Klausur zu "Theoretische Physik 3 – Elektrodynamik"

27. März 2019

Prof. Marc Wagner
Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Theoretische Physik

5 Aufgaben mit insgesamt 50 Punkten. Die Klausur ist mit 25 oder mehr Punkten bestanden. Jede Aufgabe auf ein separates Blatt. Name und Matrikelnummer auf jedem Blatt angeben.

Aufgabe 1 (1+1+4 = 6 Punkte)

(a) Wie lautet eine Greensche Funktion des Laplace-Operators in 3 Dimensionen, das heißt von $\triangle = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$?

(b) Gegeben ist eine stationäre Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ in 3 Raumdimensionen. Gib einen Integralausdruck für das entsprechende elektrostatische Potential $\Phi(\mathbf{r})$ an, in dem Du die Greensche Funktion aus Teilaufgabe (a) verwendest.

(c) Eine Greensche Funktion des Laplace-Operators in 1 Dimension, $\partial^2/\partial x^2$, ist $G(x - x') = |x - x'|/2$, das heißt es gilt

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x - x') \quad = \quad \delta(x - x').$$

Berechne mit Hilfe dieser Greenschen Funktion das elektrostatische Potential $\Phi(x)$ zweier positiver Ladungen $q > 0$ bei $x = -a$ and $x = +a$ $(a > 0)$ im Rahmen der 1-dimensionalen Elektrostatik. $\Phi(x)$ soll dabei die Randbedingungen $\Phi(x = -2a) = \Phi(x = +2a) = 0$ erfüllen. (Verwende zur Beschreibung der 1-dimensionalen Elektrostatik die Poission-Gleichung $(\partial^2/\partial x^2)\Phi(x) = \rho(x)$, also nicht einen in 3 Raumdimensionen üblichen Faktor -4π vor der Ladungsdichte.)

Lösung 1(a)

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad = \quad \frac{1}{-4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

da

$$\triangle G(\mathbf{r},\mathbf{r}') \quad = \quad \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

(wurde in Vorlesung diskutiert; außerdem leicht aus dem Coulomb-Gesetz und der Poisson-Gleichung zu schließen).

Lösung 1(b)

Aus Poisson-Gleichung $\triangle\Phi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r})$ und Teilaufgabe (a) folgt

$$\Phi(\mathbf{r}) \quad = \quad \int d^3r' \, (-4\pi\rho(\mathbf{r}'))G(\mathbf{r},\mathbf{r}') \quad = \quad \int d^3r' \, \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.$$

Lösung 1(c)

Ladungsdichte: $\rho(x) = q\delta(x+a) + q\delta(x-a)$.

$\Phi(x)$ mit Greenscher Funktion:

$$\begin{aligned}\Phi(x) \quad &= \quad \int dx' \, \rho(x')G(x,x') \quad = \quad q\int dx' \, \Big(\delta(x'+a)+\delta(x'-a)\Big)G(x,x') \quad = \\ &= \quad q\Big(G(x,-a)+G(x,+a)\Big) \quad = \quad q\Big(\frac{|x+a|}{2}+\frac{|x-a|}{2}\Big). \qquad (1)\end{aligned}$$

Zum Erfüllen der vorgegebenen Randbedingungen kann homogene Lösung der Poison-Gleichung, $C+Dx$ zu Gl. (1) addiert werden, das heißt $\tilde{\Phi}(x) = \Phi(x)+C+Dx$. Bestimmung von C und D durch Auswerten an den Rändern,

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}(-2a) \quad &= \quad \Phi(-2a)+C-2Da \quad = \quad 2qa+C-2Da \quad = \quad 0 \\ \tilde{\Phi}(+2a) \quad &= \quad \Phi(+2a)+C+2Da \quad = \quad 2qa+C+2Da \quad = \quad 0,\end{aligned}$$

also $4qa+2C=0$ und damit $C=-2qa$ und $D=0$.

Endergebnis:

$$\tilde{\Phi}(x) \quad = \quad q\Big(\frac{|x+a|}{2}+\frac{|x-a|}{2}\Big)-2qa \quad = \quad \begin{cases} -2qa-qx & \text{für } x \leq -a \\ -qa & \text{für } -a < x \leq +a \\ -2qa+qx & \text{für } +a < x \end{cases} .$$

Aufgabe 2 (3+3+3 = 9 Punkte)

Gegeben ist das Viererpotential

$$A^\mu \quad = \quad (q/r - 2\alpha ct \sin(x/L), \alpha(ct)^2 \cos(x/L)/L, 0, 0)$$

(dabei ist $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$).

