Klausur zu "Theoretische Physik 3 – Elektrodynamik"

26. März 2021

Prof. Marc Wagner
Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Theoretische Physik

---

6 Aufgaben mit insgesamt **50** Punkten. Die Klausur ist mit **25** oder mehr Punkten bestanden.

Name: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Aufgabe	Punkte
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Gesamt	
Note	

Aufgabe 1 (2+2+4=8 Punkte)

(a) Wie lautet der Satz von Stokes. Gib die entsprechende Gleichung an und erkläre alle auftretenden Symbole präzise in Worten.

(b) Betrachte das im 3-dimensionalen Raum definierte Vektorfeld

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \alpha \begin{pmatrix} -\alpha y^3 \\ +\beta x + \tanh(\gamma y) \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $\mathbf{r} = (x, y, z)$ und berechne

$$I = \int_A d\mathbf{A} \,\mathrm{rot}\, \mathbf{f}(\mathbf{r}),$$

wobei die Fläche A einem in der x-y-Ebene liegenden Quadrat mit Ausdehnung $0 \leq x \leq 1$ und $0 \leq y \leq 1$ entspricht, durch direktes Lösen des Integrals über A.

(c) Berechne erneut die oben definierte Größe I, indem Du zunächst den Satz von Stokes verwendest, um das Flächenintegral in ein Linienintegral umzuschreiben, und dieses dann löst. Führe eine übersichtliche Rechnung aus und fertige eine verständliche Skizze an, aus denen die Beiträge der vier das Quadrat begrenzenden Geradenstücke klar erkennbar sind.

Aufgabe 2 (9 Punkte)

Betrachte die häufig in der Elektrodynamik und Feldtheorie auftretende partielle Differentialgleichung

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle \right) \Phi(\mathbf{r}, t) = 4\pi \rho(\mathbf{r}, t)$$

zur Bestimmung von $\Phi(\mathbf{r}, t)$, wobei $\rho(\mathbf{r}, t)$ vorgegeben ist. Leite einen Integralausdruck für eine beliebige partikuläre Lösung $\Phi(\mathbf{r}, t)$ dieser Gleichung her, wobei Du

$$\left(k^2 + \triangle \right) \left(- \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \right) = \delta(\mathbf{r})$$

sowie die in der Vorlesung diskutierten Grundlagen der Fourier-Transformation und von Greenschen Funktionen verwenden kannst.
Hinweis: Die Schritte in Deiner Herleitung müssen verständlich dargestellt werden. Einfaches Angeben des Integralausdrucks ist nicht ausreichend.

Aufgabe 3 (2+2+3=7 Punkte)

Betrachte einen unendlich ausgedehnten von einem Strom I durchflossenen Zylinder mit Radius R. Der Zylinder ist so ausgerichtet, dass seine Symmetrieachse der z-Achse entspricht. Der Strom fließt in positive z-Richtung, die Stromdichte innerhalb des Zylinders ist homogen.

(a) Gib die Stromdichte $j(r, \varphi, z)$ an ((r, φ, z) bezeichnen Zylinderkoordinaten).

(b) Begründe detailliert und vollständig, warum das magnetische Feld die Form $B(r, \varphi, z) = B(r)\mathbf{e}_\varphi$ hat.

(c) Berechne mit Hilfe des Ampereschen Gesetzes das magnetische Feld sowohl innerhalb als auch außerhalb des Zylinders.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

In der Vorlesung wurde die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung $\triangle\Phi = 0$ in 2 Raumdimensionen in Polarkoordinaten hergeleitet:

$$\Phi(r, \varphi) = A_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + B_0 \frac{\ln(r/r_0)}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{m \neq 0} \left(A_m r^{|m|} + B_m \frac{1}{r^{|m|}} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{+im\varphi}.$$

Betrachte nun einen Kreisring beschrieben durch $R_1 \leq r \leq R_2$. Bestimme das durch die Laplace-Gleichung festgelegte $\Phi(r, \varphi)$ für die Randbedingungen $\Phi(R_1, \varphi) = \alpha \cos(\varphi)$ und $\Phi(R_2, \varphi) = \beta$ innerhalb des Kreisrings.

