Theoretische Physik 3 - Klassische Elektrodynamik

Wintersemester 2020/2021 – Prof. Marc Wagner

Martin Pflaumer: pflaumer@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 12

vom 05.02.21, Abgabe am 12.02.21, Besprechung in der Woche vom 15.02.21

Aufgabe 1 [*Elektrodynamik in d Raumdimensionen*] (Präsenzaufgabe 0 Pkt.)

Betrachte die Lagrange-Dichte der Elektrodynamik

$$\mathcal{L} \quad = \quad -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{c} j^\mu A_\mu$$

in $d \geq 1$ Raumdimensionen $\mathbf{r} = (x^1, x^2, \ldots, x^d)$.

1. Bestimme die Feldgleichungen in kovarianter Form, d. h. in Komponentenschreibweise mit Viererindizes.
2. Verallgemeinere das elektrische Feld auf sinnvolle Art auf d Dimensionen. Wie viele Komponenten hat das elektrische Feld in d Dimensionen? Wie lauten die Feldgleichungen der Elektrostatik in d Raumdimensionen, die die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ mit dem Potential $A^0(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r})$ beziehungsweise den Komponenten des elektrischen Feldes in Verbindung bringen?
3. Verallgemeinere das magnetische Feld auf sinnvolle Art auf d Dimensionen. Wie viele Komponenten hat das magnetische Feld in d Dimensionen? Wie lauten die Feldgleichungen der Magnetostatik in d Raumdimensionen, die die Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ mit dem Potential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ beziehungsweise den Komponenten des magnetischen Feldes in Verbindung bringen?

Aufgabe 2 [*Fourier-Transformation*] (4+3=7 Pkt.)

In der Vorlesung wurde die Fourier-Transformation diskutiert und dabei die Konvention

$$f(x) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk\, e^{+ikx} \tilde{f}(k) \quad , \quad \tilde{f}(k) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx\, e^{-ikx} f(x) \qquad (\star)$$

verwendet.

1. Berechne die Fourier-Transformierte $\tilde{f}(k)$ einer normierten Gauß-Funktion

$$f(x) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} .$$

Diskutiere anhand geeigneter Skizzen, welchen Einfluss die Breite σ auf das Ergebnis $\tilde{f}(k)$ hat.

2. Berechne die beiden Integrale

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dk\, e^{+ikx}e^{-ikx_0} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dx\, e^{-ikx}\delta(x-x_0)$$

und zeige damit exemplarisch die Gültigkeit von ($\star$), d.h. dass "Fourier-Hin-Transformation" und "Fourier-Rück-Transformation" invers zueinander sind.
Hinweis: Bei der Berechnung des ersten Integrals ist es zweckmäßig, den Integranden mit $e^{-\epsilon|k|}$ zu multiplizieren ($\epsilon > 0$ und klein) und am Ende der Rechnung den Limes $\epsilon \to 0$ zu bilden.

Aufgabe 3 [*Greensche Funktion des harmonischen Oszillators*] `(4+2+3=9 Pkt.)`

Betrachte den ungedämpften harmonischen Oszillator in 1 Dimension, auf den die anregende Kraft $F(t)$ wirkt. Wie aus der Mechnik bekannt wird dieser durch die lineare inhomogene Differentialgleichung

$$\underbrace{\left(m\frac{d^2}{dt^2}+k\right)}_{D(t)}x(t) \quad = \quad F(t) \qquad (\star)$$

beschrieben.

1. Bestimme eine Greensche Funktion des Differentialoperators $D(t)$, d.h. löse

$$D(t)G(t,t') \quad = \quad \delta(t-t') \qquad (\star\star).$$

Konstruiere $G(t,t')$ so, dass die Randbedingung $\lim_{t\to-\infty} G(t,t') = 0$ erfüllt ist.
Hinweis: für $t < t'$ und für $t > t'$ ist es jeweils einfach, die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ($\star\star$) anzugeben. Eine mögliche Wahl ist $G(t,t') = 0$ für $t < t'$ und $G(t,t') = A\sin(\omega(t-t'))$ für $t > t'$. Begründe, dass diese Wahl geeignet ist, d.h. bei Anwendung von $D(t)$ eine δ-Funktion $\delta(t-t')$ entsteht. Setze diese beiden Lösungen dann so zusammen, dass die Differentialgleichung ($\star\star$) auch für $t = t'$ erfüllt ist, d.h. bestimme A entsprechend (hierzu sind eventuell Deine Überlegungen aus Aufgabe 4 von Blatt 4 hilfreich).

2. Gib mit Hilfe von $G(t,t')$ einen Integralausdruck für die allgemeine Lösung von ($\star$) für beliebige anregende Kraft $F(t)$ an.

3. Betrachte nun einen harmonischen Oszillator, der für $t < 0$ in Ruhe ist. Im Zeitraum $0 \le t \le T$ wirkt die anregende Kraft $F(t) = F_0 = \text{const.}$ Für $t > T$ gibt es keine anregende Kraft. Bestimme mit Deinem Ergebnis aus 2. die Trajektorie $x(t)$ für beliebige Zeiten. Skizziere und diskutiere die Trajektorie für unterschiedliche T.

Aufgabe 4 [*Wellengleichung für E-Feld und B-Feld*] `(3+1=4 Pkt.)`

1. Zeige, ausgehend von den Maxwell-Gleichungen im Vakuum ($j^\mu = 0$), dass $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ die Wellengleichungen

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle\right)\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \quad = \quad 0 \quad , \quad \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle\right)\mathbf{B}(\mathbf{r},t) \quad = \quad 0$$

   erfüllen.

2. Sind diese Wellengleichungen in Kombination mit $\nabla\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = 0$ und $\nabla\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0$ äquivalent zu den Maxwell-Gleichungen im Vakuum?