# Theoretische Physik 5: Thermodynamik und Statistische Physik

WiSe 2022 / 2023 – Prof. Marc Wagner

Laurin Pannullo: pannullo@itp.uni-frankfurt.de
Marc Winstel: winstel@itp.uni-frankfurt.de

## Aufgabenblatt 4

*Abgabe am 18.11.2022. Besprechung in den Tutorien vom 21.11. - 25.11.2022*

### Aufgabe 1 [*Ideales Gas in einer Kugel*] (3 Pkt.)

Wir betrachten quantenmechanisch ein ideales Gas bestehend aus $N$ Teilchen, welches in einer Kugel mit Radius $R$ eingeschlossen ist. Betrachte dabei die Kugel als einen kugelförmigen Potentialtopf

$$V(\vec{x}) = \begin{cases} 0 & (r = |\vec{x}| \leqslant R) \\ \infty & (\text{sonst}) \end{cases} . \tag{1}$$

Der Radialteil der Schrödingergleichung in einer solchen Kugel wird gelöst durch

$$R(r) = A j_l(kr), \quad r \leqslant R, \tag{2}$$

wobei $j_l$ sphärische Besselfunktionen sind und der zugehörige Energieeigenwert durch $E = \hbar^2 k^2 / 2m$ gegeben ist. Bestimme den Druck als die verallgemeinerte Kraft zugehörig zur extensiven Zustandsgröße $V$, d.h. über

$$P = -\frac{\partial \overline{E_r(V)}}{\partial V} \tag{3}$$

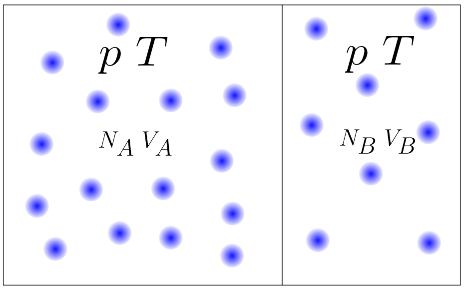
als Funktion von $E$ und $V$.
*Hinweis: Verwende die Nullstellen $X_{nl}$ der Besselfunktionen, um die quantisierten Impulse der einzelnen Teilchen zu bestimmen.*

### Aufgabe 2 [*Gibbssches Paradoxon*] (1+1+1+2=5 Pkt.)

Im Skript, Kapitel 1.7, Gl. (25) wurde der Faktor $1/N!$ eingeführt, um die mehrfache Zählung von Permutationen der Impulsvektoren $\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_N$ in der Summation herauszudividieren und so der Ununterscheidbarkeit der Gasteilchen Rechnung zu tragen. Ohne Verwendung feldtheoretischer Methoden oder der Quantenmechanik ist die Einführung dieses Faktors jedoch schwer zu motivieren. Dies führt zum nach seinem Entdecker benannten Gibbsschen Paradoxon, welches im Folgenden genauer studiert wird.

(i) Gib die mikrokanonische Zustandssumme $\Omega(E, V, N)$ und die Entropie $S(E, V, N)$ des idealen Gases für die naive klassische Rechnung an, d.h. ohne den in der Vorlesung verwendeten Gibbs-Faktor $1/N!$. Ersetze $E$ in $S(E, V, N)$ durch $T$ mithilfe der aus der Vorlesung bekannten Relation für das ideale Gas.

(ii) Wir betrachten nun die Durchmischung zweier idealer Gase (entsprechend mit $A$ bzw. $B$ gekennzeichnet), die aus den gleichen ein-atomigen Gasteilchen bestehen. Wir nehmen an, dass beide Gase sich in geschlossenen




Behältern mit Volumina $V_A$ und $V_B$ befinden, die nur durch eine Wand voneinander separiert sind. Das Gesamtsystem ist abgeschlossen und beide Gase haben dieselbe Temperatur $T$ und denselben Druck $p$, aber voneinander verschiedene Teilchenzahlen $N_A$ und $N_B$. Nach Entfernen der Wand durchmischen sich beide Gase und verteilen sich über den ganzen Behälter. Berechne den Entropiezuwachs $\Delta S$ nach erneutem Erreichen des Gleichgewichtszustands, der durch die Durchmischung von Gas $A$ mit Gas $B$ entsteht, unter Verwendung deiner Resultate aus Aufgabe (i).
*Hinweis: Du kannst annehmen, dass die Temperatur sowie der Druck konstant bleibt.*

(iii) Berechne nun den Entropiezuwachs in demselben Versuchsaufbau, indem du die Formeln für die mikrokanonische Zustandssumme $\Omega$ und die Entropie $S$ aus der Vorlesung verwendest, d.h. indem du die Ununterscheidbarkeit der Gasteilchen respektierst.

