

## Aufgabenblatt 10

Abgabe am 13.01.2023. Besprechung in den Tutorien vom 16.01. - 20.01.2023.

Um die Möglichkeit zu geben ein paar Extrapunkte zu sammeln, sind die Aufgaben auf diesem Blatt insgesamt 25 Punkte wert. Das Blatt wird jedoch nur mit 20 Punkten in der Gesamtpunktzahl aller Blätter gewertet, d.h. man kann auf diesem Blatt 5 Bonuspunkte sammeln. Aufgabe 5 und 6 sind Wiederholungsaufgaben, die Inhalte aus Kapitel 1 und 2 wiederholen, und könnten dem Umfang von möglichen Klausuraufgaben entsprechen.

Wir wünschen euch frohe Feiertage und erholsame Ferien!

### Aufgabe 1 [Thermodynamik mit Quarks] (1+1+1=3 Pkt.)

Diese Aufgabe soll veranschaulichen, dass Thermodynamik gewisse, allgemeine Aussagen über Systeme erlaubt, über die fast keine mikroskopischen Informationen vorhanden sind. Diese Systeme können sich deutlich von den beiden Standardbeispielen der Vorlesung, dem idealen Gas und Spinsystem, unterscheiden.

Wir betrachten ein statisches Quark-Antiquark Paar, welches durch einen Flussschlauch von Gluonen zusammengehalten wird. Der einzige äußere Parameter eines solchen Systems ist die Separation  $r$  des Quarks von dem Antiquark. Gehe im Folgenden davon aus, dass die kanonische Zustandssumme  $Z(T, r)$  vorliegt (diese kann prinzipiell durch numerische QCD-Rechnungen mithilfe von Gitter-QCD ausgerechnet werden).

- (i) Wie lautet die freie Energie  $F$  des Systems ausgedrückt durch  $Z(T, r)$ ?
- (ii) Welche Kraft muss abhängig von  $r$  und  $T$  aufgewendet werden, um das Quark-Antiquark Paar auseinanderzuziehen?
- (iii) Wie lautet die Energie des Grundzustands dieses Systems?

*Anmerkungen: Ein solches System wird als Quarkonium bezeichnet und beschreibt einen gebundenen Zustand eines Quarks mit seinem Antiquark. Die Wechselwirkung des Paares wird durch Gluonen vermittelt, welche die Austauschteilchen der starken Wechselwirkung, beschrieben durch die Quantenchromodynamik (QCD), sind. Ein analoges System aus der Quantenelektrodynamik wäre ein Elektron-Positron Paar, welches durch Photonen miteinander wechselwirkt.*

### Aufgabe 2 [Otto-Kreisprozess] (1+4+2=7 Pkt.)

In dieser Aufgabe betrachten wir den Otto-Kreisprozess. Dieser besteht aus vier Teilschritten.

- 1  $\rightarrow$  2: Adiabatische Kompression von  $V_1$  auf  $V_2 < V_1$ ,
- 2  $\rightarrow$  3: isochore Wärmezufuhr bei Volumen  $V_2$  von  $T_2$  auf  $T_3 > T_2$ ,

- 3 → 4: adiabatische Expansion von  $V_2$  auf  $V_1$ ,
- 4 → 1: isochore Wärmeabfuhr bei Volumen  $V_1$  von  $T_4$  auf  $T_1$ .

Wir nehmen an, dass das Medium in diesem Prozess ein ideales Gas mit Stoffmenge  $\nu$  ist.

- Stelle die Prozesskurve als  $P$ - $V$ - und  $T$ - $S$ -Diagramm dar.
- Berechne für jeden Teilschritt die zugeführte bzw. abgeführte Wärme sowie die verrichtete Arbeit, ausgedrückt durch  $V_1, V_2, T_1, T_2, T_3$  und  $T_4$ .
- Berechne den Wirkungsgrad für eine Wärmekraftmaschine, die den Otto-Kreisprozess verwendet. Drücke ihn ausschließlich durch das Verhältnis  $V_2/V_1$  aus.

**Aufgabe 3** [*Vielteilchensystem mit zwei 1-Teilchenzuständen*] (1+4=5 Pkt.)

Wir betrachten ein Vielteilchensystem von nicht wechselwirkenden Teilchen, in dem nur zwei 1-Teilchenzustände mit gleicher Energie existieren. Diese bezeichnen wir mit  $\uparrow$  und  $\downarrow$ . Wir betrachten das System in drei Varianten, d.h. mit drei verschiedene Teilchenarten:

- unterscheidbare Teilchen,
- ununterscheidbare Bosonen,
- ununterscheidbare Fermionen.

Als Observable betrachten wir  $N_\uparrow$ , welche die Anzahl der Teilchen ist, die bei einer Messung im Zustand  $\uparrow$  gefunden werden.

- Berechne den Ensemblemittelwert  $\overline{N}_\uparrow$  für die betrachteten Teilchenarten.
- Berechne die Standardabweichung  $\Delta N_\uparrow$  von  $N_\uparrow$  vom Mittelwert  $\overline{N}_\uparrow$  für  $N = 1$ , für  $N = 2$  und für große Teilchenzahlen  $N \gg 1$  für die betrachteten Teilchenarten. Wie verhält sich die relative Abweichung  $\Delta N_\uparrow / \overline{N}_\uparrow$ ?

