
Klausur zu “Theoretische Physik 3 – Elektrodynamik”

04. März 2021

Prof. Marc Wagner
Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Theoretische Physik

---

6 Aufgaben mit insgesamt **50** Punkten. Die Klausur ist mit **25** oder mehr Punkten bestanden.

Name: ____________________________

Matrikelnummer: ____________________________

Aufgabe	Punkte
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Gesamt	
Note	

Aufgabe 1 (2.5+1.5+4=8 Punkte)

(a) Wie lautet der Satz von Gauß in d Dimensionen. Gib die entsprechende Gleichung an und erkläre alle auftretenden Symbole präzise in Worten.

(b) Betrachte das im 2-dimensionalen Raum definierte Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x, y) = \alpha \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \end{pmatrix}$$

und berechne

$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \, \mathrm{div} \, \mathbf{f}(x, y)$$

durch direktes Lösen der Integrale.

(c) Berechne erneut die oben definierte Größe I, indem Du zunächst den Satz von Gauß verwendest, um das "Volumenintegral" in ein "Oberflächenintegral" umzuschreiben, und dieses dann löst. Führe eine übersichtliche Rechnung aus und fertige eine verständliche Skizze an, aus denen die Beiträge der vier die Oberfläche bildenden Geradenstücke klar erkennbar sind.

Aufgabe 2 (2+2.5+6.5=11 Punkte)

Die Dynamik eines in einer Raum- und einer Zeitdimension beschriebenen reellen Feldes $z(x, t)$ sei durch die Wellengleichung

$$\ddot{z}(x, t) - v^2 z''(x, t) = 0 \tag{1}$$

($v > 0$ und reell) beschrieben. Außerdem gelten periodische Randbedingungen $z(x + L, t) = z(x, t)$.

(a) Reduziere mit einem Separationsansatz die Wellengleichung (1) auf zwei gewöhnliche Differentialgleichungen.

(b) Finde einen vollständigen Satz von Lösungen für jede dieser beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen.
Hinweis: Rechnen im Komplexen ist erlaubt und eventuell auch zweckmäßig.

(c) Konstruiere aus Deinen Ergebnissen aus (b) die allgemeine Lösung der Wellengleichung (1). Achte darauf, dass Dein Endergebnis für $z(x, t)$ reell ist und die periodischen Randbedingungen erfüllt.

Aufgabe 3 (2+1+4=7 Punkte)

(a) Wie lautet die Kontinuitätsgleichung für die elektrische Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}, t)$ und die elektrische Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$?

(b) Auf welche häufig verwendete einfache Beziehung reduziert sich die Kontinuitätsgleichung im Rahmen der Magnetostatik?

(c) Zeige, ausgehend von der Kontinuitätsgleichung, dass für eine lokalisierte Ladungsdichte und Stromdichte die Gesamtladung zeitlich erhalten ist. (Lokalisiert bedeutet hier $\rho(\mathbf{r}, t) = 0$ und $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0$ für $|\mathbf{r}| > R$ für einen vorgegebenen endlichen Radius R.)
Hinweis: Die von Dir verwendeten Argumente müssen verständlich und nachvollziehbar sein. Dafür empfiehlt sich neben einer Rechnung auch das Anfertigen einer Skizze.

Aufgabe 4 (1+1+3+2=7 Punkte)

(a) Wie lautet die Beziehung zwischen dem Viererpotential A^μ und dem Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$?

(b) Wie lauten die Komponenten von $F^{\mu\nu}$ ausgedrückt durch die Komponenten des elektrischen und Magnetischen Feldes E_j und B_j?
Hinweis: Das Hinschreiben einer 4×4 Matrix für $F^{\mu\nu}$ ist hier zweckmäßig und ausreichend.

