Organisation der Übungen: Jonas Scheunert Raum 02.104 scheunert@th.physik.uni-frankfurt.de

Blatt 7

vom 30.11.2018, Abgabe am 07.12.2018 in der Vorlesung,
Besprechung in den Übungen in der Woche vom 10.12.2018 bis 14.12.2018

25) Polynome als Basisfunktionen *(2+2+2=6 Punkte)*

Betrachte die Monome

$$x^0 \quad , \quad x^1 \quad , \quad x^2 \quad , \quad x^3$$

im Definitionsbereich $x \in [-1, +1]$, die eine Basis der Polynome vom Grad 3 bilden.

i. Formuliere das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren für Funktionen und benutze es, um eine zu obigen Monomen äquivalente Orthonormalbasis $g^{(n)}(x)$, $n = 0, 1, 2, 3$, zu konstruieren.

ii. Stelle die Funktionen

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 \\ f^{(2)}(x) &= \cos(\pi x) \end{aligned}$$

optimal durch die Basisfunktionen $g^{(n)}(x)$, $n = 0, 1, 2, 3$ dar, d. h. berechne die Koeffizienten $A_n^{(m)}$ der Darstellung

$$f^{(m)}(x) \quad = \quad \sum_n A_n^{(m)} g^{(n)}(x) \quad , \quad A_n^{(m)} \quad = \quad (g^{(n)}, f^{(m)}) \quad = \quad \int_a^b dx\, (g^{(n)}(x))^* f^{(m)}(x).$$

Plotte Deine Ergebnisse und vergleiche beide $f^{(m)}(x)$ mit ihrer optimalen Darstellung durch die vier Basisfunktionen $g^{(n)}(x)$, $n = 0, 1, 2, 3$.

iii. Berechne die Taylor-Näherungen der beiden $f^{(m)}(x)$ um den Entwicklungspunkt $x = 0$ bis einschließlich 3. Ordnung. Vergleiche mit der Darstellung durch Basisfunktionen aus Punkt ii (fertige erneut Plots an) und diskutiere Deine Ergebnisse unter Betrachtung von globalen und lokalen Gesichtspunkten.

26) Kugelflächenfunktionen und Randwertprobleme *(2+3+5=10 Punkte)*

i. Gib die Kugelflächenfunktionen $Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$ für $l = 0, 1, 2$, $m = -l, \ldots, +l$ sowohl in kartesischen wie auch in Kugelkoordinaten an. Skizziere diese neun Funktionen in geeigneter Weise.

ii. Weise nach, dass die Kugelflächenfunktionen orthogonal bezüglich des Skalarprodukts

$$(f, g) = \int_{S^2} \mathrm{d}\Omega\, f^*(\vartheta, \varphi) g(\vartheta, \varphi) \tag{1}$$

sind. Gehe dabei folgendermaßen vor:

(a) Die von den zugeordneten Legendrepolynomen erfüllte Differentialgleichung kann geschrieben werden als

$$\mathrm{D}_{\mathrm{op}} P_l^m = -l(l+1) P_l^m \quad \text{mit} \quad \mathrm{D}_{\mathrm{op}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) - \frac{m^2}{1-x^2}. \tag{2}$$

Nutze diese Identität, um

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, P_l^m(x) P_{l'}^m(x) = 0 \quad \text{für} \quad l \neq l' \tag{3}$$

zu zeigen.

(b) Zeige nun noch, dass

$$(Y_{l,m}, Y_{l',m'}) = 0 \quad \text{für} \quad m \neq m' \tag{4}$$

und schließe mit Punkt (a) auf die Orthogonalität der Kugelflächenfunktionen.

iii. Betrachte nun die beiden folgenden elektrostatischen Randwertprobleme in 3 Raumdimensionen:

(RWP1) Das Volumen $\mathcal{V}$, das keine Ladungen enthält, ist eine im Ursprung zentrierte Kugel mit Radius R.
Dirichlet-Randbedingungen $\Phi(r=R,\vartheta,\varphi) = \Phi_0(\vartheta,\varphi) = \alpha x(r=R,\vartheta,\varphi)$ ($\alpha = \text{const}$).

(RWP2) Das Volumen $\mathcal{V}$, das keine Ladungen enthält, ist eine im Ursprung zentrierte Kugelschale, innerer Radius R_1, äußerer Radius R_2.
Dirichlet-Randbedingungen $\Phi(r=R_1,\vartheta,\varphi) = \Phi_1(\vartheta,\varphi) = \beta$ und $\Phi(r=R_2,\vartheta,\varphi) = \Phi_2(\vartheta,\varphi) = \gamma z^2(r=R_2,\vartheta,\varphi)$ ($\beta = \text{const}$, $\gamma = \text{const}$).

Berechne für beide Randwertprobleme das elektrostatische Potential innerhalb von $\mathcal{V}$.

27) Multipolmomente und Multipolentwicklung *(2+2=4 Punkte)*

i. Betrachte vier Ladungen $q_1 = q_2 = +q$ und $q_3 = q_4 = -q$ mit Positionen $\mathbf{r}_1 = (-d/2, -d/2, 0)$, $\mathbf{r}_2 = (+d/2, +d/2, 0)$, $\mathbf{r}_3 = (+d/2, -d/2, 0)$ und $\mathbf{r}_4 = (-d/2, +d/2, 0)$.

- Zeige, dass Gesamtladung und Dipolmoment verschwinden.
- Berechne die Komponenten Q_{jk} des Quadrupolmomenttensors.
- Einen Punktquadrupol erhält man, indem man den Grenzwert $d \to 0$ so bildet, dass Q_{jk} konstant bleibt. Wie muss man dabei q verändern, um einen solchen Punktquadrupol zu erhalten.

ii. Betrachte einen Zylinder (Radius R, Länge L), dessen obere Hälfte homogen positiv geladen ist (Ladungsdichte $+\rho_0$) und dessen untere Hälfte negativ geladen ist (Ladungsdichte $-\rho_0$).

- Berechne das Dipolmoment $\mathbf{p}$.
- Eine Ladung q bewegt sich in großem Abstand $d \gg R, L$ vom Zylinder. Berechne die Kraft, die aufgrund des geladenen Zylinders auf die Ladung wirkt, in führender nicht-verschwindender Ordnung in $1/d$.