Theoretische Physik 5: Thermodynamik und Statistische Physik

WiSe 2022 / 2023 – Prof. Marc Wagner

Laurin Pannullo: pannullo@itp.uni-frankfurt.de
Marc Winstel: winstel@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 0

1 Stichproben aus N-elementiger Menge (Kombinatorik)

Ein bekanntes Problem der Kombinatorik ist das Abzählen möglicher Stichproben (= k-elementige Teilmenge), die aus einer N-elementigen Mengen durch Ziehen von k einzelnen Elementen gewonnen werden. Man unterscheidet vier Fälle, die anhand des Ziehens von numerierten Kugeln aus einer Urne verdeutlicht werden können:

- Ziehen mit Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge der gezogenen Kugeln
  - Anzahl der Möglichkeiten: N^k
  - Weiteres Beispiel: Wie viel verschiedene Zahlenkombinationen existieren an einem 4-stelligen Zahlenschloss mit Ziffern von 0-9?
  - Antwort: $10^4 = 10000$ Möglichkeiten
- Ziehen ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge der gezogenen Kugeln
  - Anzahl der Möglichkeiten: $\frac{N!}{(N-k)!}$
  - Weitere Erläuterung: Bei N Kugeln hat man beim Ziehen der ersten Kugel N Möglichkeiten zu ziehen, bei der zweiten Kugel $(N-1)$ Möglichkeiten, $\ldots$, bei der k-ten Kugel $(N-k+1)$ Möglichkeiten.
- Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge der gezogenen Kugeln
  - Anzahl der Möglichkeiten: $\binom{N}{k} = \frac{N!}{(N-k)!k!}$ (Binomialkoeffizient)
  - Erläuterung: Ausgehend von dem obigen Ziehen mit Beachtung der Reihenfolge ist nun durch die Anzahl der Kombinationen zu dividieren, die bei Nichtbeachtung der Reihenfolge äquivalent werden. Dies entspricht gerade $k!$ Kombinationen, da die erste Zahl beliebig auf N Plätzen permutiert werden kann, die zweite auf $N-1$ Plätzen, usw..
- Ziehen mit Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge der gezogenen Kugeln
  - Anzahl der Möglichkeiten: $\binom{N+k-1}{N-1} = \binom{N+k-1}{k} = \frac{(N+k-1)!}{(N-1)!k!}$

– Beispiel: Auswahl von k Kugeln Eis aus N verschiedenen Eissorten. Da eine Kombinationsmöglichkeit eindeutig durch die Anzahl an Kugeln von der jeweiligen Eissorte charakterisiert ist, lässt sich das Problem als Auswahl von k Kugelpositionen aus $N + k - 1$ Positionen (bspw. in einer Tabelle) aufgefasst werden. Anschaulich ist dies auf Slide 24-25 aus (`https://user.phil.hhu.de/~petersen/MaGruLa_Folien/Petersen_math_grundl_7.pdf`) für $N = 5, k = 3$ dargestellt.

2 Wahrscheinlichkeitsbegriff

Ein paar Definitionen:

- Zufallsexperiment (kein kausaler Zusammenhang, Ausgang nur von Zufall abhängig): Beschreibung durch Festlegung der zu beobachten Ausgänge. Diese werden in der Menge Ω aller möglichen Ergebnisse, auch Ergebnisraum, zusammengefasst. Ω wird von "Experimentator" festgelegt (bspw. das Kugelziehen mit farbigen und nummerierten Kugeln, bei denen das Ergebnis bei Ziehung einer Kugel entweder durch die Farbe der Kugel oder durch ihre Nummerierung dargestellt wird).
- Ereignis: Teilmenge $E \subseteq \Omega$, Elementarereignis: Einelementiges Ereignis $e \in \Omega$. Mengenlehre ist komplett übertragbar, so gibt es bspw. komplementäre oder unvereinbare Ereignisse.
- Empirisches Gesetz der großen Zahlen: Mit wachsender Versuchszahl stabilisiert sich die relative Häufigkeit eines Ereignisses bei einer bestimmten Wahrscheinlichkeit p.
- Laplace-Experiment: Zufallsexperimente, bei denen man aus Symmetriegründen alle Ergebnisse a priori als "gleichberechtigt" ansieht. Beispiel: Werfen eines nicht-gezinkten Würfels, Ziehen aus Urne.
- Wahrscheinlichkeitsverteilung: Eine Funktion[1] $P : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathcal{R}$, die jeder Teilmenge $E \subseteq \Omega$ eine reelle Zahl $P(E)$ zuordnet, für die gilt:
  1) $0 \leq P(E) \leq 1$ für alle $E \subseteq \Omega$,
  2) $P(\Omega) = 1$,
  3) $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ falls $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