(c) Betrachte einen Boost in x-Richtung mit Geschwindigkeit $v = \beta c$, der zwei Inertialsysteme Σ und Σ' verbindet. Drücke E'_x (die x-Komponente des elektrischen Feldes in Σ') durch die Komponenten von $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ (die elektrischen und magnetischen Felder in Σ) aus. Gib hierzu zunächst die Boost-Matrix an und führe dann explizit die dem Boost entsprechende Lorentz-Transformation aus (einfaches Angeben des Endergebnisses ist nicht ausreichend).

(d) Wie viele Komponenten hat das elektrische Feld sowie das magnetische Feld in:

- 1 Raumdimension?
- 2 Raumdimensionen?
- d Raumdimensionen?

Aufgabe 5 (5+4=9 Punkte)

(a) Berechne mit Hilfe des Gaußschen Gesetzes das elektrische Feld einer homogen geladenen Kugel mit Radius R und Gesamtladung q, die im Ursprung zentriert ist, sowohl innerhalb als auch außerhalb der Kugel.

(b) Berechne, z.B. ausgehend von Deinem Ergebnis aus (a), das zugehörige elektrostatische Potential.

Aufgabe 6 (3+2+2+1=8 Punkte)

(a) Wie lauten die Maxwell-Gleichungen in kovarianter Form ausgedrückt durch

  (i) den Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ (A^{μ} soll nicht explizit auftreten),

  (ii) das Viererpotential A^{μ} ($F^{\mu\nu}$ soll nicht explizit auftreten)?

(b) Was ist eine Eichtransformation? Gib die Beziehung zwischen A^{μ} und dem zugehörigen eichtransformierten Feld A'^{μ} an.

(c) Erläutere, wie die Wahl einer speziellen Eichung die Maxwell-Gleichungen gemäß (a)(ii) in vier unabhängige Gleichungen entkoppelt. Gib die Eichbedingung an, sowie die resultierenden entkoppelten Gleichungen. Wie nennt man diese Eichung?
Hinweis: Es ist nicht notwendig, (wie in der Vorlesung) zu zeigen, dass es sich um eine zulässige Eichung handelt.

(d) Unter welcher Voraussetzung kann zusätzlich noch temporale Eichung $A^0 = 0$ gefordert werden? (Die Voraussetzung ist nur zu nennen, nicht zu begründen oder zu beweisen.) Vereinfache für diesen Fall die Maxwell-Gleichungen so weit wie möglich.

Punkteverteilung und Kommentare zur Punkteverteilung in rot.

Lösung 1(a) Gesamt: 2.5

$$\underbrace{\int_V dV \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x})}_{0.5} = \underbrace{\oint_A d\mathbf{A}\, \mathbf{f}(\mathbf{x})}_{0.5}. \tag{2}$$

- $\int_V dV$: Integration über d-dimensionales Volumen V. 0.5
- $\oint_A d\mathbf{A} = \oint_A dA\, \hat{\mathbf{n}}$: Integration über geschlossene das Volumen V begrenzende $d-1$-dimensionale (Hyper-)Fläche A (dA: Flächenelement; $\hat{\mathbf{n}}$: Flächennormale). 0.5
- $\mathbf{f}$: Beliebige (stetig differenzierbare) vektorielle Funktion (d Komponenten). 0.5

Lösung 1(b) Gesamt: 1.5

$\operatorname{div} \mathbf{f}(x, y) = 3\alpha x$.

