Theoretische Physik 3 - Klassische Elektrodynamik

Wintersemester 2020/2021 – Prof. Marc Wagner

Martin Pflaumer: pflaumer@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 4

vom 20.11.20, Abgabe am 27.11.20, Besprechung in der Woche vom 30.11.20

Aufgabe 1 [*"Beweis" des Satzes von Stokes*] (Präsenzaufgabe 0 Pkt.)

Beweise analog zum "Beweis" des Satzes von Gauß aus der Vorlesung den Satz von Stokes für den Spezialfall, dass die Fläche in der x-y-Ebene liegt, d. h. eben ist.

Aufgabe 2 [*Elektrostatisches Potential und E-Feld einer homogen geladenen Kugel*] (5+2=7 Pkt.)

1. Berechne das elektrostatische Potential einer homogen geladenen Kugel (Zentrum im Ursprung, Radius R, Gesamtladung q) durch Lösen des in der Vorlesung diskutierten Integrals

$$\Phi(\vec{r}) = \int \mathrm{d}^3 r' \, \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \tag{1}$$

   Fertige eine Skizze des Ergebnisses an.
   Hinweis: Die Verwendung von Kugelkoordinaten ist zweckmäßig.

2. Berechne, ausgehend von $\Phi(\vec{r})$ aus Teilaufgabe (a), das E-Feld der homogen geladenen Kugel. Illustriere auch hier wieder dein Ergebnis.

Aufgabe 3 [*Anwendung des Satzes von Gauß*] (2+6=8 Pkt.)

1. Formuliere den Satz von Gauß in einer Dimension. Um welche dir seit der Schulzeit bekannte Beziehung handelt es sich?

2. Berechne das Integral

$$\int_V \mathrm{d}^3 \vec{r} \, \nabla \vec{f}(\vec{r}), \quad \vec{f}(\vec{r}) = \vec{r} \tag{2}$$

   (V ist ein Torus mit Hauptradius R und Nebenradius r ($r < R$), dessen Symmetrieachse der z-Achse entspricht) auf zwei unterschiedlichen Wegen,

   - durch Lösen des Volumenintegrals,
   - durch Anwendung des Satzes von Gauß und Lösen des Oberflächeninegrals,

   und verfiziere die Gültigkeit des Satzes von Gauß anhand dieses Beispiels.

Aufgabe 4 [*Knick ↔ Sprung ↔ δ-Funktion*] `(1+2+2=5 Pkt.)`

Man kann den Ableitungsbegriff auf Funktionen wie z.B. die Heaviside-Funktion

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{falls } x = 0, \\ 1, & \text{falls } x > 0, \end{cases} \tag{3}$$

erweitern, indem man fordert, dass die Ableitung Θ'

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \Theta'(x)\varphi(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \Theta(x)\varphi'(x) \tag{4}$$

für alle glatte Funktionen φ mit kompaktem Träger[1] erfüllt.

1. Zeige, dass falls φ wie oben gewählt wird und f differenzierbar ist,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, f'(x)\varphi(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, f(x)\varphi'(x). \tag{5}$$

   Dies kann als Motivation für obige Definition verstanden werden.

2. Zeige im Rahmen des erweiterten Ableitungsbegriffs für die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0, \\ x, & \text{falls } x \geq 0, \end{cases} \tag{6}$$

   dass $f' = \Theta$.

3. Weise nun noch nach, dass $\Theta' = \delta$.

[1] Das heißt bis auf eine kompakte Untermenge des $\mathbb{R}$ gilt $\varphi(x) = 0$