Theoretische Physik 3 - Klassische Elektrodynamik

Wintersemester 2020/2021 – Prof. Marc Wagner

Martin Pflaumer: pflaumer@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 8

vom 18.12.20, Abgabe am 15.01.21, Besprechung in der Woche vom 18.01.21

Aufgabe 1 [*Penning Falle (Fortsetzung)*] (3+1+4=8 Pkt.)

Ein Teilchen (Masse m, Ladung q) bewegt sich in einem homogenen und zeitlich konstanten magnetischen Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_0\mathbf{e}_z = \text{const}$.

1. Berechne die Trajektorie des Teilchens. Beschreibe die Form der Trajektorie in Worten sowie die Bedeutung jeder der sechs unbestimmten Konstanten. Skizziere die Trajektorie.

Betrachte nun eine Penning-Falle, die dem bereits in Teilaufgabe 1. untersuchten konstanten magnetischen Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_0\mathbf{e}_z = \text{const}$ und einem durch das Potential

$$\Phi(\mathbf{r}) \quad = \quad \frac{\Phi_0}{2d^2}\left(z^2 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}\right)$$

($\Phi_0 > 0$) festgelegten elektrischen Feld entspricht.

2. Berechne aus $\Phi(\mathbf{r})$ das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ und das zu $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ gehörige Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

3. Berechne die Trajektorie eines Teilchens (Masse m, Ladung $q > 0$) für starke magnetische Felder, $\left(\frac{qB}{2mc}\right)^2 > \frac{q\Phi_0}{2md^2}$. Beschreibe die Form der Trajektorie in Worten sowie die Bedeutung jeder der sechs unsbestimmten Konstanten. Skizziere die Trajektorie. Begründe, dass es sich bei der diskutierten elektromagnetischen Feldkonfiguration tatsächlich um eine Falle handelt, d.h. positiv geladene Teilchen in einem begrenzten Raumbereich eingesperrt werden.
Hinweis: Die zugehörigen Newtonschen Bewegungsgleichungen für die x- und die y-Komponente bilden ein System zweier linearer gekoppelter Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, zu dessen Lösung sich ein Exponentialansatz $(x(t), y(t)) = \mathbf{v}e^{i\omega t}$ anbietet[1].
Zwischenschritte für die Rechnung findet man auf
`https://th.physik.uni-frankfurt.de/~mwagner/talks/Geonium.pdf`.

Aufgabe 2 [*Lokalisierte Stromverteilung*] (3 Pkt.)

Die Stromverteilung $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ sei räumlich begrenzt. Zeige, dass bei stationärer Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$

$$\int d^3\mathbf{r}\,\mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0 \tag{1}$$

[1] Zwischenergebnis: Man findet $\omega_{1/2} = \pm\left(\frac{1}{2}\frac{qB_0}{mc} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{qB_0}{mc}\right)^2 - \frac{q\Phi_0}{2md^2}}\right)$.

gilt.
Hinweis: Mache dir zunächst klar, dass $\mathbf{j} = (\mathbf{j} \cdot \nabla)\mathbf{r}$.

Aufgabe 3 [*Strom durch kreisförmigen Draht*] `(4+5=9 Pkt.)`

Durch einen infinitesimal dünnen in der x-y-Ebene liegenden kreisförmig gebogenen Draht (Zentrum des Kreises im Ursprung, Kreisradius R) fließt der Strom I.

1. Bestimme die zugehörige Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ sowohl in kartesischen als auch in Zylinderkoordinaten. Teste jeweils Dein Ergebnis, indem Du eine Fläche definierst, die den kreisförmigen Draht an einer Stelle schneidet, und $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ über diese Fläche integrierst.

2. Berechne das durch den Kreisstrom erzeugte magnetische Feld auf der z-Achse, d.h. $\mathbf{B}(x = 0, y = 0, z)$. Führe die Rechnung auf zwei verschiedenen Wegen aus, zunächst ausgehend von einer geeigneten Parametrisierung des Drahtes $\mathbf{s}(\lambda)$ und
$$\mathrm{d}\mathbf{B}\left(\mathbf{r}\right) = \frac{I}{c}\,\mathrm{d}\mathbf{s} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}}{\left|\mathbf{r} - \mathbf{s}\right|^3}, \tag{2}$$
dann ausgehend von Deiner in Teilaufgabe 1. angegebenen Stromdichte und
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}'\,\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right|^3}. \tag{3}$$

Aufgabe 4 [*Vektorpotentiale, Eichsymmetrie und Eichtransformationen*] `(0 Präsenzaufgabe Pkt.)`

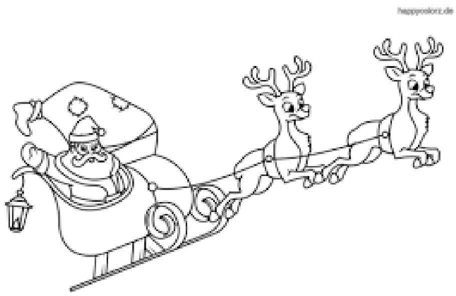
1. Zeige, dass die folgenden beiden Vektorpotentiale eichäquivalent sind, d.h. dem gleichen magnetischen Feld entsprechen. Gib eine Eichtransformation an, die die beiden Vektorpotentiale
$$\mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{r}) \;=\; \frac{\alpha\mathbf{r}}{\mathbf{r}^2 + \lambda^2} \quad , \quad \mathbf{A}^{(2)}(\mathbf{r}) \;=\; 0.$$
ineinander überführt.

2. Welches der beiden folgenden Felder
$$\mathbf{B}^{(1)}(\mathbf{r}) \;=\; \alpha f(x^2 + y^2 + z^2)\begin{pmatrix} +x \\ +y \\ +z \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{B}^{(2)}(\mathbf{r}) \;=\; \beta f(x^2 + y^2)\begin{pmatrix} -y \\ +x \\ 0 \end{pmatrix}.$$
ist kein zulässiges magnetisches Feld? Begründe Deine Antwort mit einer kurzen Rechnung.

3. Finde eine Eichtransformation, die das Vektorpotential

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad = \quad \begin{pmatrix} \alpha(\sin(x/R) + \cos(y/R)) \\ 0 \\ \beta z^2 \end{pmatrix}$$

in Coulomb-Eichung bringt und gib das eichtransformierte Vektorpotential an. Teste Deine Rechnung, indem Du in beiden Fällen das magnetische Feld berechnest.



https://www.pinterest.de/pin/703265298047350880/ bzw. happycolorz.de

Wir wünschen Euch Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!