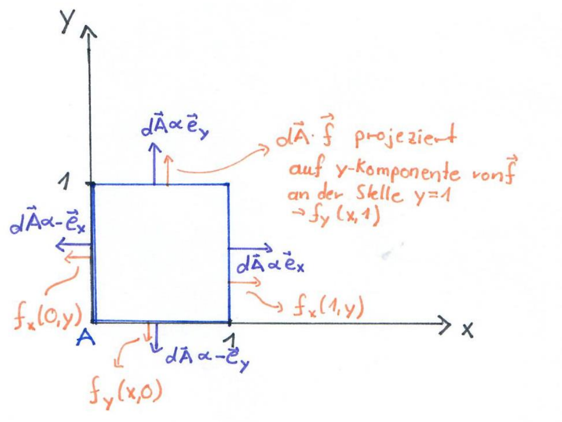
$$I = \underbrace{\int_0^1 dx \int_0^1 dy \operatorname{div} \mathbf{f}(x, y)}_{\text{0.5 f. richtigen Ansatz}} = \underbrace{3\alpha \left(\int_0^1 dx\, x\right)\left(\int_0^1 dy\right)}_{\text{0.5 f. Rechnung}} = \underbrace{\frac{3\alpha}{2}}_{0.5}. \tag{3}$$

Lösung 1(c) Gesamt: 4

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \operatorname{div} \mathbf{f}(x, y) \underset{0.5}{=} \oint_A d\mathbf{A}\, \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \\ &= \underbrace{\int_0^1 dx\, f_y(x, 1)}_{\text{“oben” } 0.5} - \underbrace{\int_0^1 dx\, f_y(x, 0)}_{\text{“unten” } 0.5} + \underbrace{\int_0^1 dy\, f_x(1, y)}_{\text{“rechts” } 0.5} - \underbrace{\int_0^1 dy\, f_x(0, y)}_{\text{“links” } 0.5} = \\ &= \alpha\left(\int_0^1 dx\, x - \int_0^1 dx\, 0 + \int_0^1 dy - \int_0^1 dy\, 0\right) = \alpha\left(\frac{1}{2} - 0 + 1 - 0\right) = \frac{3\alpha}{2} \ \ 0.5. \end{aligned} \tag{4}$$

(d.h. je 0.5 für die 4 richtigen Integral-Ausdrücke u. Berechnung u. 0.5 für weitere richtige Rechnung(zeigen, dass identisch zu (b)).)

XXXXX Skizze XXXXX 1 f. Skizze



Lösung 2(a) Gesamt: 2

Separationsansatz: $z(x,t) = X(x)T(t)$.

Damit

$$\underbrace{X(x)\ddot{T}(t) - v^2 X''(x)T(t) = 0}_{\text{0.5 f. Ansatz u. einsetzen}} \quad \rightarrow \quad \underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\ddot{T}(t)}{v^2 T(t)} = -k^2}_{\text{0.5 f. korrektes Umformen (-0.5 wenn Konstante fehlt)}} \tag{5}$$

bzw.

$$X''(x) = -k^2 X(x) \;\; 0.5 \quad , \quad \ddot{T}(t) = -k^2 v^2 T(t) \;\; 0.5. \tag{6}$$

Lösung 2(b) Gesamt: 2.5

$X(x) = e^{\pm ikx}$ 1 , $T(t) = e^{\pm ikvx}$ 1 .

d.h. je 0.5 für Lösung mit + und mit -, also -0.5, wenn negative Lösung fehlt.

Spezialfall $k = 0$:

DGLs reduzieren sich auf $X''(x) = 0$ bzw. $\ddot{T}(t) = 0$, in diesem Fall folgt:

$X(x) = x$ und $X(x) = 1$ (Angabe auch in einer Formel möglich: $X(x) = ax + b$)
$T(t) = t$ und $T(t) = 1$ (Angabe auch in einer Formel möglich: $T(t) = at + b$)
0.5 für korrekte Behandlung des Spezialfalles (sowohl für X wie auch für T muss er behandelt werden)

Lösung 2(c) Gesamt: 6.5

Es bietet sich an $\omega = |k|v$ zu definieren (wie auch in der Vorlesung bei ähnlichen Problemen [Lichtstrahl]).

