Theoretische Physik 5: Thermodynamik und Statistische Physik

WiSe 2022 / 2023 – Prof. Marc Wagner

Laurin Pannullo: pannullo@itp.uni-frankfurt.de
Marc Winstel: winstel@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 1

Abgabe am 28.10.2022. Besprechung in den Tutorien vom 31.10. - 04.11.2022

Aufgabe 1 [*Stirling-Formel*] (6 Pkt.)

Zeige, dass für große $N \gg 1$ gilt

$$N! \approx \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{\mathrm{e}}\right)^N . \tag{1}$$

Vergewissere dich zudem von der Güte der Approximation, indem du $N = 20$ für die Formel einsetzt und den relativen Fehler errechnest. Ziehe dann den Logarithmus auf beiden Seiten und berechne den relativen Fehler der Approximation von $\ln(N!)$ für $N = 20$.
Hinweis: Es ist hilfreich die Gammafunktion $\Gamma(x)$ zu verwenden. Es gilt $\Gamma(n+1) = n!$ für nichtnegative, ganzzahlige n.

Aufgabe 2 [*Näherung der Binomialverteilung*] (8 Pkt.)

Die Binomialverteilung wurde in der Vorlesung als diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$P(k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \tag{2}$$

definiert, wobei hier von einem Bernoulli-Prozess ausgegangen wird, der in gleicher Weise N-fach durchgeführt wird. Die Binomialverteilung beschreibt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereignis, welches bei einmaligem Ausführen des Bernoulli-Prozesses mit Wahrscheinlichkeit p auftritt, genau k mal eintritt.

(i) Beweise die Aussage, dass für $Np(1-p) \gg 1$ die diskrete Binomialverteilung durch die Normalverteilung genähert werden kann, d.h. dass

$$P(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} \exp\Big(-\frac{(k-\bar{k})^2}{2\sigma_k^2}\Big) \tag{3}$$

mit $\bar{k} = Np$ und $\sigma_k = \sqrt{Np(1-p)}$. Begründe die Güte der Näherung qualitativ.

(ii) Berechne den Erwartungswert und die Varianz der oben gegebenen Normalverteilung. Interpretiere in diesem Zusammenhang die Größen $\bar{k}$ und σ_k.

Aufgabe 3 [*Phasenraumvolumen eines quantenmechanischen Zustands*] (6 Pkt.)

In der Vorlesung wurde das Phasenraumvolumen eines quantenmechanischen Zustands mit f Freiheitsgraden als

$$(2\pi\hbar)^f$$

angegeben. Verifiziere dies indem du für

(i) ein freies, quantenmechanisches Teilchen in einer eindimensionalen Box mit Kantenlänge L,

(ii) ein freies, quantenmechanisches Teilchen in einer dreidimensionalen Box mit Kantenlänge L,

(iii) einen eindimensionalen quantenmechanischen harmonischen Oszillator

das klassische Phasenraumvolumen für Energie $< E$ berechnest und mit der Anzahl der quantenmechanischen Zustände im gleichen Energiebereich vergleichst. Was muss für die Energien E gelten damit so eine Abschätzung sinnvoll ist?