(iv) Informiere Dich über das Gibbsche Paradoxon und diskutiere im Hinblick darauf die Unterschiede in den Resultaten aus (ii) und (iii), auch in Bezug auf die auftretenden extensiven und intensiven Zustandsgrößen. Was würde sich qualitativ ändern, wenn in den vorherigen Aufgaben Gas $A$ und Gas $B$ aus verschiedenartigen, ein-atomigen Gasteilchen bestehen?

## Aufgabe 3 [*Teilsystem von harmonischen Oszillatoren*] `(3+2=5 Pkt.)`

Wir betrachten ein System $A$, welches aus $N_A$ klassischen, eindimensionalen, nicht miteinander wechselwirkenden, harmonischen Oszillatoren mit Masse $m$ und Frequenz $\omega$ besteht.

(i) Berechne die mikrokanonische Zustandssumme $\Omega_A(E_A, N_A)$ und die Entropie $S_A$ für $N_A \gg 1$. Zeige außerdem, dass für die Temperatur

$$T_A = \frac{E_A}{N_A k_b} \tag{4}$$

gilt.

System $B$ ist eine dreidimensionale Box mit Volumen $V_B$, in der sich ein freies Gas mit $N_B$ Teilchen befindet. Die beiden Systeme $A$ und $B$ werden nun zu einem Gesamtsystem verbunden. Hierbei können die Teilsysteme Wärme austauschen, aber das Gesamtsystem ist thermisch isoliert. Die Energie des Gesamtsystems ist die Summe der Energien der Teilsysteme, d.h. $E = E_A + E_B$.

(ii) Berechne die Mischtemperaturen $T_A$ und $T_B$ der Systeme im Gleichgewicht. *Bemerkung: Das Ergebnis kann im Rahmen des Gleichverteilungssatzes interpretiert werden, welcher die Verteilung der Gesamtenergie auf die Einzelenergiebeiträge im System beschreibt.*

## Aufgabe 4 [*Temperatur und Magnetisierung von Spins*] (2+3+1+1=7 Pkt.)

In dieser Aufgabe betrachten wir ein System von $N$ Spins $\sigma_i$, welche nur mit einem externen Magnetfeld $h$ interagieren. Dies ist der Spezialfall $J = 0$ des eindimensionalen Isingmodells, welches auf Übungsblatt 3 behandelt wurde. Das System hat die Hamiltonfunktion

$$H = -h \sum_{i=1}^{N} \sigma_i, \tag{5}$$

wobei die Spins die Werte $\sigma_i = \pm 1$ annehmen können. Der Logarithmus der mikrokanonischen Zustandssumme ist

$$\ln \Omega(E, h, N) = N \ln N - \left(\frac{N}{2} - \frac{E}{2h}\right) \ln \left(\frac{N}{2} - \frac{E}{2h}\right) - \left(\frac{N}{2} + \frac{E}{2h}\right) \ln \left(\frac{N}{2} + \frac{E}{2h}\right). \tag{6}$$

(i) Berechne die Temperatur $T(E, h, N)$. Was passiert für $E > 0$? Interpretiere deine Ergebnisse. Skizziere sowohl die Temperatur $T$ also auch die inverse Temperature $\beta = 1/T$ als Funktion von $E$.

(ii) Benutze das vorherige Ergebnis um die Energie $E$ als Funktion von $T$ und $h$ auszudrücken. Berechne damit die Magnetisierung

$$M = -\frac{1}{V} \frac{\overline{\partial E_r}}{\partial h} \tag{7}$$

als Funktion von $T$ und $h$. Skizziere $M$ als Funktion von $h/(k_B T)$.

(iii) Stelle wie in der Vorlesung in Kapitel 1.9.2. einen Ausdruck zur Berechnung von $M$ auf, der auf einer Ableitung der Entropie basiert. Verizifiziere damit dein Ergebnis für $M$ aus (ii).

(iv) Berechne die Arbeit, die am System verrichtet wird, wenn das Magnetfeld von $h = h_0$ auf $h = 0$ abgesenkt wird und die Temperatur dabei konstant gehalten wird. Nimm dabei an, dass der Prozess quasistatisch erfolgt und $h_0/(k_B T) \gg 1$. Berechne außerdem die Wärme, die dem System zugeführt werden muss, um die Temperatur konstant zu halten. Was würde passieren, wenn das System während der Magnetfeldänderung thermisch isoliert ist?