Die allgemeine Lösung ist eine Superposition von Termen $X(x)T(t) = e^{\pm ikx}e^{\pm i\omega t}$ 1 (-0.5 wenn Vorzeichen nicht stimmen/fehlen oder ein Term fehlt. -1 wenn beides nicht stimmt oder falsche Terme mit $+ik$ und $-i\omega t$) auftreten). Aufgrund der periodischen Randbedingungen muss $k = 2\pi n/L$ gelten 1 , wobei $n \in \mathbb{Z}$. Für den Spezialfall $k = 0$ verschwindet die Lösung $X(x) = x$, somit bleibt nur $X(x) = 1$. Die Superposition liefert für den Spezialfall $X(x)T(t) = 1 * (t + 1)$ und somit:

Allgemeine Lösung (im Komplexen):

$$z(x,t) = \sum_n \Big(\underset{1}{A_n e^{+i(k_n x + \omega_n t)}} + \underset{1}{B_n e^{-i(k_n x + \omega_n t)}} \Big) + \underset{0.5}{ut} \tag{7}$$

(d.h. pro Term 1 P. bei fehlender Amplitude je -0.5, bei falschen Vorzeichen -0.5, sowie 0.5 für korrekte Betrachtung des Spezialfalls $k = 0$.)

mit $k_n = 2\pi n/L$, $\omega_n = |k_n|v$ und unbestimmten komplexen Koeffizienten A_n und B_n, sowie der Konstanten u für den Spezialfall $k = 0$. (Die Lösung $X(x)T(t) = 1 * 1$ des Spezialfalls ist in der Summe für n=0 enthalten). 1 P f. korrekte Summation über n und Indizes an k, ω, A und B. -0.5 wenn Indizes fehlen

Allgemeine Lösung für reelles z:

$$z(x,t) = \sum_n \Big(A_n e^{+i(k_n x + \omega_n t)} + A_n^* e^{-i(k_n x + \omega_n t)} \Big) + \mathrm{Re}(u)t \quad \text{1 (korrekte komplexe Koeffizienten)} \tag{8}$$

mit unbestimmten komplexen Koeffizienten A_n.

Lösung 3(a) Gesamt: 2

$\underset{1}{\partial_t \rho(\mathbf{r}, t)} + \underset{1}{\nabla \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)} = 0$ bzw. $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$ mit $j^\mu = (\rho c, \mathbf{j})$.
(keine Teilpunkte)

Lösung 3(b) Gesamt: 1

Aufgrund von Zeitunabhängigkeit $\nabla \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0$. 1 (keine Teilpunkte)

Lösung 3(c) Gesamt: 4

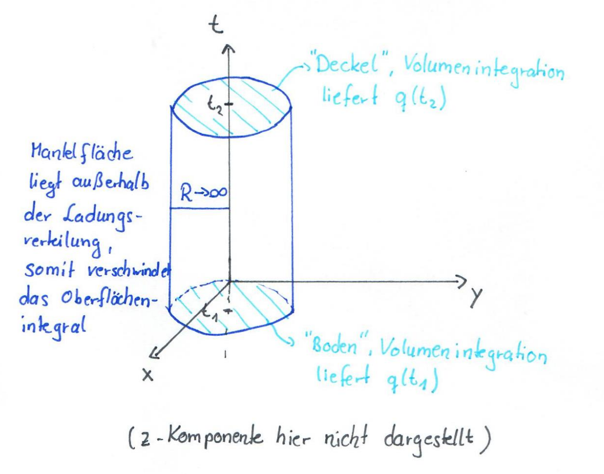
Integration über zylinderförmiges Raumzeitvolumen V 1 (Erläuterung/Beschreibung des Vorgehens in nachvollziehbarer Weise in Worten oder mithilfe einer Skizze)(Höhe $t_2 - t_1$, Radius $> R$ [z.B. unendlich]; siehe Skizze):

$$0 = \underset{\substack{\text{0.5 (math Ausdruck für} \\ \text{RaumzeitIntegration über} \\ \text{die Kontinuitätsgleichung)}}}{\int_V d^4x \, \partial_\mu j^\mu(x)} \underset{0.5}{=} \oint_A dA_\mu \, j^\mu(x) \underset{0.5}{=} \underbrace{\int d^3r \, j^0(t_2, \mathbf{r})}_{\text{“Deckel”}} - \underbrace{\int d^3r \, j^0(t_1, \mathbf{r})}_{\text{“Boden”}} \underset{0.5}{=} \Big(q(t_2) - q(t_1) \Big) c \tag{9}$$