(a) Wie lautet die Bedingung für Lorenz-Eichung? Zeige, dass das gegebene A^μ diese Bedingung nicht erfüllt.

(b) Zwei eichäquivalente Viererpotentiale A^μ und A'^μ sind, wie in der Vorlesung besprochen, durch eine Eichtransformation der Form $A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \Lambda$ verbunden. Konstruiere eine Eichtransformation, d.h. eine geeignete Funktion Λ, die das gegebene A^μ in Lorenz-Eichung bringt.

(c) Wie lautet die zu dem gegebenen A^μ gehörige Viererstromdichte j^μ? Führe dazu eine explizite Rechnung aus oder begründe Deine Antwort stichhaltig.

Lösung 2(a)

Bedingung für Lorenz-Eichung: $\partial_\mu A^\mu = 0$.

Für das gegebene Viererpotential gilt $\partial_\mu A^\mu = -2\alpha \sin(x/L) - \alpha(ct)^2 \sin(x/L)/L^2 \neq 0$.

Lösung 2(b)

Für $\Lambda = -\alpha(ct)^2 \sin(x/L)$ gilt $\partial^\mu \Lambda = (-2\alpha ct \sin(x/L), \alpha(ct)^2 \cos(x/L)/L, 0, 0)$ und damit

$$A'^\mu \quad = \quad A^\mu - \partial^\mu \Lambda \quad = \quad A^\mu - (-2\alpha ct \sin(x/L), \alpha(ct)^2 \cos(x/L)/L, 0, 0) \quad = \quad (q/r, 0, 0, 0).$$

A'^μ erfüllt offensichtlich Lorenz-Eichung, da es nur eine 0-Komponente besitzt und diese nicht von t abhängt.

Lösung 2(c)

A'^μ ist eichäquivalent zu A^μ, besitzt also dieselbe zugehörige Viererstromdichte.

$A'^\mu = (q/r, 0, 0, 0)$ ist das Viererpotential einer ruhenden Punktladung q im Ursprung. Damit gilt $j^\mu = (q\delta(\mathbf{r})c, 0, 0, 0)$.

Aufgabe 3 (2+4 = 6 Punkte)

(a) Wie lautet die Fourier-Transformation einer Funktion $f(x)$ in eine Funktion $\tilde{f}(k)$? Wie lautet die entsprechende Fourier-Rücktransformation?

(b) Berechne die Fourier-Transformierte der Funktion $f(x) = e^{-\alpha|x|}$, wobei α reell und positiv ist.

Lösung 3(a)

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx\, e^{-ikx} f(x) \quad , \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk\, e^{+ikx} \tilde{f}(k).$$

Lösung 3(b)

$$\begin{aligned}\tilde{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx\, e^{-ikx} e^{-\alpha|x|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big(\int_{-\infty}^{0} dx\, e^{(-ik+\alpha)x} + \int_{0}^{+\infty} dx\, e^{(-ik-\alpha)x} \Big) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big(\frac{1}{-ik+\alpha} e^{(-ik+\alpha)x} \Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{-ik-\alpha} e^{(-ik-\alpha)x} \Big|_{0}^{+\infty} \Big) = \frac{\sqrt{2}\alpha}{\sqrt{\pi}(k^2+\alpha^2)}.\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (3+4+5+2 = 14 Punkte)

Betrachte eine Membran (eine um eine Raumdimension erweiterte Verallgemeinerung der in der Vorlesung besprochenen "schwingenden Saite"), die räumlich durch x und y parametrisiert wird und deren Auslenkungen und Schwingungen durch $z(t, x, y)$ beschrieben werden.

(a) Die Langrange-Dichte der Membran ist

$$\mathcal{L} = \frac{\rho}{2} \Big(\frac{\partial z(t,x,y)}{\partial t} \Big)^2 - \frac{\kappa}{2} \Big(\Big(\frac{\partial z(t,x,y)}{\partial x} \Big)^2 + \Big(\frac{\partial z(t,x,y)}{\partial y} \Big)^2 \Big)$$

($\rho > 0$, $\kappa > 0$). Wie lautet die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung? (Angabe der Differentialgleichung reicht aus, Variationsrechnung ist nicht erforderlich oder erwünscht.) Bestimme damit die zugehörige Bewegungsgleichung.

(b) Reduziere die in (a) erhaltene partielle Differentialgleichung mit dem Separationsansatz $z(t, x, y) = T(t)X(x)Y(y)$ auf ein System dreier gewöhnlicher Differentialgleichungen für die Funktionen $T(t)$, $X(x)$ und $Y(y)$.