Aufgabe 5 (2+1+2.5+2.5+2=10 Punkte)

(a) Wie lauten die Komponenten des Feldstärketensors $F^{\mu\nu}$ sowie von $F_{\mu\nu}$ ausgedrückt durch die Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes E_j und B_j?
Hinweis: Das Hinschreiben zweier 4×4 Matrix für $F^{\mu\nu}$ und $F_{\mu\nu}$ ist hier zweckmäßig und ausreichend.

(b) Berechne $F^\mu{}_\mu$.

(c) Drücke $F^{\mu\nu} F_{\nu\mu}$ durch $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ aus.

(d) Drücke $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}$ durch $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ aus (verwende die in der Vorlesung verwendete Konvention $\epsilon_{0123} = +1$).

(e) Betrachte einen Boost in x-Richtung mit Geschwindigkeit $v = \beta c$, der zwei Inertialsysteme Σ und Σ' verbindet. Drücke B'_y (die y-Komponente des magnetischen Feldes in Σ') durch die Komponenten von $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ (die elektrischen und magnetischen Felder in Σ) aus. Gib hierzu zunächst die Boost-Matrix an und führe dann explizit die dem Boost entsprechende Lorentz-Transformation aus (einfaches Angeben des Endergebnisses ist nicht ausreichend).

Aufgabe 6 (1+1.5+2+1.5=6 Punkte)

Betrachte einen homogen geladenen Würfel (Kantenlänge L, Gesamtladung q), der im Koordinatenursprung zentriert ist und dessen Kanten entlang der Koordinatenachsen ausgerichtet sind.

(a) Bestimme das Monopolmoment Q des Würfels.

(b) Bestimme die Dipolmomente $\mathbf{p}$ des Würfels bezüglich des Koordinatenursprungs.

(c) Bestimme die Quadrupolmomente Q_{jk} des Würfels bezüglich des Koordinatenursprungs.
Hinweis: $Q_{jk} = \int d^3r\, \rho(\mathbf{r})(3r_j r_k - r^2\delta_{jk})$.

(d) Gib näherungsweise das elektrostatische Potential $\Phi(\mathbf{r})$ für große Entfernungen $|\mathbf{r}|$ vom Koordinatenursprung an. Verwende dabei alle bestimmten Momente aus (a), (b) und (c).

Lösung 1(a) Gesamt: 2

Gilt nur in drei Dimensionen, d.h. $\mathbf{r} = (x, y, z)$,

$$\int_A d\mathbf{A}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \oint_C d\mathbf{r}\,\mathbf{f}(\mathbf{r}). \text{ 0.5} \tag{1}$$

- $\int_A d\mathbf{A}$: Integration über 2-dimensionale eventuell gekrümmte Fläche. 0.5
- $\oint_C d\mathbf{r}$: Integration über geschlossene die Fläche A begrenzende Kurve C. 0.5
- $\mathbf{f}$: Beliebige (stetig differenzierbare) vektorielle Funktion. 0.5

Lösung 1(b) Gesamt: 2

$\mathrm{rot}\,\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \alpha(0, 0, +\beta + 3\alpha y^2)$. 1 (-0.5 wenn z.B. x oder y Komponente nicht 0)

$$I = \int_A d\mathbf{A}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \alpha \int_0^1 dx \int_0^1 dy \Big(+ \beta + 3\alpha y^2\Big) = \alpha\beta + \alpha^2. \text{ 1 (0.5 f. Rechnung und 0.5 f. Ergebnis)} \tag{2}$$

Lösung 1(c) Gesamt: 4

$$\begin{aligned} I &= \int_A d\mathbf{A}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \oint_C d\mathbf{r}\,\mathbf{f}(\mathbf{r}) \overset{0.5}{=} \\ &= -\alpha \underbrace{\int_0^1 dx\, f_x(x,1)}_{\text{“oben” 0.5}} + \alpha \underbrace{\int_0^1 dx\, f_x(x,0)}_{\text{“unten” 0.5}} + \alpha \underbrace{\int_0^1 dy\, f_y(1,y)}_{\text{“rechts” 0.5}} - \alpha \underbrace{\int_0^1 dy\, f_y(0,y)}_{\text{“links” 0.5}} = \\ &= -\alpha \int_0^1 dx\,(-\alpha) + \alpha \int_0^1 dx\,(0) + \alpha \int_0^1 dy(+\beta + \tanh(\gamma y)) - \alpha \int_0^1 dy\,(+\tanh(\gamma y)) \overset{0.5}{=} \alpha^2 + \alpha\beta. \end{aligned} \tag{3}$$

