Theoretische Physik 5: Thermodynamik und Statistische Physik

WiSe 2022 / 2023 – Prof. Marc Wagner

Laurin Pannullo: pannullo@itp.uni-frankfurt.de
Marc Winstel: winstel@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 2

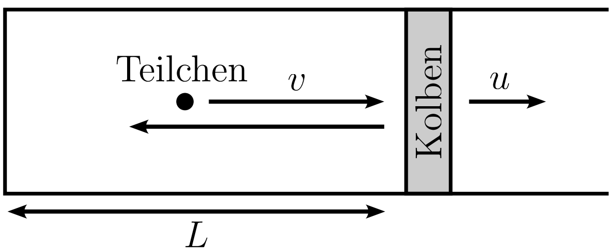
Abgabe am 04.11.2022. Besprechung in den Tutorien vom 07.11.-11.011.2022

Aufgabe 1 [*Ideales Gas in expandierendem Zylinder*] (2+2+3=7 Pkt.)

Wir betrachten ein ideales Gas, das wir als Menge von klassischen Punktteilchen mit der Massen m behandeln. Die N Gasteilchen befinden sich in einem thermisch isolierten Zylindervolumen dessen Länge L durch einen Kolben variiert werden kann. Der Kolben bewegt sich mit der Geschwindigkeit

$$u(t) = \begin{cases} u_0 & 0 \leq t < T \\ -u_0 & T \leq t \leq 2T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

mit $u_0 > 0$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ hat das Volumen die Länge L_0. Um die folgenden Betrachtungen simpler zu gestalten, nehmen wir an, dass sich die Teilchen nur parallel zur Kolbenrichtung bewegen.



In der Vorlesung wurden quasistatische Prozesse als solche definiert, bei denen äußere Parameter sehr langsam verändert werden – solch ein äußerer Parameter ist im obigen Beispiel die Volumenlänge L. Wir wollen nun untersuchen inwiefern eine quasistatische Änderung von L die mikroskopische Betrachtung verändert und das Verhalten von makroskopischen Größen während des Prozesses der Expansion und Kompression eines Kolbens beeinflusst.

(i) Berechne zunächst die Änderung $\Delta\varepsilon$ der kinetischen Energie eines einzelnen Teilchens ε, die das Teilchen mit Geschwindigkeit $\vec{v} = (v, 0, 0)$ durch einen elastischen Stoß am Kolben erfährt. Zeige des Weiteren, dass sich $\Delta\varepsilon$ mit der Längenänderung des Kolben zwischen zwei Reflexionen ΔL als

$$\Delta\varepsilon = -mv^2 \frac{\Delta L}{L} + mv^2 \frac{u}{|v|} \frac{\Delta L}{L}$$

ausdrücken lässt.
Hinweis: Nimm an, dass das Teilchen zwischen den Stößen die Strecke

$v\Delta t = (2L + \Delta L) \approx 2L$ zurücklegt und dabei nicht mit anderen Teilchen kollidiert.

(ii) In der Vorlesung (Gleichung (17) im Skript) wurde die Beziehung $\Delta W_{qs} \leq \Delta W$ angegeben, die aussagt, dass die bei einer Expansion und/oder Kompression an einem Gas verrichtete Arbeit minimal ist, wenn es sich um einen quasistatischen Prozess handelt. Berechne diese minimale Arbeit ΔW_{qs} für das Intervall $[0, T]$ und $[0, 2T]$ (also eine halbe und eine volle Kolbenoszillation) unter der quasistatischen Forderung $u \ll v$.

(iii) Betrachte nun beliebige, endliche Kolbengeschwindigkeiten u_0 und berechne erneut ΔW für das Intervall $[0, T]$ und $[0, 2T]$. Vergleiche mit Deinen Ergebnissen aus (ii) und interpretiere diese im Kontext von Gleichung (17) im Skript.

Aufgabe 2 [*Adiabatisches Theorem*] `(3+2+3=8 Pkt.)`

Wir betrachten nun ein Beispiel für das in der Vorlesung erwähnte Adiabatische Theorem. Die Lektüre von mathematischen Formulierungen und Beweisskizzen des Adiabatischen Theorems kann zum Verständnis der Aufgabe beitragen[1], ist aber nicht zwingend zur Lösung notwendig.