(c) Die Membran sei in einen quadratischen Rahmen mit Kantenlänge L eingespannt, das heißt $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq L$ und es gelten die Dirichlet-Randbedingungen $z(t,x,0) = z(t,x,L) = z(t,0,y) = z(t,L,y) = 0$. Bestimme einen vollständigen Satz linear unabhängiger Lösungen der Bewegungsgleichung aus (a), die die gegebenen Randbedingungen erfüllen.

(d) Gib unter Verwendung Deiner Ergebnisse aus (c) die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung aus (a) an, die die gegebenen Randbedingungen aus (c) erfüllt.

Lösung 4(a)

Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_t z} + \partial_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_x z} + \partial_y \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_y z} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \quad = \quad 0.$$

Bewegungsgleichung:

$$\partial_t^2 z(t,x,y) - v^2 \partial_x^2 z(t,x,y) - v^2 \partial_y^2 z(t,x,y) \quad = \quad 0 \tag{2}$$

mit $v = \sqrt{\kappa/\rho}$ (die Wellengleichung).

Lösung 4(b)

Einsetzen von $z(t,y,y) = T(t)X(x)Y(y)$ in Gl. (2) und Division durch $T(t)X(x)Y(y)$:

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} - v^2 \frac{X''(x)}{X(x)} - v^2 \frac{Y''(y)}{Y(y)} \quad = \quad 0,$$

wobei $'$ die Ableitung nach dem jeweils räumlichen Argument x oder y bezeichnet. Die drei Terme auf der linken Seite müssen jeweils konstant sein und sich zu 0 addieren. Damit

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} \quad = \quad -\omega^2 \quad , \quad \frac{X''(x)}{X(x)} \quad = \quad -k_x^2 \quad , \quad \frac{Y''(y)}{Y(y)} \quad = \quad -k_y^2 \tag{3}$$

mit Konstanten ω, k_x und k_y, die $\omega^2 = v^2(k_x^2 + k_y^2)$ erfüllen.

Lösung 4(c)

Die drei Gleichungen (3) haben jeweils die Form der Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators. Lösungen sind daher bekannt (Sinus und Kosinus).

Beginne mit x-Gleichung und y-Gleichung: Die gegebenen Randbedingungen erlauben nur Sinus mit ausgezeichneten Frequenzen,

$$X(x) = \sin(k_x x) \quad , \quad Y(y) = \sin(k_y y) \tag{4}$$

mit $k_x = \pi n_x / L$, $n_x = 1, 2, 3, \ldots$ und $k_y = \pi n_y / L$, $n_y = 1, 2, 3, \ldots$

Lösungen der t-Gleichungen:

$$T(t) = \sin(\omega t) \quad \text{und} \quad T(t) = \cos(\omega t) \tag{5}$$

mit $\omega = v\sqrt{k_x^2 + k_y^2} = (\pi v/L)\sqrt{n_x^2 + n_y^2}$.

Der gesuchte vollständige Satz linear unabhängiger Lösungen ergibt sich durch Kombination von Gl. (4) und Gl. (5) gemäß $z(t, y, y) = T(t)X(x)Y(y)$, wobei für $T(t)$ sowohl sin als auch cos und für $n_x = 1, 2, 3, \ldots$ und $n_y = 1, 2, 3, \ldots$ gewählt werden kann.

Lösung 4(d)

Allgemeine Lösung:

$$z(t, x, y) = \sum_{n_x > 0} \sum_{n_y > 0} \Big(A_{n_x, n_y} \sin(\omega t) + B_{n_x, n_y} \cos(\omega t) \Big) \sin(k_x x) \sin(k_y y)$$

mit beliebig wählbaren Koeffizienten A_{n_x, n_y} und B_{n_x, n_y}.

Aufgabe 5 (3+4+3+5 = 15 Punkte)

Betrachte im Inertialsystem Σ einen ruhenden, geraden, unendlich langen und unendlich dünnen Draht, der homogen geladen ist (Linienladungsdichte λ), in dem kein Strom fließt und der auf der z-Achse verläuft.

(a) Berechne das zugehörige elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und ein entsprechendes Viererpotential $A^\mu(x)$ im Inertialsystem Σ (das Argument x von A^μ bezeichnet einen Raumzeitvektor, also $x \equiv x^\mu = (ct, x, y, z)$).

(b) Das Inertialsystem Σ' sei achsenparallel zu Σ ausgerichtet und bewege sich in Σ in z-Richtung mit Geschwindigkeit $v = \beta c$. Gib die Boost-Matrix an, die Σ und Σ' verbindet und berechne damit das Viererpotential $A'^\mu(x')$ im Inertialsystem Σ'.