XXXXX Skizze XXXXX1

Lösung 2 Gesamt: 9

- Fourier-Transformation von $\Phi(\mathbf{r}, t)$ und $\rho(\mathbf{r}, t)$ bezüglich t:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega\, e^{+i\omega t} \tilde{\Phi}(\mathbf{r}, \omega) \text{ 0.5} \tag{4}$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega\, e^{+i\omega t} \tilde{\rho}(\mathbf{r}, \omega) \text{ 0.5}. \tag{5}$$

- Einsetzen in DGl:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle\right)\int d\omega\, e^{+i\omega t}\tilde{\Phi}(\mathbf{r},\omega) = 4\pi \int d\omega\, e^{+i\omega t}\tilde{\rho}(\mathbf{r},\omega)$$ 1 korrektes Einsetzen der FT

$$\rightarrow \quad -\int d\omega\, e^{+i\omega t}\left(\frac{\omega^2}{c^2} + \triangle\right)\tilde{\Phi}(\mathbf{r},\omega) = \int d\omega\, e^{+i\omega t} 4\pi\tilde{\rho}(\mathbf{r},\omega)$$ 1 Zeitliche Ableitung u. Erkennen, dass man nicht räumlich ableitet (6)

$$\rightarrow \quad \left(\frac{\omega^2}{c^2} + \triangle\right)\tilde{\Phi}(\mathbf{r},\omega) = -4\pi\tilde{\rho}(\mathbf{r},\omega)$$ 1 korrekter Vergleich der Integranten. (7)

- Aus

$$\left(k^2 + \triangle\right)\left(-\frac{e^{-ikr}}{4\pi r}\right) = \delta(\mathbf{r}) \tag{8}$$

folgt

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} + \triangle\right)\left(-\frac{e^{-i\omega|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \tag{9}$$ 1

erweitern auf r-r', sodass es als Greensfunktion betrachtet werden kann

d.h.

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\frac{e^{-i\omega|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{10}$$ 1 korrekte Bestimmung der Greensfunktion

ist Greensche Funktion von $\omega^2/c^2 + \triangle$.

- $\tilde{\Phi}(\mathbf{r},\omega)$ kann damit als Integral angegeben werden,

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{r},\omega) = \int d^3r' \left(-4\pi\tilde{\rho}(\mathbf{r}',\omega)\right)G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \int d^3r'\, \tilde{\rho}(\mathbf{r}',\omega)\left(\frac{e^{-i\omega|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) \tag{11}$$ 1

richtige Kombination der Greensfkt für Lösung für $\tilde{\Phi}$.

- $\Phi(\mathbf{r},t)$ durch Verwenden von Gl. (5),

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int d\omega\, e^{+i\omega t}\tilde{\Phi}(\mathbf{r},\omega) \stackrel{1}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int d\omega\, e^{+i\omega t}\int d^3r'\, \tilde{\rho}(\mathbf{r}',\omega)\left(\frac{e^{-i\omega|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) =$$

$$= \int d^3r'\, \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{12}$$ 1.

1. Punkt für korrekte Trafo nach Φ u. Einsetzen, 2. Punkt für korrekte Integration. (13)

Lösung 3(a) Gesamt: 2

$\underbrace{\mathbf{j}(\mathbf{r}) = I\mathbf{e}_z/\pi R^2}_{1}$ für $\underbrace{\sqrt{x^2+y^2} \leq R}_{0.5}$, $\underbrace{\mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0}_{0.5}$ sonst. d.h.:-0.5 wenn $r > R$ fehlt, -0.5 wenn keine Einschränkung des Radius. -0.5 wenn Einheitsvektor fehlt.

