

Blatt 4

vom 09.11.2018, Abgabe am 16.11.2018 in der Vorlesung,
Besprechung in den Übungen in der Woche vom 19.11.2018 bis 23.11.2018

13) Knick \leftrightarrow Sprung \leftrightarrow δ -Funktion (1+2+2=5 Punkte)

Man kann den Ableitungsbegriff auf Funktionen wie z.B. die Heaviside-Funktion

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{falls } x = 0, \\ 1, & \text{falls } x > 0, \end{cases} \quad (1)$$

erweitern, in dem man fordert, dass die Ableitung Θ'

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \Theta'(x)\varphi(x) = - \int_{-\infty}^{\infty} dx \Theta(x)\varphi'(x) \quad (2)$$

für alle glatte Funktionen φ mit kompaktem Träger¹ erfüllt.

- i. Zeigen Sie, dass falls φ wie oben gewählt wird und f differenzierbar ist,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f'(x)\varphi(x) = - \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\varphi'(x). \quad (3)$$

Dies kann als Motivation für obige Definition verstanden werden.

- ii. Zeigen Sie im Rahmen des erweiterten Ableitungsbegriffs für die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0, \\ x, & \text{falls } x \geq 0, \end{cases} \quad (4)$$

dass $f' = \Theta$.

- iii. Weisen Sie nun noch nach, dass $\Theta' = \delta$.

14) Homogen geladener Zylinder (4+1=5 Punkte)

Gegeben ist ein unendlich langer, homogen geladener Zylinder (Ladungsdichte ρ) mit Radius R .

- i. Berechne E-Feld beziehungsweise elektrostatisches Potential auf zwei der drei in der Vorlesung diskutierten Wegen:

(A) Mit dem Gaußschen Gesetz.

(B) Durch Lösen der Poisson-Gleichung.

¹Das heißt bis auf eine kompakte Untermenge des \mathbb{R} gilt $\varphi(x) = 0$

- ii. Formuliere einen Integralausdruck für das elektrostatische Potential ähnlich wie in Aufgabe 10. Begründe, warum sich das Integral nicht auf so einfachem Wege berechnen lässt wie im Falle einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung (beschreibe nur die Schwierigkeiten, das Integral muss nicht vollständig gelöst werden).

15) Geladene Platten (2+3=5 Punkte)

- i. Gegeben ist eine unendlich ausgedehnte, homogen geladene Platte (Flächenladungsdichte σ). Berechne das E-Feld und das elektrostatische Potential.
- ii. Betrachte nun drei unendlich ausgedehnte, homogen geladene, parallele Platten (Flächenladungsdichten σ_j , $j = 1, 2, 3$) mit Abständen d_{12} zwischen Platte 1 und Platte 2 und d_{23} zwischen Platte 2 und Platte 3. Berechne das E-Feld und das elektrostatische Potential.

16) Kugelkondensator (3+2=5 Punkte)

Betrachte einen Kugelkondensator, der aus zwei konzentrischen Kugelschalen aus Metall, Radien R_1 und $R_2 > R_1$, besteht. Das elektrostatische Potential auf den Metallkugeln ist $\Phi_1 = \text{const}$ bzw. $\Phi_2 = \text{const}$.

- i. Löse das Randwertproblem zwischen den beiden Kugeln, d.h. für $R_1 < r < R_2$. Gib sowohl Φ als auch \mathbf{E} an.
- ii. Berechne die auf den Metalloberflächen influenzierte Ladungsdichten und Ladungen sowie die Kapazität des Kugelkondensators.

Unter <http://www.falstad.com/emstatic/index.html> findet sich eine Java-Anwendung zur Visualisierung von physikalischen Konzepten. U.a. kann man sich die Felder und Potentiale aus dieser Aufgabe anzeigen lassen.