Theoretische Physik 3 - Klassische Elektrodynamik

Wintersemester 2020/2021 – Prof. Marc Wagner

Martin Pflaumer: pflaumer@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 7

vom 11.12.20, Abgabe am 18.12.20, Besprechung in der Woche vom 11.01.21

Aufgabe 1 [*Orthonormalität und Vollständigkeit komplexer Exponentialfunktionen*] (Präsenzaufgabe 0 Pkt.)

Betrachte das Funktionensystem

$$g^{(n)}(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{+2\pi i n x/L},$$

Definitionsbereich $x \in [0, L]$, $n \in \mathbb{Z}$.

1. Zeige, dass es sich um ein orthonormales Funktionensystem handelt.
2. Mache plausibel, dass das Funktionensystem vollständig ist. Gehe dabei wie folgt vor:
   (a) Betrachte zunächst die Vektoren
   $$g_j^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{+2\pi i n j/N},$$
   $j, n = 0, 1, \ldots N-1$ und zeige, dass
   $$\sum_{n=0}^{N-1} (g_j^{(n)})^* g_k^{(n)} = \frac{N}{L} \delta_{jk}$$
   gilt.
   (b) Ersetze $(j/N)L \to x$ und $(k/N)L \to y$, bilde den Limes $N \to \infty$ und schließe aus Deinen Ergebnissen auf die Vollständigkeit des Funktionensystems $g^{(n)}$.

Aufgabe 2 [*Polynome als Basisfunktionen*] (2+2+2=6 Pkt.)

Betrachte die Monome

$$x^0 \quad , \quad x^1 \quad , \quad x^2 \quad , \quad x^3$$

im Definitionsbereich $x \in [-1, +1]$, die eine Basis der Polynome vom Grad 3 bilden.

1. Formuliere das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren für Funktionen und benutze es, um eine zu obigen Monomen äquivalente Orthonormalbasis $g^{(n)}(x)$, $n = 0, 1, 2, 3$, zu konstruieren.

2. Stelle die Funktionen

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 \\ f^{(2)}(x) &= \cos(\pi x) \end{aligned}$$

optimal durch die Basisfunktionen $g^{(n)}(x)$, $n = 0, 1, 2, 3$ dar, d. h. berechne die Koeffizienten $A_n^{(m)}$ der Darstellung

$$\begin{aligned} f^{(m)}(x) &= \sum_n A_n^{(m)} g^{(n)}(x) \quad , \\ A_n^{(m)} &= (g^{(n)}, f^{(m)}) = \int_a^b dx\, (g^{(n)}(x))^* f^{(m)}(x). \end{aligned}$$

Plotte Deine Ergebnisse und vergleiche beide $f^{(m)}(x)$ mit ihrer optimalen Darstellung durch die vier Basisfunktionen $g^{(n)}(x)$, $n = 0, 1, 2, 3$.

3. Berechne die Taylor-Näherungen der beiden $f^{(m)}(x)$ um den Entwicklungspunkt $x = 0$ bis einschließlich 3. Ordnung. Vergleiche mit der Darstellung durch Basisfunktionen aus 2. (fertige erneut Plots an) und diskutiere Deine Ergebnisse unter Betrachtung von globalen und lokalen Gesichtspunkten.

Aufgabe 3 [*Kugelflächenfunktionen und Randwertprobleme*] `(2+3+5=10 Pkt.)`

1. Gib die Kugelflächenfunktionen $Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$ für $l = 0, 1, 2$, $m = -l, \ldots, +l$ sowohl in kartesischen wie auch in Kugelkoordinaten an. Skizziere diese neun Funktionen in geeigneter Weise.

2. Weise nach, dass die Kugelflächenfunktionen orthogonal bezüglich des Skalarprodukts

$$(f, g) = \int_{S^2} \mathrm{d}\Omega\, f^*(\vartheta, \varphi) g(\vartheta, \varphi) \tag{1}$$

sind. Gehe dabei folgendermaßen vor:

(a) Die von den zugeordneten Legendrepolynomen erfüllte Differentialgleichung kann geschrieben werden als

$$\mathrm{D_{op}} P_l^m = -l(l+1) P_l^m \quad \text{mit} \quad \mathrm{D_{op}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1 - x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) - \frac{m^2}{1 - x^2}. \tag{2}$$

Nutze diese Identität, um

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, P_l^m(x) P_{l'}^m(x) = 0 \quad \text{für} \quad l \neq l' \tag{3}$$

zu zeigen.

(b) Zeige nun noch, dass

$$(Y_{l,m}, Y_{l',m'}) = 0 \quad \text{für} \quad m \neq m' \tag{4}$$

und schließe mit (a) auf die Orthogonalität der Kugelflächenfunktionen.

3. Betrachte nun die beiden folgenden elektrostatischen Randwertprobleme in 3 Raumdimensionen:

(RWP1) Das Volumen $\mathcal{V}$, das keine Ladungen enthält, ist eine im Ursprung zentrierte Kugel mit Radius R.
Dirichlet-Randbedingungen $\Phi(r = R, \vartheta, \varphi) = \Phi_0(\vartheta, \varphi) = \alpha x(r = R, \vartheta, \varphi)$ ($\alpha = \text{const}$).

(RWP2) Das Volumen $\mathcal{V}$, das keine Ladungen enthält, ist eine im Ursprung zentrierte Kugelschale, innerer Radius R_1, äußerer Radius R_2.
Dirichlet-Randbedingungen $\Phi(r = R_1, \vartheta, \varphi) = \Phi_1(\vartheta, \varphi) = \beta$ und $\Phi(r = R_2, \vartheta, \varphi) = \Phi_2(\vartheta, \varphi) = \gamma z^2(r = R_2, \vartheta, \varphi)$ ($\beta = \text{const}$, $\gamma = \text{const}$).

Berechne für beide Randwertprobleme das elektrostatische Potential innerhalb von $\mathcal{V}$.

Aufgabe 4 [*Multipolmomente und Multipolentwicklung*] `(2+2=4 Pkt.)`

1. Betrachte vier Ladungen $q_1 = q_2 = +q$ und $q_3 = q_4 = -q$ mit Positionen $\mathbf{r}_1 = (-d/2, -d/2, 0)$, $\mathbf{r}_2 = (+d/2, +d/2, 0)$, $\mathbf{r}_3 = (+d/2, -d/2, 0)$ und $\mathbf{r}_4 = (-d/2, +d/2, 0)$.
   - Zeige, dass Gesamtladung und Dipolmoment verschwinden.
   - Berechne die Komponenten Q_{jk} des Quadrupolmomenttensors.
   - Einen Punktquadrupol erhält man, indem man den Grenzwert $d \to 0$ so bildet, dass Q_{jk} konstant bleibt. Wie muss man dabei q verändern, um einen solchen Punktquadrupol zu erhalten.
2. Betrachte einen Zylinder (Radius R, Länge L), dessen obere Hälfte homogen positiv geladen ist (Ladungsdichte $+\rho_0$) und dessen untere Hälfte negativ geladen ist (Ladungsdichte $-\rho_0$).
   - Berechne das Dipolmoment $\mathbf{p}$.
   - Eine Ladung q bewegt sich in großem Abstand $d \gg R, L$ vom Zylinder. Berechne die Kraft, die aufgrund des geladenen Zylinders auf die Ladung wirkt, in führender nicht-verschwindender Ordnung in $1/d$.