Lösung 3(b) Gesamt: 2

- Rotationssymmetrie und Translationssymmetrie:
  $\rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_r(r)\mathbf{e}_r + B_\varphi(r)\mathbf{e}_\varphi + B_z(r)\mathbf{e}_z$. 0.5

- $\oint_A d\mathbf{A}\,\mathbf{B}$ (A: Zylinderfläche eines Zylinders mit endlicher Ausdehnung dessen Symmetrieachse der z-Achse entspricht):
  $\rightarrow B_r(r) = 0$. 0.5

- Parität, $\mathbf{B} \rightarrow_P +\mathbf{B}$:
  $B_z(r) = 0$. 0.5

Mit $B(r) \equiv B_\varphi(r)$ folgt $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B(r)\mathbf{e}_\varphi$. 0.5

auch andere Erklärung möglich, solange sie vollständig und umfassend ist.

Lösung 3(c) Gesamt: 3

Amperesches Gesetz:

$$\oint_C d\mathbf{r}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{c} I_{\text{durch Fläche}}. \; 1 \tag{14}$$

(-0.5 wenn $I_{\text{durch Fläche}}$ nicht deutlich gemacht wird (z.B. nur I steht u. keine Erläuterung))

Kurve C, über die integriert wird, ist Kreis mir Radius r in der x-y-Ebene mit Zentrum im Ursprung:

$$\oint_C d\mathbf{r}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) \stackrel{1}{=} 2\pi r B(r) = \frac{4\pi}{c} I_{\text{durch Fläche}}. \tag{15}$$

(d.h. richtige Auswertung des Integrals links. 0.5 Teilpunkt, wenn deutlich wird, dass richtiges Konturintegral berechnet wird. -0.5 wenn Vorfaktor falsch oder r fehlt.) Damit

$$B(r) = \begin{cases} 2I/cr & \text{für } r \geq R \; 0.5 \\ 2Ir/cR^2 & \text{für } r < R \; 0.5 \end{cases}. \tag{16}$$

Lösung 4 Gesamt: 10

Wähle $r_0 = R_1$. (zweckmäßig aber nicht notwendig)

Werte gegebenes allgemeines $\Phi(r, \varphi)$ auf den Rändern aus:

$$\Phi(R_1, \varphi) = A_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{m \neq 0} \left(A_m R_1^{|m|} + B_m \frac{1}{R_1^{|m|}} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{+im\varphi} \; \text{0.5, auch mit } B_0 \text{ Term möglich} \tag{17}$$

$$\Phi(R_2, \varphi) = A_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + B_0 \frac{\ln(R_2/R_1)}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{m \neq 0} \left(A_m R_2^{|m|} + B_m \frac{1}{R_2^{|m|}} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{+im\varphi}. \; 0.5 \tag{18}$$

Vergleiche mit vorgegebenen Randbedingungen,

$$\Phi(R_1,\varphi) = \alpha\cos(\varphi) = \frac{\alpha}{2}\left(e^{+i\varphi} + e^{-i\varphi}\right) \; 0.5 \tag{19}$$
$$\Phi(R_2,\varphi) = \beta \; 0.5. \tag{20}$$

(d.h. Entwicklung nach Eigenfunktionen, d.h. nur für das Aufschreiben der RBs gibt es keine(!) Punkte, die Intention muss deutlich sein, insbesondere muss der cos durch die e-Funktionen ausgedrückt sein.)

Dies führt auf Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten:

- A_0 und B_0:

$$A_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0 \; 0.5 \tag{21}$$
$$A_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + B_0 \frac{\ln(R_2/R_1)}{\sqrt{2\pi}} = \beta \; 0.5. \tag{22}$$

  Es folgt $A_0 \underset{0.5}{=} 0$ und daraus $B_0 = \sqrt{2\pi}\beta \underset{0.5}{/} \ln(R_2/R_1)$.

- A_1 und B_1:

$$\left(A_1 R_1 + B_1 \frac{1}{R_1}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\alpha}{2} \; 0.5 \tag{23}$$
$$\left(A_1 R_2 + B_1 \frac{1}{R_2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0. \; 0.5 \tag{24}$$

  Es folgt $A_1 = -B_1/R_2^2$, daraus 0.5 (d.h. f. Rechenweg)
  $B_1(-R_1/R_2^2 + 1/R_1) = B_1(-R_1^2 + R_2^2)/R_1 R_2^2 = \sqrt{\pi}\alpha/\sqrt{2}$, daraus:
  $B_1 = \sqrt{\pi}\alpha R_1 R_2^2/\sqrt{2}(-R_1^2 + R_2^2)$ 0.5 und daraus
  $A_1 = -\sqrt{\pi}\alpha R_1/\sqrt{2}(-R_1^2 + R_2^2)$. 0.5

