Klausur zu “Theoretische Physik 3 – Elektrodynamik”

01. März 2019

Prof. Marc Wagner
Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Theoretische Physik

5 Aufgaben mit insgesamt 50 Punkten. Die Klausur ist mit 25 oder mehr Punkten bestanden. Jede Aufgabe auf ein separates Blatt. Name und Matrikelnummer auf jedem Blatt angeben.

Aufgabe 1 (1+3+2+4+4=14 Punkte)

Betrachte im Rahmen der Elektrostatik einen geraden, unendlich langen und unendlich dünnen Draht, der homogen geladen ist (Linienladungsdichte λ) und der auf der z-Achse verläuft.

(a) Gib die den Draht beschreibende elektrische Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ an.

(b) Berechne $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. Verwende dabei das Gaußsche Gesetz.

(c) Wie lautet die allgemeine Beziehung zwischen dem elektrischen Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ und dem elektrostatischen Potential $\phi(\mathbf{r})$? Berechne $\phi(\mathbf{r})$ ausgehend von Deinem Ergebnis für $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ aus (b).

Betrachte nun einen zylinderförmigen, geraden und unendlich langen Draht mit Radius R, der homogen geladen ist (Linienladungsdichte λ) und der auf der z-Achse verläuft und um diese zentriert ist.

(d) Gib die zugehörige Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ an und berechne sowohl $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ als auch $\phi(\mathbf{r})$.

Betrachte nun wieder den zuerst beschriebenen unendlich dünnen Draht aus den Teilaufgaben (a), (b) und (c).

(e) Stelle einen Integralausdruck zur Berechnung des elektrischen Feldes $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ auf, in dem die Beiträge der durch die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ beschriebenen Ladungen aufintegriert werden. Löse das Integral, d.h. berechne erneut $\mathbf{E}(\mathbf{r})$.
Hinweis:

$$\frac{d}{dx}\frac{x}{(1+x^2)^{1/2}} \quad = \quad \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

Lösung 1(a)

$\rho(\mathbf{r}) = \lambda\delta(x)\delta(y)$.

Lösung 1(b)

Betrachte einen um den Draht zentrierten Zylinder mit Radius r und Höhe h, dessen Volumen mit Z und dessen Oberfläche mit ∂Z bezeichnet wird. Wie in 1(b) bereits bemerkt gilt $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\mathbf{e}_r$. Damit

$$4\pi Q_{\text{innen}} = 4\pi\lambda h = \left(\int_Z d^3r' \, \nabla\mathbf{E}(\mathbf{r}') = \right) \int_{\partial Z} d\mathbf{n}\,\mathbf{E} = 2\pi r h E(r)$$

$$\rightarrow \quad E(r) = \frac{2\lambda}{r} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{2\lambda}{r}\mathbf{e}_r.$$

Lösung 1(c)

$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$.

$\phi(\mathbf{r}) = \phi(r)$ aus Symmetriegründen. Damit

$$\phi(r) = -\int_{r_0}^{r} dr' \, E(r') = -\int_{r_0}^{r} dr' \, \frac{2\lambda}{r'} = -2\lambda \ln(r/r_0).$$

Lösung 1(d)

$$\rho(\mathbf{r}) = \left\{ \begin{array}{ll} \lambda/\pi R^2 & \text{falls } r < R \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right. .$$

Zweckmäßig ist wieder Gaußsches Gesetz:

- $r < R$:

$$4\pi Q_{\text{innen}} = \frac{4\pi r^2 \lambda h}{R^2} = \int_{\partial Z} d\mathbf{n}\,\mathbf{E} = 2\pi r h E(r)$$

$$\rightarrow \quad E(r) = \frac{2\lambda r}{R^2} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{2\lambda r}{R^2}\mathbf{e}_r.$$

- $r \geq R$:

$$4\pi Q_{\text{innen}} = 4\pi\lambda h = \int_{\partial Z} d\mathbf{n}\,\mathbf{E} = 2\pi r h E(r)$$

$$\rightarrow \quad E(r) = \frac{2\lambda}{r} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{2\lambda}{r}\mathbf{e}_r.$$

Für $r \geq R$ ergibt sich $\phi(r)$ wie in (d), d.h.

$$\phi(r) = -2\lambda \ln(r/r_0).$$

Für $r < R$ ergibt sich $\phi(r)$ gemäß

$$\begin{aligned}\phi(r) &= -2\lambda \ln(R/r_0) - \int_R^r dr'\, E(r') = -2\lambda \ln(R/r_0) - \int_R^r dr'\, \frac{2\lambda r'}{R^2} = \\ &= -2\lambda \ln(R/r_0) - \lambda\Big(\frac{r^2}{R^2} - 1\Big)\end{aligned}$$

(zweckmäßig aber laut Aufgabenstellung nicht erforderlich ist die Wahl $r_0 = R$). Beachte, dass $\phi(r)$ auch bei $r = R$ stetig sein muss (bei Lösung mit Integralen, wie oben, ist dies automatisch der Fall).