2.1 Beispiel einer Wahrscheinlichkeitsverteilung: Die Binomialverteilung

Die Binomialverteilung B ist eine wichtige, diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung, die die Anzahl von Erfolgen in einer Serie von gleichartigen Versuchen mit genau zwei Ergebnissen $\Omega = \{$"Erfolg", "Misserfolg"$\}$ (auch Bernoulli-Prozess genannt) beschreibt. Die Binomialverteilung

$$B(k \mid p, N) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \tag{1}$$

[1] Hierbei bezeichnet $\mathcal{P}(\Omega)$ die Potenzmenge von Ω.

ordnet einer Anzahl von Erfolgen k eine Wahrscheinlichkeit B zu, wenn das Ereignis "Erfolg" mit einer Wahrscheinlichkeit p eintritt und das Zufallsexperiment genau N mal ausgeführt wird. Zweckmäßigerweise kodiert man das Ereignis "Erfolg" mit 1 und "Misserfolg" mit 0.

- Berechnet den Erwartungswert $\mu(k) = \sum_{k=0}^{N} kP(k)$ für $P(k) = B(k \mid p, N)$. Man kann sich über die Linearität des Erwartungswertes leicht überlegen, dass $\mu = Np$. Dies kann man über den binomisches Lehrsatz zeigen (vergleicht bspw. Wikipedia.)
- Zeigt, dass die Varianz $\sigma^2 = \sum_{k=0}^{N}(k-\mu)P(k) = Np(1-p)$ für $P(k) = B(k \mid p, N)$.

2.2 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Fragestellung: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen von Ereignis A wenn ich schon weiß, dass B eingetreten ist? Ziel ist nun aus der Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(E) \in [0,1]$ mit $E \in \Omega$ die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A \mid B)$ (Wahrscheinlichkeit für A bei vorliegendem Ereignis B) zu berechnen.

Bei einem Laplace-Experiment mit diskreten Zufallsvariablen ist dies leicht, da alle einelementigen Ereignisse gleichberechtigt sind. Man kann sich diagramatisch überlegen, dass

$$P(A \mid B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{|A \cap B||\Omega|}{|\Omega||B|} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{2}$$

Für beliebige Wahrscheinlichkeitsverteilungen definiert man nun für $P(B) \neq 0$ die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{3}$$

für das Eintreten von A unter Bedingung B. $P(A \mid B)$ stellt eine neue Wahrscheinlichkeitsverteilung dar. Beispiele für solche Problemstellungen sind:

- Wurf mit sechsseitigem Würfel: A stellt das Ereignis des Würfelns einer geraden Zahl da. Ereignis B stellt das Würfeln von einer Zahl kleiner als 4 dar. Berechne $P(A \mid B)$.
- Ziegenproblem: In einer Spielshow steht ein Kandidat vor der Auswahl aus 3 Türen. Ein Sportwagen und zwei Ziegen werden zufällig auf die drei Türen verteilt. Der Kandidat wählt zufällig eine Tür aus (P("Sportwagen")= 1/3). Daraufhin öffnet der Showmaster eine der anderen beiden Türen, hinter der sich eine Ziege verbirgt. Berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass der Kandidat das Auto gewinnt, wenn er
  a) bei seiner gewählten Tür bleibt,
  b) die gewählte Tür ändert,

unter Verwendung von bedingten Wahrscheinlichkeiten. Es ist sinnvoll, in Ereignissen vor und nach dem Öffnen der durch den Showmaster geöffneten Tür zu unterscheiden. Zudem ist von einem wiederholbaren Zufallsexperiment auszugehen, das für jeden Kandidaten gleich verläuft. Sollte das berechnete Endergebnis zu Verwunderung führen, kann man auch alle möglichen Spielkonstellation (Wahl der Tür, Platzierung des Autos, Wechsel/Nicht-wechsel der gewählten Tür) mit ihrem jeweiligen Ausgang notieren und sich die Wahrscheinlichkeiten durch Abzählen klar machen.