  Analog gilt dies für A_{-1} und B_{-1}. Die Rechenwege sind identisch, ebenso die Ergebnisse, d.h. $A_{-1} = A_1$ und $B_{-1} = B_1$ 2.5 (wie für den Fall m=1 je 0.5 für die Bestimmungsgleichen, 0.5 f. den Rechenweg u. je 0.5 für das Ergebnis. Wenn m=1 stimmt, muss die Rechnung muss nicht detailliert wiederholt werden, es reicht z.B., wenn gezeigt wird, dass die gleichen Bestimmungsgleichungen vorliegen und daher das gleiche Ergebnis folgt.)

- $A_n = 0$ 0.5, $B_n = 0$ 0.5 für $n \geq 2$ und $n \leq -2$.

Lösung 5(a) Gesamt: 2

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ +E_x & 0 & -B_z & +B_y \\ +E_y & +B_z & 0 & -B_x \\ +E_z & -B_y & +B_x & 0 \end{pmatrix} 1 \quad , \quad F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & +E_x & +E_y & +E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & +B_y \\ -E_y & +B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & +B_x & 0 \end{pmatrix} 1. \tag{25}$$

d.h. jeweils je 0.5 für E und B Andre Konventionen ($\mathbf{E} \to -\mathbf{E}$ und/oder $\mathbf{B} \to -\mathbf{B}$) sind ebenfalls erlaubt, wenn sie im Folgenden konsistent verwendet werden.

Wenn Vorzeichenkonvention falsch (d.h. inkonsistent) -0.5 jeweils für E bzw. B.

Lösung 5(b) Gesamt: 1

$F^{\mu}{}_{\mu} = 0$.

Lösung 5(c) Gesamt: 2.5

$F^{\mu\nu}F_{\nu\mu} = 2\Big(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2\Big)$.

1. Möglichkeit: Multiplikation der Matrizen aus a) und anschließend Spur bestimmen.

$$F^{\mu\nu}F_{\nu\mu} = \mathrm{Tr}\left[\begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ +E_x & 0 & -B_z & +B_y \\ +E_y & +B_z & 0 & -B_x \\ +E_z & -B_y & +B_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & +E_x & +E_y & +E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & +B_y \\ -E_y & +B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & +B_x & 0 \end{pmatrix}\right] \tag{26}$$

$$=\mathrm{Tr}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{E}^2 & E_zB_y - E_yB_z & E_xB_z - E_zB_x & E_yB_x - E_xB_y \\ E_yB_z - E_zB_y & E_x^2 - B_y^2 - B_z^2 & E_xE_y + B_xB_y & E_xE_z + B_xB_z \\ E_zB_x - E_xB_z & E_xE_y + B_xB_y & E_y^2 - B_z^2 - B_x^2 & E_yE_z + B_yB_z \\ E_xB_y - E_yB_x & E_xE_z + B_xB_z & E_yE_z + B_yB_z & E_z^2 - B_x^2 - B_y^2 \end{pmatrix}\right] \tag{27}$$

$$=\mathbf{E}^2 + E_x^2 - B_y^2 - B_z^2 + E_y^2 - B_z^2 - B_x^2 + E_z^2 - B_x^2 - B_y^2 = 2\Big(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2\Big) \tag{28}$$

je Diagonalterm 0.5 (=4*0.5=2), sowie 0.5 für richtige Berechnung der Spur.

2.Möglichkeit:
Benutze $F^{0i} = -E_i$, $F_{0i} = E_i$, $F^{ij} = -\epsilon_{ijk}B_k = F_{ij}$ 0.5

$$F^{\mu\nu}F_{\nu\mu} = F^{0i}F_{i0} + F^{i0}F_{0i} + F^{ij}F^{ji} \text{ 0.5} \tag{29}$$

$$= (-E_i)(-E_i) + E_iE_i + \epsilon_{ijk}B_k\epsilon_{jik}B_k \text{ 0.5} \tag{30}$$

$$= 2E_iE_i - 2B_kB_k \text{ 0.5} \tag{31}$$

$$= 2\Big(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2\Big) \text{ 0.5} \tag{32}$$

Lösung 5(d) Gesamt: 2.5

$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma} = 8\mathbf{E}\mathbf{B}$.