Lösung 1(e)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int d^3r'\, \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Aus Symmetriegründen gilt $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\mathbf{e}_r$ mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Betrachte daher zum einfachen Lösen des Integrals zunächst $\mathbf{r} = (x, 0, 0)$,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r} = (x, 0, 0)) = \int_{-\infty}^{+\infty} dz'\, \frac{\lambda}{(x^2 + z'^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -z' \end{pmatrix}.$$

$E_y(\mathbf{r} = (x, 0, 0)) = 0$ (offensichtlich), $E_z(\mathbf{r} = (x, 0, 0)) = 0$ (antisymmetrischer Integrand),

$$\begin{aligned}E_x(\mathbf{r} = (x, 0, 0)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dz'\, \frac{\lambda x}{(x^2 + z'^2)^{3/2}} = \int_{-\infty}^{+\infty} dz'\, \frac{\lambda}{x^2(1 + (z'/x)^2)^{3/2}} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} du\, \frac{\lambda}{x(1 + u^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{x} \frac{u}{(1 + u^2)^{1/2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2\lambda}{x},\end{aligned}$$

wobei $u = z'/x$ definiert wurde (damit folgt $du = dz'/x$). Damit

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{2\lambda}{r}\mathbf{e}_r.$$

Aufgabe 2 (3+3+5=11 Punkte)

(a) Wie lauten die inhomogenen Maxwell-Gleichungen in kovarianter Form? Definiere dabei auch den in den inhomogenen Maxwell-Gleichungen auftretenden Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$, d.h. drücke $F^{\mu\nu}$ durch die Viererpotentiale A^μ aus. In welcher Beziehung stehen die Komponenten des Feldstärketensors $F^{\mu\nu}$ mit denen des elektrischen Feldes $\mathbf{E}$ und das magnetischen Feldes $\mathbf{B}$?

(b) Wie lautet die Definition des dualen Feldstärketensors $\tilde{F}^{\mu\nu}$, d.h. was ist die Beziehung zwischen $\tilde{F}^{\mu\nu}$ und $F^{\mu\nu}$? Beweise die Gültigkeit der homogenen Maxwell-Gleichungen

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} \quad = \quad 0,$$

d.h. zeige, dass es sich bei diesen Gleichungen um mathematische Identitäten handelt.

(c) Drücke die in (b) in kovarianter Form gegebenen homogenen Maxwell-Gleichungen vollständig durch das elektrische Feld $\mathbf{E}$ und das magnetische Feld $\mathbf{B}$ aus. Dein Rechenweg muss dabei klar erkennbar sein, die Angabe des Endergebnisses reicht nicht aus.

Lösung 2(a)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} \quad = \quad \frac{4\pi}{c} j^\nu \quad , \quad F^{\mu\nu} \quad = \quad \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$F^{\mu\nu} \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ +E_x & 0 & -B_z & +B_y \\ +E_y & +B_z & 0 & -B_x \\ +E_z & -B_y & +B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung 2(b)

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} \quad = \quad \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu F_{\rho\sigma} \quad = \quad \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu \Big(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho\Big) \quad = \quad 0$$

aufgrund von

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu\partial_\rho \quad = \quad \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu\partial_\rho + \frac{1}{2}\epsilon^{\rho\nu\mu\sigma}\partial_\rho\partial_\mu \quad = \quad \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu\partial_\rho - \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\rho\partial_\mu \quad = \quad 0$$

(1. Schritt: Summationsindizes umbenennen; 2. Schritt: Antisymmetrie von $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ ausnutzen).