**Aufgabe 4** [*Besetzungszahlen in fermionischen 1-Teilchenzuständen*] (2+1=3 Pkt.)

Diese Aufgabe stellt einen Ausblick auf fortgeschrittene Vielteilchenphysik/Quantenfeldtheorie dar und soll illustrieren, wie fermionische Vertauschungsrelationen zum Pauliprinzip führen. Dies wird in Kapitel 3.2.1 im Skript aus der vollständig asymmetrischen Vielteilchen-Wellenfunktion gefolgert.

Wir betrachten als Beispiel "fermionische" Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren  $c^\dagger, c$ . Diese erfüllen die Anti-Kommutationsrelationen

$$\{c, c^\dagger\} = c c^\dagger + c^\dagger c = 1, \quad \{c, c\} = \{c^\dagger, c^\dagger\} = 0, \quad (1)$$

d.h. die Vertauschung von  $c$  mit  $c^\dagger$  generiert ein negatives Vorzeichen sowie die Addition von 1. Diese Definition ähnelt den Kletteroperatoren des harmonischen Oszillators (HO)  $a^\dagger, a$  mit

$$[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a = 1, \quad [a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0, \quad (2)$$

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad (3)$$

wobei  $|n\rangle$  Eigenzustände des HOs mit Eigenwerten  $E_n$  sind. Der Hamiltonoperator des HOs ist proportional zu  $a^\dagger a$ , welcher hier als Besetzungszahloperator bezeichnet wird. Die Eigenwerte  $n$  des Besetzungszahloperators sind natürliche Zahlen  $n \geq 0$ , sie ähneln also den Besetzungszahlen eines bosonischen 1-Teilchenzustandes. Operatoren der Form  $a^\dagger a$  treten in der Vielteilchenphysik/Quantenfeldtheorie auch für die Besetzungszahloperatoren bosonischer Felder auf. Ebenso findet man in der Vielteilchenphysik/Quantenfeldtheorie Besetzungszahloperatoren der Form  $c^\dagger c$  für fermionische Felder.

- (i) Zeige im Folgenden, dass die Eigenwerte des Operators  $N = c^\dagger c$  nur die Werte 0 und 1 annehmen können. Verwende die Eigenwertgleichung  $N|n\rangle = n|n\rangle$ , wobei  $|n\rangle$  Eigenzustände von  $N$  sind.
- (ii) Gehe davon aus, dass für die Operatoren  $c^\dagger, c$

$$c^\dagger|n\rangle = \alpha|n+1\rangle, \quad c|n\rangle = \beta|n-1\rangle \quad (4)$$

gilt, wobei  $n$  nach (i) nur die Werte 0, 1 annehmen kann. Zeige, dass  $\alpha = 1 - n$  und  $\beta = n$ .

*Bemerkung: In der gesamten Aufgabe werden Kletteroperatoren ausgehend von abstrakten Vertauschungsrelationen betrachtet. Hierbei handelt es sich nicht um bosonische oder fermionische Systeme. Die Vertauschungsrelationen der Operatoren sind allerdings denen von bosonischen oder fermionischen Operatoren in kanonisch quantisierten Systemen nachempfunden. Weiterführende Lektüre findet sich in bspw. in Form von Büchern zur Quantenfeldtheorie.*

### Aufgabe 5 [Wärmeaustausch von Festkörper] (1+3=4 Pkt.)

Wir betrachten zwei, voneinander thermisch isolierte Festkörper  $A$  und  $B$ , die jeweils die Temperaturen  $T_A, T_B$  haben, wobei  $T_A > T_B$ . Nun entfernen wir die thermische Isolation und lassen somit Wärmeaustausch zwischen  $A$  und  $B$  zu. Wir nehmen an, dass die jeweiligen, positiven Wärmekapazitäten  $C_{V,A}$  und  $C_{V,B}$  sowie die Volumina beider Festkörper während des gesamten Prozesses konstant bleiben.

- (i) Berechne die Gleichgewichtstemperatur  $T'$  des Systems.
- (ii) Berechne die gesamte Änderung der Entropie  $\Delta S$ . Betrachte den Spezialfall  $C_{V,A} = C_{V,B} = C$ . Ist der Prozess reversibel?

### Aufgabe 6 [Poröser Luftballon] (3 Pkt.)

Wir betrachten ein abgeschlossenes Volumen  $V_A$  (also kein Wärme-, Teilchen- und Volumenaustausch mit der Umgebung), welches mit  $N_A$  Teilchen eines idealen Gases gefüllt ist. In diesem Volumen befindet sich ein Luftballon, der mit

$N_L$  Teilchen des selben idealen Gases gefüllt ist. Das Material des Luftballons isoliert ihn thermisch, sodass kein Wärmeaustausch mit der Umgebung stattfindet. Das Material ist jedoch flexibel (Volumen des Luftballons ist variabel) und porös (Teilchenaustausch mit dem ihn umgebenden Volumen  $V_A$  ist möglich).

Zeige im Stil von Kapitel 1.9.3 im Skript, dass im Gleichgewicht für die chemischen Potentiale  $\mu_A = \mu_L$  und für den Druck  $P_A = P_L$  gilt.