Marc Wagner
ITP, Universität Frankfurt - WS 2018/2019

Organisation der Übungen: **Jonas Scheunert** **Raum 02.104** **scheunert@th.physik.uni-frankfurt.de**

Blatt 2

vom 26.10.2018, Abgabe am 02.11.2018 in der Vorlesung,
Besprechung in den Übungen in der Woche vom 05.10.2018 bis 09.11.2018

5) Maßsysteme *(1+1+1=3 Punkte)*

Beim Aufstellen des Coulomb-Gesetzes wurde in der Vorlesung die Konstante α eingeführt.

i. Zeigen Sie, dass falls α dimensionslos ist, d.h. $[\alpha] = 1$, die elektrische Ladung die Einheit

$$[q] = \mathrm{g}^{1/2}\mathrm{m}^{3/2}/\mathrm{s} \tag{1}$$

haben muss.

ii. Angenommen α hat den Wert $\alpha = 10^{-7}c^2\,\mathrm{N/A^2}$, wobei c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet. Weisen Sie nach, dass in diesem Fall $[q] = \mathrm{As}$.

iii. Im Gauß-System hat die Elementarladung den Wert $e \approx 4{,}80 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{esu}$. Konvertieren Sie diese Größe in das SI-System und geben Sie damit e in Coulomb an (per Definition gilt $1\,\mathrm{C} = 1\,\mathrm{As}$).

6) Anordnungen von Ladungen *(2+2+3=7 Punkte)*

Die vier Ladungen q_1, q_2, q_3 und q_4 befinden sich an den Positionen

$$\mathbf{r}_1 = (-a/2, a/2, 0), \tag{2}$$
$$\mathbf{r}_2 = (a/2, a/2, 0), \tag{3}$$
$$\mathbf{r}_3 = (a/2, -a/2, 0), \tag{4}$$
$$\mathbf{r}_4 = (-a/2, -a/2, 0), \tag{5}$$

wobei a eine positive Konstante ist.

i. Illustrieren Sie die Ladungsverteilung und berechnen Sie das E-Feld bei $\mathbf{r} = (0, 0, z)$ für den Fall, dass $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = e$.

ii. Die Ladung q_4 wird nun entfernt, berechnen Sie das E-Feld erneut an der gleichen Stelle für den Fall, dass die restlichen Ladungen die selbe Ladung wie im vorherigen Aufgabenteil haben.

Nun untersuchen wir noch folgenden Ladungsverteilung: man hat unendlich viele Ladungen q_i, $i \in \mathbb{N}_{>0}$, die sich an den Positionen

$$\mathbf{r}_i = (i \cdot a, 0, 0), \quad i \in \mathbb{N}_{>0}, \tag{6}$$

befinden.

iii. Berechnen Sie das E-Feld bei $\mathbf{r} = (0, 0, 0)$ unter der Annahme dass $q_i = e\,\forall i \in \mathbb{N}_{>0}$. Welches Problem tritt auf, wenn Sie das Potential ϕ an der selben Stelle berechnen wollen?

7) $\mathbf{E} \perp$ Äquipotentialfläche *(4 Punkte)*

Es sei ein beliebiges Elektrostatisches Potential ϕ gegeben. Die Abbildung

$$\mathbf{A} : \Omega \to \mathbb{R}^3 \tag{7}$$

mit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, parametrisiere eine Fläche die

$$\phi(\mathbf{A}(u, v)) = \text{const.} \tag{8}$$

für alle $(u, v) \in \Omega$ erfüllt. Zeigen Sie, dass das zu ϕ gehörige E-Feld senkrecht auf der Fläche $\mathbf{A}$ steht, d. h. dass die Tangentialvektoren von $\mathbf{A}$ orthogonal zu $\mathbf{E}$ sind.

8) Rechnen mit ∇ *(2+2+2=6 Punkte)*

Das Levi-Civita-Symbol ϵ_{ijk} ist folgendermaßen definiert:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } (ijk) \text{ eine gerade Permutation von (123) ist,} \\ -1, & \text{wenn } (ijk) \text{ eine ungerade Permutation von (123) ist,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{9}$$

i. Zeigen Sie

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}, \tag{10}$$

und folgern Sie unter beachtung der Einsteinschen Summenkonvention

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{kmn} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}. \tag{11}$$

ii. Zeigen Sie für ein Vektorfeld $\mathbf{A}$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \triangle\mathbf{A} \tag{12}$$

iii. Wie lautet der Gradient $\nabla\phi$ für ein skalares Feld ϕ in Kugelkoordinaten?