Lösung 2(c)

Zunächst dualen Feldstärketensor durch **E** und **B** ausdrücken ($\epsilon_{0123} = +1$, damit $\epsilon^{0123} = -1$):

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & +B_x & +B_y & +B_z \\ -B_x & 0 & -E_z & +E_y \\ -B_y & +E_z & 0 & -E_x \\ -B_z & -E_y & +E_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

$\nu = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu \tilde{F}^{\mu 0} = -\partial_j B_j \\ \rightarrow \quad \nabla \mathbf{B} &= 0. \end{aligned}$$

$\nu = j$:

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu \tilde{F}^{\mu j} = \frac{1}{c}\partial_t \tilde{F}^{0j} + \partial_k \tilde{F}^{kj} = \frac{1}{c}\partial_t B_j - \partial_k \epsilon_{kjl} E_l = \frac{1}{c}\partial_t B_j + \epsilon_{jkl}\partial_k E_l \\ \rightarrow \quad \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} &= 0, \end{aligned}$$

wobei $\tilde{F}^{jk} = -\epsilon_{jkl}E_l$ verwendet wurde, was sich direkt aus (1) ablesen lässt.

Aufgabe 3 (2+2+5=9 Punkte)

(a) Wie lautet die Bedingung an A^μ für Lorenz-Eichung? Wie lautet die Bedingung an A^μ für temporale Eichung? Unter welcher physikalischer Voraussetzung kann gleichzeitig Lorenz-Eichung und temporale Eichung gefordert werden? Zeige, dass im Fall von gleichzeitig vorliegender Lorenz-Eichung und temporaler Eichung auch Coulomb-Eichung vorliegt.

(b) Drücke die Maxwell-Gleichungen in kovarianter Form vollständig durch A^μ aus (d.h. nur A^μ und j^μ sollen in Deinem Ergebnis auftreten, nicht aber $F^{\mu\nu}$). Vereinfache diese Gleichungen für den Fall, dass Vakuum und sowohl Lorenz-Eichung als auch temporale Eichung vorliegt.

(c) Gib die allgemeine Lösung der in (b) vereinfachten Maxwell-Gleichungen an. Erläutere in wenigen aber präzisen Sätzen, in welcher Form sich die folgenden drei einen Lichtstrahl charakterisierenden Größen in der von Dir angegebenen Lösung widerspiegeln: (a) Frequenz des Lichts; (b) Richtung des Lichtstrahls; (c) Polarisation des Lichts (mehr als drei bis sechs Sätze üblicher Länge sind für eine erfolgreiche Beantwortung nicht erforderlich).

Lösung 3(a)

$\partial_\mu A^\mu = 0.$

$A^0 = 0.$

Im Vakuum ist Lorenz-Eichung und temporale Eichung gleichzeitig möglich.

$$0 = \partial_\mu A^\mu = \partial_0 \underbrace{A^0}_{=0} + \partial_j A^j = \nabla \mathbf{A},$$

damit liegt also auch Coulomb-Eichung $\nabla \mathbf{A} = 0$ vor.

Lösung 3(b)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu \Big(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \Big) = \Box A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = \frac{4\pi}{c} j^\nu .$$

Vakuum, Lorenz-Eichung, temporale Eichung:

$$A^0 = 0 \quad , \quad \Box \mathbf{A} = 0 \quad , \quad \nabla \mathbf{A} = 0$$

(Angabe von $\Box \mathbf{A} = 0$ für volle Punktzahl ausreichend, da $A^0 = 0$ und $\nabla \mathbf{A} = 0$ bereits in (a) zu finden ist).

Lösung 3(c)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \int d^3k \left(\mathbf{a}(\mathbf{k}) e^{+i(\omega t - \mathbf{kr})} + (\mathbf{a}(\mathbf{k}))^* e^{-i(\omega t - \mathbf{kr})} \right)$$

mit $\mathbf{a}(\mathbf{k})\mathbf{k} = 0$ und $\omega = |\mathbf{k}|c$.
(a) ω ist Frequenz des Lichts.
(b) $\mathbf{k}$ ist Ausbreitungsrichtung des Lichts.
(c) Zwei linear unabhängige mögliche Richtungen für $\mathbf{a}(\mathbf{k})$ entsprechen den beiden Polarisationsrichtungen.

Aufgabe 4 (3+3+3=9 Punkte)

(a) Wie lautet der Satz von Gauß in d Dimensionen? Erläutere die Bedeutung aller auftretenden Größen und fertige eine übersichtliche Skizze in $d = 2$ Dimensionen an, in der Du die beiden auftretenden Integrale veranschaulichst.