Eine Möglichkeit ist, zunächst $\tilde{F}_{\mu\nu} \equiv \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$ zu bestimmen:

$\tilde{F}_{\mu\mu} = \epsilon_{\mu\mu\rho\sigma}F^{\rho\sigma} = 0$ 0.5

$$\tilde{F}_{0i} = \epsilon_{0i\rho\sigma} F^{\rho\sigma} = \epsilon_{ijk} F^{jk} = -2B_i \ \textcolor{red}{0.5} \tag{33}$$

Des Weiteren folgt mit $F^{0j} = -E_j$

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_{ij} &= \epsilon_{ij\rho\sigma} F^{\rho\sigma} && (34)\\
&= \epsilon_{ij0k} F^{0k} + \epsilon_{ijk0} F^{k0} && (35)\\
&= 2\epsilon_{ij0k} F^{0k} = 2\epsilon_{0ijk} F^{0k} = 2\epsilon_{ijk} F^{0k} = -2\epsilon_{ijk} E_k. \ \textcolor{red}{0.5} && (36)
\end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} &= F^{ij} \tilde{F}_{ij} + 2F^{0i} \tilde{F}_{0i} && (37)\\
&= 2\epsilon_{ijk} \epsilon_{ijl} B_k E_l + 4E_i B_i && (38)\\
&= 8\mathbf{EB}, \ \textcolor{red}{1} && (39)
\end{aligned}$$

Lösung 5(e) Gesamt: 2

Boost in x-Richtung mit Geschwindigkeit $v = \beta c$:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{40}$$

$$B'_y = F'^{13} = \Lambda^1{}_\rho \Lambda^3{}_\sigma F^{\rho\sigma} = \underbrace{\Lambda^1{}_0 \Lambda^3{}_3 F^{03}}_{=-\gamma\beta E_z} + \underbrace{\Lambda^1{}_1 \Lambda^3{}_3 F^{13}}_{=\gamma B_y} = \gamma(B_y - \beta E_z). \tag{41}$$

Lösung 6(a) Gesamt: 1

$Q = q$ (Monopolmoment ist immer Gesamtladung) 1 (keine Teilpunkte)

Lösung 6(b) Gesamt: 1.5

$$p_j = \int d^3r \, \rho(\mathbf{r}) r_j = \frac{q}{L^3} \int_{-L/2}^{+L/2} dx \int_{-L/2}^{+L/2} dy \int_{-L/2}^{+L/2} dz \, r_j = 0, \tag{42}$$

je 0.5 pro richtiger Komponente wobei $(r_1, r_2, r_3) \equiv (x, y, z)$ (das Integral über die j-Koordinate verschwindet, z.B. $\int dx \, x = 0$).

Lösung 6(c) Gesamt: 2

$$Q_{jk} = \int d^3r\, \rho(\mathbf{r}) \Big(3r_j r_k - r^2 \delta_{jk} \Big) = \frac{q}{L^3} \int_{-L/2}^{+L/2} dx \int_{-L/2}^{+L/2} dy \int_{-L/2}^{+L/2} dz \Big(3r_j r_k - r^2 \delta_{jk} \Big). \tag{43}$$

Nebenrechnungen:

$$\int_{-L/2}^{+L/2} dx \int_{-L/2}^{+L/2} dy \int_{-L/2}^{+L/2} dz\, (r_j)^2 = \frac{L^3}{12} \text{ 1, d.h. zeigen, dass Terme mit j=k verschwinden.} \tag{44}$$

$$\int_{-L/2}^{+L/2} dx \int_{-L/2}^{+L/2} dy \int_{-L/2}^{+L/2} dz\, r_j r_k = 0 \quad \text{für } j \neq k \text{ 1, d.h. Terme mit } j \neq k \text{verschwinden.} \tag{45}$$

(untere Zeile analog zu Dipolmomenten).

Damit $Q_{jk} = 0$.

Lösung 6(d) Gesamt: 1.5

$$\Phi(\mathbf{r}) \approx \frac{q}{r}. \tag{46}$$

- 0.5 wenn Dipolterm auftritt, -0.5 wenn Quadropolterm auftritt.