(c) Berechne, ausgehend von $A'^{\mu}(x')$ aus (b), das zugehörige magnetische Feld $\mathbf{B}'(\mathbf{r}', t')$ im Inertialsystem Σ'.

(d) Verifiziere Dein Ergebnis aus (c), indem Du zunächst die Stromdichte $\mathbf{j}'(\mathbf{r}', t')$ im Inertialsystem Σ' bestimmst und damit und mit Hilfe des Ampereschen Gesetzes erneut $\mathbf{B}'(\mathbf{r}', t')$.

Lösung 5(a)

Elektrisches Feld mit Gaußschem Gesetz. Aus Symmetriegründen $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_r(r)\mathbf{e}_r$ mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Gaußsches Gesetz liefert

$$\begin{aligned} \oint_{\text{Zylinder}} d\mathbf{A}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= 2\pi r h E_r(r) = 4\pi q_{\text{innen}} = 4\pi\lambda h \\ \rightarrow \quad E_r(r) &= \frac{2\lambda}{r}, \end{aligned}$$

wobei ein Zylinder mit Radius r und Höhe h betrachtet wurde.

Zugehöriges elektrostatisches Potential ergibt sich aus $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r})$. Damit $\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(r) = -2\lambda \ln(r/r_0)$ mit beliebig wählbarer Konstante r_0 (siehe auch Musterlösung der 1. Klausur vom 01.03.2019).

$A^{\mu}(x) = (\Phi(r), 0, 0, 0)$.

Lösung 5(b)

Lorentz-Transformation:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}.$$

Die gesuchte Boost-Matrix ist

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

mit $\beta = v/c$ und $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$.
Damit ergibt sich

$$A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu} = \gamma\Phi(r)(1, 0, 0, -\beta) = \gamma\Phi(r')(1, 0, 0, -\beta)$$

(im letzten Schritt wurde $x' = x$ und $y' = y$ verwendet).

Lösung 5(c)

Komponenten des magnetischen Feldes via $B_j = -(1/2)\epsilon_{jkl}F^{kl}$:

$$\begin{aligned}
B'_x &= -\partial'^2 A'^3 + \partial'^3 A'^2 &&= +\partial'_2 A'^3 &&= -\gamma\beta\partial'_2\Phi(r') &&= +2\gamma\beta\lambda\frac{y'}{r'^2} \\
B'_y &= -\partial'^3 A'^1 + \partial'^1 A'^3 &&= -\partial'_1 A'^3 &&= +\gamma\beta\partial'_1\Phi(r') &&= -2\gamma\beta\lambda\frac{x'}{r'^2} \\
B'_z &= -\partial'^1 A'^2 + \partial'^2 A'^1 &&= 0,
\end{aligned}$$

also

$$\mathbf{B}'(\mathbf{r}', t') = \frac{2\gamma\beta\lambda}{r'^2}\begin{pmatrix} +y' \\ -x' \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{2\gamma\beta\lambda}{r'}\mathbf{e}_{\varphi'}$$

mit $\mathbf{e}_{\varphi'} = (-y', +x', 0)/r'$.

Lösung 5(d)

Viererstromdichte in Σ: $j^\mu = (\rho c, \mathbf{j}) = (\lambda c\delta(x)\delta(y), 0, 0, 0)$.
Viererstromdichte in Σ' über Boost:

$$j'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu j^\nu = \gamma\lambda c\delta(x)\delta(y)(1, 0, 0, -\beta) = \gamma\lambda c\delta(x')\delta(y')(1, 0, 0, -\beta).$$

Stromdichte in Σ': $\mathbf{j}'(\mathbf{r}', t') = -\gamma\beta\lambda c\delta(x')\delta(y')\mathbf{e}_z$.
Aus Symmetriegründen $\mathbf{B}'(\mathbf{r}') = B'_\varphi(r')\mathbf{e}_{\varphi'}$. Amperesches Gesetz liefert

$$\begin{aligned}
\oint_{\text{Kreis}} d\mathbf{r}'\,\mathbf{B}'(\mathbf{r}') &= 2\pi r' B'_\varphi(r') = \frac{4\pi}{c}\int_{\text{Kreisfläche}} d\mathbf{n}\,\mathbf{j}'(\mathbf{r}') = -4\pi\gamma\beta\lambda \\
\rightarrow \quad B'_\varphi(r') &= -\frac{2\gamma\beta\lambda}{r'},
\end{aligned}$$

wobei über einen Kreis mit Radius r integriert wurde. Ergebnis identisch zu dem aus Teilaufgabe (c), wie zu erwarten war.