Theoretische Physik 3 - Klassische Elektrodynamik

Wintersemester 2020/2021 – Prof. Marc Wagner

Martin Pflaumer: pflaumer@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 11

vom 29.01.21, Abgabe am 05.02.21, Besprechung in der Woche vom 08.02.21

Aufgabe 1 [*Parität*] (1+1+1+1+1=5 Pkt.)

Untersuche das Transformationsverhalten von elektrischen und magnetischen Feldern und Potentialen unter Raumspiegelung $\mathbf{r} \to_P \mathbf{r}' = -\mathbf{r}$, d.h. unter Parität P.

1. Wie verhält sich das magnetische Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ unter Parität?
   Hinweis: Betrachte geeignete, d.h. einfache Ströme, z.B. einen geraden stromdurchflossenen Draht.

2. Wie verhält sich das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ unter Parität?
   Hinweis: Betrachte eine geeignete, d.h. einfache Ladungsverteilung, z.B. eine Punktladung.

3. Wie verhält sich ∂_μ unter Parität?

4. Schließe aus Deinen Ergebnissen aus 1 und 3 auf das Transformationsverhalten von $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ unter Parität.

5. Schließe aus Deinen Ergebnissen aus 2, 3 und 4 auf das Transformationsverhalten von $\Phi(\mathbf{r})$ unter Parität. Welches Transformationsverhalten zeigt somit $A^\mu(x)$ unter Parität?

Aufgabe 2 [*Feldstärketensor und dualer Feldstärketensor*] (6+4=10 Pkt.)

1. Betrachte den Ausdruck
   $$\mathcal{L} = \# F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}$$
   als Kandidat für die Lagrange-Dichte der Elektrodynamik. Dabei ist $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$ der in der Vorlesung eingeführte duale Feldstärketensor.

   (a) Zeige, dass $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ invariant unter Lorentz-Transformationen [1] ist, d.h. dass $\epsilon'_{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$.
   Hinweis: Überlege, wie Du die Determinante einer Lorentz-Transformation Λ mit Hilfe von $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ in Komponentenschreibweise formulieren kannst.

[1] Damit sind hier *eigentliche orthochrone* Lorentz-Transformationen gemeint, also solche, welche sich aus Boosts und Rotationen zusammensetzen. Die Transformationen $P = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$, $T = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ und PT erfüllen auch $\eta = \Lambda^T \eta \Lambda$, gehören aber nicht zu der Zusammenhangskomponente der Lorentz-Gruppe, welche die Identität enthält. Sie beschreiben keine Transformationen zwischen zwei physikalisch realisierbaren Inertialsystemen.

(b) Drücke $\tilde{F}_{\mu\nu}$ durch **E** und **B** aus. Drücke $F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}$ durch **E** und **B** aus. *Hinweis: Im Laufe der Rechnung ist es zweckmäßig, $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ durch das dreikomponentige ϵ_{jkl} auszudrücken.*

(c) Ist $\mathcal{L}$ Lorentz-invariant? Ist $\mathcal{L}$ eichinvariant? Ist $\mathcal{L}$ paritätsinvariant? Warum eignet sich $\mathcal{L}$ nicht als Lagrange-Dichte oder Teil einer Lagrange-Dichte, die die Elektrodynamik beschreibt?

2. Betrachte nun
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \#(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})^2.$$
Ist $\mathcal{L}$ Lorentz-invariant, eichinvariant und paritätsinvariant? Wie lauten die Feldgleichungen? Welche mathematische Schwierigkeit, die in den Maxwell-Gleichungen nicht vorhanden ist, tritt auf, wenn man diese Feldgleichungen lösen will?

Aufgabe 3 [*Homogene Maxwell-Gleichungen*] `(5 Pkt.)`

Bestimme ausgehend von der kovarianten Form
$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$
die sogenannten homogenen Maxwell-Gleichungen ausgedrückt durch E-Felder und B-Felder.

Aufgabe 4 [*Viererstromdichte*] `(Präsenzaufgabe 0 Pkt.)`

Zeige exemplarisch, dass sich $j^\mu(x) = (c\rho(\mathbf{r},t), \mathbf{j}(\mathbf{r},t))$ unter Lorentz-Transformationen wie ein Vierervektor verhält, d. h. dass die Vergabe eines oberen griechischen Index μ an j gerechtfertigt ist. Betrachte dazu

1. eine im Inertialsystem Σ ruhende homogen geladene Kugel (Ladungsdichte ρ_0),

2. einen im Inertialsystem Σ auf der x-Achse liegenden homogen geladenen Draht (Linienladungsdichte λ_0, verschwindender Strom).

Das Inertialsystem Σ' bewegt sich relativ zu Σ in x-Richtung mit konstanter Geschwindigkeit v. Gib für die beiden genannten Fälle sowohl j^μ als auch j'^μ an (verwende für j'^μ Dein Wissen über Längenkontraktion) und zeige danach, dass j^μ und j'^μ über eine entsprechende Lorentz-Transformation verbunden sind.