(die Integration über die Mantelfläche gibt keinen Beitrag, da die Stromdichte lokalisiert ist) 0.5 (math. Ausdruck reicht, muss nicht schriftlich angegeben werden, aber aus Lösung ersichtlich sein).

Da $q(t_2) - q(t_1) = 0$ für beliebige Zeiten gilt, ist die Gesamtladung eine Erhaltungsgröße. 0.5

XXXXX Skizze XXXXX



Lösung 4(a) Gesamt: 1

$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ mit $\partial^\mu = ((1/c)\partial_t, -\nabla)$. 1 (-0.5 wenn Indizes falsch (nicht alle oben oder unten))

Lösung 4(b) Gesamt: 1

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ +E_x & 0 & -B_z & +B_y \\ +E_y & +B_z & 0 & -B_x \\ +E_z & +B_y & +B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

.1 (d.h. je E und B 0.5 Punkte.)

Andere Konventionen ($\mathbf{E} \to -\mathbf{E}$ und/oder $\mathbf{B} \to -\mathbf{B}$) sind ebenfalls erlaubt, wenn sie im Folgenden konsistent verwendet werden. Wenn Vorzeichenkonvention falsch (d.h. inkonsistent) -0.5 jeweils für E bzw. B.

Lösung 4(c) Gesamt: 3

Boost in x-Richtung mit Geschwindigkeit $v = \beta c$:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. 0.5 \tag{11}$$

$$E'_x = F'^{10} = \underset{0.5}{\Lambda^1{}_\rho \Lambda^0{}_\sigma F^{\rho\sigma}} = \underbrace{\Lambda^1{}_0\Lambda^0{}_0 F^{00}}_{=0\ 0.5} + \underbrace{\Lambda^1{}_1\Lambda^0{}_0 F^{10}}_{=\gamma^2 E_x\ 0.5} + \underbrace{\Lambda^1{}_0\Lambda^0{}_1 F^{01}}_{=-\gamma^2\beta^2 E_x\ 0.5} + \underbrace{\Lambda^1{}_1\Lambda^0{}_1 F^{11}}_{=0\ 0.5} = E_x. \tag{12}$$

-0.5 wenn Endergebnis aufgrund von Rechenfehler im letzten Schritt nicht stimmt. (also $\gamma^2 E_x - \gamma^2\beta^2 E_x = E_x$ nicht erkannt wurde)

Lösung 4(d) Gesamt: 2

Kann direkt anhand von Matrizen abgelesen werden, wie sie in (b) gefragt sind:

Elektrisches Feld: d Komponenten in d Raumdimensionen. 1

Magnetisches Feld: existiert nicht in 1 Raumdimension; 1 Komponente in 2 Raumdimensionen; $d(d-1)/2$ Komponenten in d Raumdimensionen. 1

(je -0.5 wenn eine der 3 gefragten Dimensionen nicht abgedeckt wird.)

Lösung 5(a) Gesamt: 5

Gaußsches Gesetz:

$$\oint_A d\mathbf{A}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi q_{\text{innen}}. \tag{13}$$

1 (-0.5 wenn Ladung oder Ladungsdichte nicht vorkommt oder Faktor 4 π fehlt. Gleichung muss nicht explizit genannt werden, aber in Rechnung deutlich auftauchen.)

