Theoretische Physik 3 - Klassische Elektrodynamik

Wintersemester 2020/2021 – Prof. Marc Wagner

Martin Pflaumer: pflaumer@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 10

vom 22.01.21, Abgabe am 29.01.21, Besprechung in der Woche vom 01.02.21

Aufgabe 1 [*Untersuchung auf Eichinvarianz*] (2 Pkt.)

Zeige, dass die Ausdrücke

$$\mathcal{L}_1 = \#(\partial_\mu A^\mu)^2, \quad \mathcal{L}_2 = \#(\partial_\mu A^\nu)(\partial^\mu A_\nu), \quad \mathcal{L}_3 = \#(\partial_\mu A^\nu)(\partial_\nu A^\mu)$$

nicht eichinvariant sind und daher keine geeigneten Kandidaten für die Lagrange-Dichte der Elektrodynamik sind.

Aufgabe 2 [*Zusammenhang zwischen Feldstärketensor und den elektrischen und magnetischen Feldern*] (Präsenzaufgabe 0 Pkt.)

1. Drücke $F^{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu}$, $F^\mu{}_\nu$ und $F_\mu{}^\nu$ durch $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ aus.
2. Bestimme das Transformationsverhalten von $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ bei einem Boost in x-Richtung. Begründe, dass in einer relativistischen Theorie elektrische und magnetische Phänomene nicht losgelöst voneinander betrachtet werden können, d. h. dass z. B. eine relativistische Version der Elektrostatik keinen Sinn macht.
   Hinweis: Verwende die Definition des Feldstärketensors $F^{\mu\nu}$.

Aufgabe 3 [*Rechenübungen zu oberen und unteren Indizes*] (2+4+2=8 Pkt.)

Die Euler-Lagrange-Gleichungen der Elektrodynamik lauten

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0.$$

1. Begründe, dass sich $\partial\mathcal{L}/\partial(\partial_\mu A_\nu)$ bezüglich μ unter Lorentz-Transformationen kontravariant verhält, d.h. wie eine Größe mit einem oberen Index μ (ein strenger mathematischer Beweis ist nicht notwendig).
2. Führe die in der Vorlesung gezeigte Nebenrechnung

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu}$$

   detailliert mit zahlreichen Zwischenschritten aus. Führe insbesondere die Ableitungen auf die offensichtlich gültige Regel $(\partial/\partial(\partial_\mu A_\nu))\partial_\rho A_\sigma = \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma}$ zurück, indem Du die Produktregel verwendest und gegebenenfalls auftretende obere Indizes mit der Minkowski-Metrik nach unten ziehst.

Wären Photonen massiv, müsste man $\mathcal{L}$ um den Term

$$\mathcal{L}_{\text{Proca}} = \frac{m^2c^2}{8\pi\hbar^2} A_\mu A^\mu$$

ergänzen.

3. Wie lauten die Feldgleichungen, wenn man diesen Term ergänzt? Liegt weiterhin Eichinvarianz vor?

Aufgabe 4 [*Allgemeine Fragen*] `(10 Pkt. + 10 Bonus Pkt.)`

In dieser Aufgabe kannst Du Bonuspunkte sammeln, d. h. 10 Punkte dieser Aufgabe gehen nicht in die Gesamtpunktzahl der Punkte aller Aufgaben dieses Semesters ein. Außerdem kannst Du Deinen aktuellen Wissensstand im Hinblick auf die Klausur testen: Alle 20 Teilaufgaben sollten Dir leicht fallen und in jeweils 2 bis 5 Minuten zu beantworten sein.

1. Wie lautet der Satz von Gauß?
   Wie lautet der Satz von Stokes?

2. B-Felder werden in der Magnetostatik durch $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ und $\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$ festgelegt. Was ist die äquivalente Gleichung für $\mathbf{A}$? Warum braucht man hier nur eine Gleichung statt zwei?

3. Welche Eigenschaften charakterisieren ein vollständiges Orthonormalsystem?

4. Berechne das in der Vorlesung definierte Skalarprodukt für Funktionen (f, g) mit $f(x) = e^x$ und $g(x) = x$ im Intervall $(-1, 1)$.
   Gib zwei orthonormale Funktionen an, die den gleichen Funktionenraum wie f und g aufspannen.

5. Gib einen Integralausdruck für das Skalarprodukt zweier auf der Einheitskugel definierten Funktionen $f(\vartheta, \varphi)$ und $g(\vartheta, \varphi)$ an.

6. Wie lautet eine Eichtransformation des magnetostatischen Potentials $\mathbf{A}(\mathbf{r})$? Sind $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$ und $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \alpha\mathbf{r}$ eichäquivalent?

7. Wie lauten die Beziehungen zwischen $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ und ϕ, $\mathbf{A}$?

8. Erläutere, mit welchen Schritten die allgemeine Lösung der Poisson-Gleichung mit gegebenen Randbedingungen:

   $$\triangle\phi = -4\pi\rho \text{ und } \phi(\mathbf{r}) = \phi_0(\mathbf{r}) \text{ für } \mathbf{r} \in R, \tag{1}$$

   auf die Lösung der Laplace-Gleichung zurückgeführt werden kann. Gib das entsprechende Randwertproblem an.

9. Wie kann man einen unteren Index, z. B. in x_μ, nach oben ziehen?

10. Welche Eigenschaft muss $\Lambda^\mu{}_\nu$ erfüllen, damit es sich um eine Lorentz-Transformation handelt?

11. Berechne $\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\alpha}\eta^{\alpha}{}_{\mu}$.
Wie lautet $F^{\mu\nu}$ in einem Inertialsystem Σ', welches mit Σ durch die Lorentztransformation $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ verbunden ist?

12. Gib einen Boost in y-Richtung mit Geschwindigkeit v an.
Gib eine Rotation um die x-Achse um den Winkel α an.

13. Berechne das elektrische Feld in 2-dimensionaler Elektrostatik für eine homogen geladene Kreisscheibe. Verwende dafür den Satz von Gauß.

14. Berechne das zu $\mathbf{E}$ aus Aufgabe 13 gehörige ϕ.

15. Gegeben ist die Ebene $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = d$. Gib die Stromdichte $\mathbf{j}$ eines homogenen Stromes an, der Teilchen beschreibt, die sich senkrecht durch die Ebene bewegen. Dabei sollen j Teilchen pro Fläche pro Zeit durch die Ebene strömen.

16. Wie lautet die Kontinuitätsgleichung?
Welche wichtige, sehr einfache Beziehung ergibt sich für die Magnetostatik?

17. Wie lautet der Beitrag eines infinitesimalen, stromdurchflossenen Drahtstückes zum magnetischen Feld $\mathbf{B}$?

18. Wie lautet das zu Aufgabe 17 entsprechende Gesetz für eine Stromdichte $\mathbf{j}$ und ein Volumenelement $\mathrm{d}^3\mathbf{r}$.

19. Wie lauten Dirichlet-Randbedingungen für die in der Vorlesung diskutierten Federkette im Kontinuumslimes? Wie lauten Neumann-Randbedingungen für dieses Problem?

20. Wie lauten die Euler-Lagrange-Gleichungen für eine Lagrange-Dichte $\mathcal{L}(z, \dot{z}, z')$ mit $z = z(x, t)$?