Zur Illustration des Theorems betrachten wir ein quantenmechanisches Teilchen in einer eindimensionalen Box, deren Kantenlänge sich mit der Zeit verändert. Der Hamiltonoperator ist gegeben durch

$$\hat{H}(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x,t), \quad V(x,t) = \begin{cases} 0 & x \in [0, L(t)] \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}, \tag{1}$$

und

$$L(t) = \begin{cases} L_0 & t \leq 0 \\ L_0 + vt & 0 < t \leq T \\ L_0 + vT & T < t \end{cases}, \tag{2}$$

wobei v die konstante Geschwindigkeit der sich "bewegenden Wand" darstellt. Die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung für $0 < t < T$ ist erfüllt durch die Funktionen

$$\phi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{L(t)}} \sin\left(\frac{n\pi}{L(t)} x\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{mvx^2 - 2E_n^0 L_0 t}{2\hbar L(t)}}, \tag{3}$$

wobei $E_n^0 = n^2\pi^2\hbar^2/(2mL_0^2)$ den Energieeigenwert zur Quantenzahl $n = 1, 2, 3, \ldots$ von $H(t = 0)$ darstellt. Für festes t sind $\phi_n(x,t)$ ein Satz vollständiger, orthonormaler Basisfunktionen. Daher kann eine Linearkombination dieser Funktionen mit zeitunabhängigen Koeffizienten c_n verwendet werden, um eine allgemeine Wellenfunktion bei fixiertem $t > 0$ darzustellen.

(i) Überprüfe, dass die $\phi_n(x,t)$ Lösungen der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung mit geeigneten Randbedingungen sind.

[1] Empfehlenswerte Lektüre ist beispielsweise Sakurai & Napolitano, *Modern Quantum Mechanics*, 3. Auflage.

(ii) Das Teilchen sei bei $t = 0$ im Grundzustand

$$\Psi(x, t = 0) = \sqrt{\frac{2}{L_0}} \sin\left(\frac{\pi}{L_0} x\right). \tag{4}$$

Zeige zunächst, dass die Koeffizienten zur Darstellung von Ψ durch ϕ_n sich durch das Integral

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha y^2} \sin(ny) \sin(y) \mathrm{d}y \tag{5}$$

mit $\alpha = mvL_0/(2\pi^2\hbar)$ berechnen lassen.

(iii) Zeige nun, dass für $\alpha \ll 1$ bzw. $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha y^2} \approx 1$ die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen für Zeiten $t > T$ im Grundzustand zu finden ist, 1 beträgt. Interpretiere dein Ergebnis und begründe die Forderung $\alpha \ll 1$ im Kontext des adiabatischen Theorems der Quantenmechanik.

Aufgabe 3 [*Totale Differentialformen*] (1+2+2=5 Pkt.)

(i) Unter welchen Bedingungen ist eine Differentialform $\mathrm{d}w = f_1(x, y)\mathrm{d}x + f_2(x, y)\mathrm{d}y$ ein totales Differential?

(ii) Prüfe, ob die folgenden Ausdrücke totale Differentiale sind:

$$\mathrm{d}f = \left(\ln \frac{x}{y} - 1\right) \mathrm{d}x + \frac{x}{y} \mathrm{d}y \tag{6}$$

$$\mathrm{d}g = \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{x^2 + y^2} \tag{7}$$

$$\mathrm{d}h = xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y \tag{8}$$

Wenn möglich, bestimme die Funktionen $f(x, y), g(x, y), h(x, y)$.

(iii) Es ist folgende Differentialform gegeben:

$$\mathrm{d}\omega = C\mathrm{d}T + P\mathrm{d}V, \tag{9}$$

wobei $PV = Nk_BT$ gilt. Finde die integrierende Funktion $f(T)$, sodass $f(T)\mathrm{d}\omega(T, V)$ eine totale Differentialform darstellt. Integriere $f(T)\mathrm{d}\omega(T, V)$ und drücke das Ergebnis durch T, V aus.