(b) Berechne mit Hilfe des Satzes von Gauß das Integral

$$I = \int_K d^2r\, \nabla\mathbf{f}(x,y),$$

wobei K eine um den Ursprung zentrierte Kreisscheibe mit Radius R ist und es sich bei

$$\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} g(\sqrt{x^2+y^2})$$

um eine stetig differenzierbare Funktion mit ansonsten nicht weiter spezifizierter Funktion g handelt.

(c) Teste Dein Ergebnis aus (b), indem Du das zweidimensionale Integral I direkt berechnest, also ohne Verwendung des Satzes von Gauß.
Hinweis: Zweckmäßig ist es, zunächst $\nabla\mathbf{f}(x,y)$ zu berechnen. Bei Verwendung von Polarkoordinaten (r,φ) bietet sich für die Lösung des r-Integrals partielle Integration an.

Lösung 4(a)

Satz von Gauß:

$$\int_V dV \underbrace{\nabla\mathbf{f}(\mathbf{r})}_{=\operatorname{div}\mathbf{f}(\mathbf{r})} = \oint_A d\mathbf{A}\,\mathbf{f}(\mathbf{r}).$$

- $\int_V dV$: Integration über d-dimensionales Volumen V.
- $\oint_A d\mathbf{A} = \oint_A dA\,\hat{\mathbf{n}}$: Integration über geschlossene das Volumen V begrenzende $d-1$-dimensionale (Hyper-)Fläche A (dA: Flächenelement; $\hat{\mathbf{n}}$: Flächennormale).
- $\mathbf{f}$: Beliebige (stetig differenzierbare) vektorielle Funktion (d Komponenten).

Lösung 4(b)

$$I = \int_{\partial K} d\mathbf{n}\,\mathbf{f} = \int_0^{2\pi} d\varphi\, R \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} g(R) = 2\pi R^2 g(R).$$

Lösung 4(c)

$$\nabla \mathbf{f}(x,y) = 2g(r) + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} g'(r)\nabla r = 2g(r) + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} g'(r)\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = 2g(r) + rg'(r)$$

$$\begin{aligned} I &= \int_K d^2r\, \nabla \mathbf{f}(x,y) = \int_0^R dr\, r \int_0^{2\pi} d\varphi \Big(2g(r) + rg'(r)\Big) = \\ &= 4\pi \int_0^R dr\, rg(r) + 2\pi \int_0^R dr\, r^2 g'(r) = \\ &= 4\pi \int_0^R dr\, rg(r) + 2\pi r^2 g(r)\Big|_0^R - 4\pi \int_0^R dr\, rg(r) = 2\pi R^2 g(R). \end{aligned}$$

Aufgabe 5 (2+2+3=7 Punkte)

(a) Wie lautet das elektrostatische Potential $\phi(\mathbf{r})$ eines im Ursprung zentrierten homogen geladenen Zylinders mit Gesamtladung Q für Orte $\mathbf{r}$ weit vom Ursprung entfernt in führender nicht-verschwindender Ordnung einer Multipolentwicklung.

(b) Wie lauten die Gleichungen der Magnetostatik, denen ein $\mathbf{B}$-Feld genügen muss? Ist $B(\mathbf{r}) = \beta\mathbf{r}$ mit $\beta \neq 0$ ein physikalisch mögliches Feld? Begründe Deine Antwort.

(c) Berechne die Gesamtenergie des von einer Punktladung Q erzeugten elektrischen Feldes.

Lösung 5(a)

Monopolmoment ist Gesamtladung. Damit $\phi(\mathbf{r}) = Q/r$.

Lösung 5(b)

$$\nabla \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r}).$$

Kein zulässiges Feld, da $\nabla \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 3\beta \neq 0$.

Lösung 5(c)

Elektrisches Feld, Energiedichte und Gesamtenergie:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{Q}{r^2}\mathbf{e}_r \\
\mathcal{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{8\pi}\Big(\mathbf{E}(\mathbf{r})\Big)^2 = \frac{Q^2}{8\pi r^4} \\
E &= \int d^3r\,\mathcal{E}(\mathbf{r}) = 4\pi\int_0^\infty dr\,r^2\frac{Q^2}{8\pi r^4} = \frac{Q^2}{2}\int_0^\infty dr\,\frac{1}{r^2} \to \infty.
\end{aligned}
$$

Die Gesamtenergie ist also unendlich groß.