Theoretische Physik 5: Thermodynamik und Statistische Physik

WiSe 2022 / 2023 – Prof. Marc Wagner

Laurin Pannullo: pannullo@itp.uni-frankfurt.de
Marc Winstel: winstel@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 5

Abgabe am 25.11.2022. Besprechung in den Tutorien vom 28.11. - 02.12.2022

Aufgabe 1 [*Entropie eines Gummibandes*] (1+2+2=5 Pkt.)

Wir betrachten ein Gummiband, welches durch eine Kette aus N Gliedern der Länge d modelliert wird. Alle Kettenglieder liegen parallel auf einer Gerade und sind jeweils nach rechts (als verlängerndes Kettenglied) oder links (als verkürzendes Kettenglied) ausgerichtet werden. $n_\pm$ ist die Anzahl der nach parallel nach rechts/links gerichteten Glieder und $|L| \ll Nd$ stellt die vorzeichenbehaftete Länge des Gummibandes dar.

(i) Drücke die Anzahl $\omega(L)$ der möglichen (Kettenglied-)Konfigurationen für eine Gummiband mit Länge L durch $m = n_+ - n_- = L/d$ aus.

(ii) Bestimme, ausgehend von (i), die Entropiedifferenz

$$S(E, L) - S(E, 0) \tag{1}$$

des Gummibandes, wobei E die Energie ist. Nimm an, dass $\Omega(E, L)$ proportional zu $\omega(L)$ ist und somit als $\Omega(E, L) = g(E)\omega(L)$ geschrieben werden kann, wobei $g(E)$ eine unbekannte und für diese Aufgabe irrelevante Funktion ist[1].
Hinweis: Nutze, dass $\frac{m}{N} \ll 1$ und nähere für das finale Ergebnis bis einschließlich zweiter Ordnung in m.

(iii) Berechne zudem die Kraft f, mit der das Gummiband gespannt ist, als verallgemeinerte Kraft zu dem äußeren Parameter L. Interpretiere die Temperaturabhängigkeit von f.

Aufgabe 2 [*Entropieänderung eines idealen Gases*] (1+1+1=3 Pkt.)

Wir möchten die makroskopischen Aussagen des 2. Hauptsatzes mit dem Ergebnis einer mikroskopischen Rechnung vergleichen. Beispielhaft betrachten wir hierfür N Teilchen eines ideales Gas, für dessen Energie die aus der Vorlesung bekannte Relation

$$E = \frac{3Nk_BT}{2} \tag{2}$$

gilt. Wir betrachten einen quasistatischen Prozess, bei dem wir dem Gas Wärme zuführen und die Temperatur von T_0 auf $2T_0$ erhöhen.

[1] Die Anzahl der Mikrozustände hängt von E und L, jedoch wie oben angegeben in spezieller Form. Diese Faktorisierung trat bereits in einem bekannten Beispiel, dem idealen Gas, auf, für welches ebenfalls gilt, dass $\Omega(E, V) = g(E)h(V)$.

(i) Berechne die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen C_V für das ideale Gas.

(ii) Berechne die Änderung der Entropie mithilfe des 2. Hauptsatzes.

(iii) Verifiziere dieses Ergebnis, indem du die Änderung der Entropie mithilfe des mikroskopischen Ausdrucks der Entropie berechnest.

Aufgabe 3 [*Magnetische Kühlung*] `(3+3+6=12 Pkt.)`

Wir betrachten das gleiche Spinsystem wie in Aufgabe 4 auf Blatt 4. Dort haben wir beobachtet, dass man bei einer Absenkung des Magnetfeldes Wärme zuführen muss damit die Temperatur des Systems konstant bleibt. Wäre das System thermisch isoliert gewesen, wäre die Temperatur gesunken. Diesen Effekt nennt man magnetokalorischen Effekt und er wird genutzt um sehr tiefe Temperaturen in geeigneten Systemen zu erreichen. Diese Kühlung findet adiabatisch statt. Wir wollen nun den gleichen Effekt in unserem einfachen Spinmodell untersuchen.

Die zentralen Ergebnisse für die Temperatur, Energie und Magnetisierung[2] des Spinsystems aus Blatt 4 sind

$$T(E,h) = \frac{2h}{k_B \ln\left(\frac{N-\frac{E}{h}}{N+\frac{E}{h}}\right)}, \tag{3}$$

$$E(T,h) = -Nh\tanh\left(\frac{h}{k_B T}\right) = -NhM(T,h). \tag{4}$$

(i) Drücke zunächst die Entropie als Funktion von Temperatur und Magnetfeld aus. Zeige durch explizite Berechnung von linker und rechter Seite, dass

$$\frac{\partial S(h,T)}{\partial h} = N\frac{\partial M(h,T)}{\partial T} \tag{5}$$

gilt [3].

(ii) Benutze diese Relation um einen Ausdruck für $\partial C_h/\partial h$ aufzustellen und zeige damit, dass die Wärmekapazität durch

$$C_h = C_{h=0} + TN\int_0^h \mathrm{d}h' \frac{\partial^2 M(h',T)}{\partial T^2} \tag{6}$$

berechnet werden kann. Skizziere $(C_h - C_{h=0})/N$ als Funktion von $h/(k_B T)$.

(iii) Vor der Abschaltung des Magnetfeldes hat das System die Temperatur T_0 und es liegt das Magnetfeld h_0 an. Berechne nun die Endtemperatur T_1 des thermisch isolierten Systems nachdem das Magnetfeld quasistatisch und adiabatisch ($đQ = 0$) auf $h_1 = 0$ gesenkt wurde. Nimm an,

[2] Auf dem letzten Blatt wurde die verallgemeinerte Kraft, die durch die Ableitung nach dem Magnetfeld berechnet wird, als $\partial\bar{E}_r/\partial h = -MV$ definiert – M ist also eine Magnetisierung pro Volumen. Da das hier betrachtete System nicht vom Volumen abhängt, ist die hier verwendete Definition $\partial\bar{E}_r/\partial h = -NM$ zweckmäßiger – hier ist M also die Magnetisierung pro Spin.

[3] Dieser Ausdruck wird später in der Thermodynamik als Maxwell-Relation bezeichnet und ist allgemein gültig.

dass $h/(k_B T) \ll 1$ während des gesamten Prozesses und nähere daher alle relevanten Ausdrücke in Ordnung $O((h/(k_B T))^2)$. Nimm weiterhin an, dass die Wärmekapazität bei verschwindendem Magnetfeld $C_{h=0} = a^2 N/(k_B T^2)$ beträgt. Skizziere T_1/T_0 als Funktion von h_0/a.
Hinweis: Verwende das Differential der Entropie

$$\mathrm{d}S = \frac{\partial S(h,T)}{\partial h}\mathrm{d}h + \frac{\partial S(h,T)}{\partial T}\mathrm{d}T \tag{7}$$

als Startpunkt und überlege was für die Änderung der Entropie $\mathrm{d}S$ *während dem Prozess gilt.*

Bemerkung: Das nichtinteragierende Spinmodell hat für verschwindendes Magnetfeld eigentlich keine Wärmekapazität, da die einzige Energieform die Interaktion mit dem externen Magnetfeld ist. Die Annahme bezüglich $C_{h=0}$ *soll die Wärmekapazität von realen Systemen modellieren, welche für solche Anwendungen benutzt werden.*