Aufgrund von Rotationssymmetrie muss $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\mathbf{e}_r$ gelten. 1 (0.5 f. Anwendung, 0.5 f. deutlich machen, dass es verwendet wird (z.B. Auftauchen von $E(r)\mathbf{e}_r$ in Rechnung))

Oberfläche A, über die integriert wird, ist Kugelfläche mit Radius r:

$$\int_A d\mathbf{A}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \underset{1}{4\pi r^2} E(r) = 4\pi q_{\text{innen}}. \tag{14}$$

Damit

$$E(r) = \begin{cases} q/r^2 & \text{für } r \geq R \quad 1 \\ qr/R^3 & \text{für } r < R \quad 1 \end{cases}. \tag{15}$$

Lösung 5(b) Gesamt: 4

$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r})$.

Aufgrund von Rotationssymmetrie muss $\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(r)$ gelten.

Damit

$$\int_\infty^r dx \Big(-\partial_x\Phi(x)\Big) = -\Phi(r) + \Phi(r\to\infty) \tag{16}$$

$$= \int_\infty^r dx\, E(x) \tag{17}$$

1P. für Integralausdruck, wobei (explizit oder implizit) bemerkt werden muss, dass Rotationssymmetrie angewandt werden muss
wobei auf der x-Achse von $x=\infty$ bis $x=r$ integriert wird.

Setze $\Phi(r\to\infty) = 0$.

$r \geq R$:

$$\Phi(r) = -\underbrace{\int_\infty^r dx\, \frac{q}{x^2}}_{0.5} = \frac{q}{r}.\ 0.5 \tag{18}$$

$r < R$:

$$\Phi(r) = -\underbrace{\int_\infty^R dx\, \frac{q}{x^2}}_{0.5} - \underbrace{\int_R^r dx\, \frac{qx}{R^3}}_{0.5} = \frac{q}{R} - \frac{qx^2}{2R^3}\Big|_R^r = \underbrace{\frac{3q}{2R}}_{0.5} - \underbrace{\frac{qr^2}{2R^3}}_{0.5}. \tag{19}$$

Alternativ über unbestimmtes Integral möglich. Dann muss das Potential über die Stetigkeitsbedingung angepasst werden. Es gibt dann je 1P. für die Ausdrücke der unbestimmten Integrale und 1 P. für die korrekte Bestimmung der Konstanten über die Stetigkeitsbedingung

Lösung 6(a) Gesamt: 3

(i): $\partial_\mu F^{\mu\nu} = (4\pi/c)j^\nu$ 1(-0.5 wenn Indizes falsch) und $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$ 1(-0.5 wenn Indizes falsch) mit $\tilde{F}^{\mu\nu} = (1/2)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$.

(ii): $\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \Box A^\nu - \partial^\nu\partial_\mu A^\mu = (4\pi/c)j^\nu$. 1(-0.5 wenn Indizes falsch) Die homogenen Maxwell-Gleichungen sind hier nicht erforderlich.

Lösung 6(b) Gesamt: 2

$A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu\Lambda(x)$ 1 (-0.5 wenn Indizes falsch) , wobei $\Lambda(x)$ eine beliebige Funktion der Raumzeitkoordinaten ist. Eine Eichtransformation verändert das Viererpotential, nicht aber physikalisch messbare Größen wie z.B. das elektrische und das magnetische Feld. 1

Lösung 6(c) Gesamt: 2

Fordere Lorenz-Eichung, d.h. $\partial_\mu A^\mu = 0$ 1 (-0.5 wenn Indizes falsch). Damit reduzieren sich die Maxwell-Gleichungen auf vier entkoppelte Gleichungen $\Box A^\nu = (4\pi/c) j^\nu$ 1 (-0.5 wenn Indizes falsch).

Lösung 6(d) Gesamt: 1

Möglich im Vakuum, d.h. für $j^\mu = 0$ 0.5. Damit reduzieren sich die Maxwell-Gleichungen auf $A^0 = 0$, $\nabla \mathbf{A} = 0$ und $\Box \mathbf{A} = 0$ 0.5.