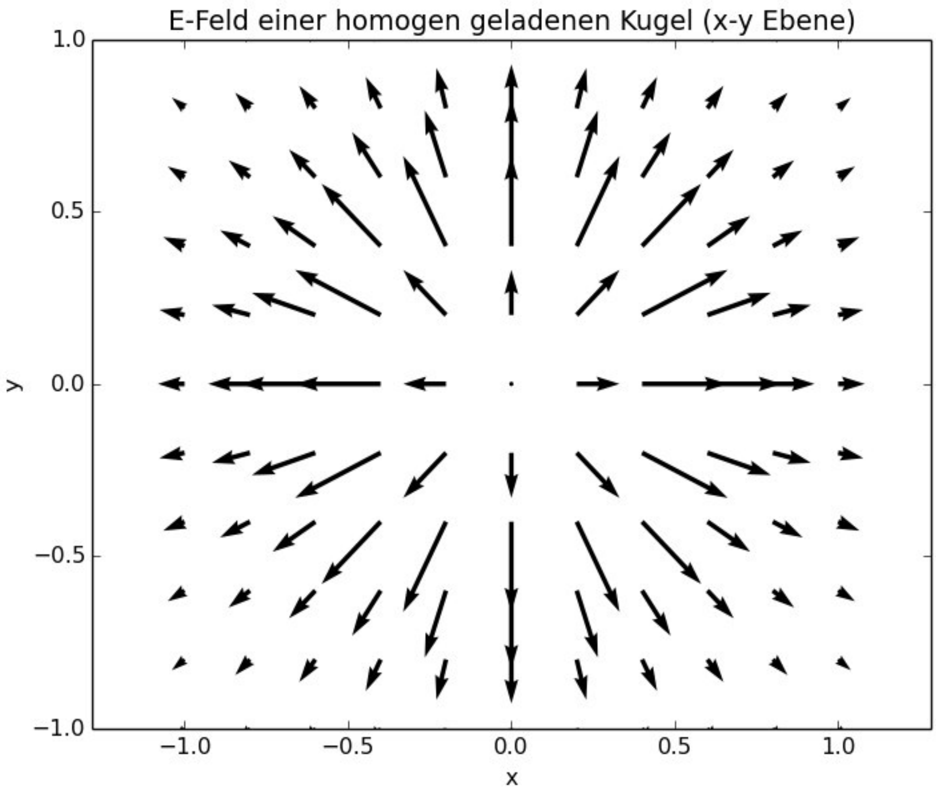
In Aufgabe 8 wurde das E-Feld einer homogen geladenen Kugel berechnet. Der angegebene Python-Code erzeugt den zugehörigen Plot für eine Kugel mit dem Radius `R=0.5` in der x-y-Ebene. Starte den Code auf deinem Computer und reproduziere den Plot. Was ändert sich, wenn du den Kugelradius variierst (z.B. `R=1.0, 1.5, 2.0`)? Was ändert sich, wenn du den Wert von `z` variierst (z.B. `z=1.0, 3.0 10.0`)?

Hinweise zum Code:

- `np.meshgrid:` Erzeugt aus den Koordinatenachsen ein Koordinaten-Array. Es ersetzt damit mehrere `for`-Schleifen und kompaktifiziert das zweidimensionale Plotten.
- `ax=gca()` erzeugt die Achsen des Plots.
- `ax.quiver(X, Y, U, V)` erzeugt den zweidimensionalen Plot mit den Werten `U,V` über den Achsen `X,Y`.
- `plt.axis('equal')` sorgt dafür, dass x- und y-Achse die gleiche Skalierung haben.

Allgemeiner Hinweis:

Das im Plot aufgetragene Koordinatensystem bezieht sich auf x und y, nicht auf E_x und E_y. Python skaliert die Länge der Vektorpfeile automatisch, sodass der Plot übersichtlich ist. Längenverhältnisse der Vektorpfeile bleiben dabei erhalten. Um die absolute Länge der Vektorpfeile ablesen zu können, wäre ein zweites Koordinatensystem nötig, auf dessen Achsen die Einheiten des E-Felds aufgetragen sind.



Code:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from math import sqrt

R = 0.5
q = 1.0

z = 0.0

def E(r):
    if r < R:
        return q*r/pow(R, 3.0)
    else:
        return q/pow(r, 2.0)

def E_x(x, y):
    r = sqrt(x*x + y*y + z*z)
    return E(r) * x / r

def E_y(x, y):
    r = sqrt(x*x + y*y + z*z)
    return E(r) * y / r

v_E_x = np.vectorize(E_x)
v_E_y = np.vectorize(E_y)

X, Y = np.meshgrid(np.arange(-1.00, +1.01, 0.2), np.arange(-1.00,
+1.01,
0.2))

U = v_E_x(X, Y)
V = v_E_y(X, Y)

fig=plt.figure()
ax = fig.gca()
ax.quiver(X, Y, U, V)

plt.axis('equal')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('E-Feld einer homogen geladenen Kugel (x-y Ebene)')
plt.show()
```