
Bestimmung der topologischen Suszeptibilität in festen topologischen Sektoren in SU(2) Yang-Mills Theorie

Bachelorarbeit

Lukas Gonglach
25. September 2015

Fachbereich Physik
Institut für theoretische Physik

Erstgutachter:

Prof. Dr. Marc Wagner
Goethe-Universität
Frankfurt am Main
Institut für theoretische Physik

Zweitgutachter:

Prof. Dr. Wolfgang Bietenholz
Universidad Nacional Autónoma de México
Mexico
Instituto de Ciencias Nucleares

Für Monte-Carlo Simulationen, bei denen sich die topologische Ladung Q nicht ständig ändert, ist eine Bestimmung der topologischen Suszeptibilität χ_t über die Definition $\chi_t \equiv (\langle Q^2 \rangle - \langle Q \rangle^2) / V$ nicht weiter möglich. Innerhalb solcher Simulationen, bei welchen die Markov-Kette eines Monte-Carlo Algorithmus sogar vollständig in einem topologischen Sektor eingefroren sein kann, was beispielsweise bei sehr kleinen Gitterabständen geschieht, ist es dennoch von Interesse χ_t zu bestimmen.

Für einen solchen Fall soll hier in 4d SU(2) Yang-Mills Theorie eine Methode von Aoki, Fukaya, Hashimoto und Onogi untersucht werden, die es erlaubt χ_t über die 2-Punkt Korrelationsfunktion $\langle q(0)q(x) \rangle_{|Q|}$ bei fixiertem topologischem Ladungsbetrag $|Q|$ zu bestimmen.

Notation

Einheitensystem

In dieser Bachelorarbeit wird durchgehend das natürliche Einheitensystem verwendet, d.h.

$$\hbar = c = 1$$

Metrik und Tensoren

Die Komponenten von 4er-Vektoren werden mit griechischen Indizes versehen. Ganze räumliche Vektoren werden mit fett gedruckten Buchstaben geschrieben. Wann immer es zu keinen Verwechslungen kommen kann, wie beispielsweise innerhalb der Abhängigkeit von Funktionen, werden der Übersichtlichkeit halber die Indizes komplett weggelassen. Die hier verwendete Minkowskimetrik soll

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sein. Weiterhin soll die Einstein'sche Summenkonvention gelten.

Da größtenteils eine euklidische Metrik, also $diag(1, 1, 1, 1)$, verwendet wird, soll hier vereinbart werden, dass auch dort über gleiche Indizes summiert wird.

Pauli-Matrizen

Die Pauli Matrizen sind:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Inhaltsverzeichnis

1	Motivation	1
2	Physikalische Grundlagen	2
2.1	Pfadintegrale	2
2.2	Wick-Rotation	2
2.3	SU(2) Yang-Mills Theorie	3
2.4	Gitter-Eichtheorie	5
2.5	Monte-Carlo Methoden	7
2.6	Topologische Objekte	7
3	Umsetzung	9
3.1	AFHO-Methode	9
3.2	Monte-Carlo heatbath	9
3.3	Cooling-Verfahren	10
4	Ergebnispräsentation	12
5	Diskussion und Fazit	25
6	Literatur	27
7	Danksagung	28

1 Motivation

Die Methode, um Pfadintegrale innerhalb von Quantenfeldtheorien numerisch lösen zu können, ist die der Gitter-Quantenfeldtheorie (*Gitter-QFT*). Dabei werden die benötigten Feldkonfigurationen nach Monte-Carlo Methoden simuliert. Für eine exakte numerische Lösung der Pfadintegrale solcher Quantenfeldtheorien, die eine zugrunde liegende topologische Struktur aufweisen – wie etwa in Quantenchromodynamik –, ist es notwendig Eichfeldkonfigurationen unterschiedlichster topologischer Ladungen in die Rechnungen miteinzubeziehen.

Die unterschiedlichen topologischen Sektoren, also diejenigen Konfigurationen verschiedener topologischer Ladung, sind durch große Barrieren der Wirkung voneinander getrennt. Die Größe dieser Barrieren steigt zudem für kleiner werdende Gitterabstände, sodass Monte-Carlo Algorithmen bei zu geringem Gitterabstand in topologischen Sektoren eingefroren bleiben.

Weil daraus folgend eine Miteinbeziehung verschiedener topologischer Sektoren zur Bestimmung von Pfadintegralen ausbleibt, treten bei solchen Berechnungen systematische Fehler auf. Dennoch ist es für Simulationen dieser Art von Interesse physikalische Größen korrekt ausrechnen zu können.

Bisher existieren keine Algorithmen, bei denen ein solches „Einfrieren“ ausbleibt, sodass es für immer feinere Gitter von wachsendem Interesse sein wird Größen innerhalb topologischer Sektoren berechnen zu können.

Im Folgenden wird daher innerhalb dieser Arbeit eine Methode von Sinya Aoki, Hidenori Fukaya, Shoji Hashimoto und Tetsuya Onogi untersucht, die durch die Berechnung der 2-Punkt Korrelationsfunktion $\langle q(0)q(x) \rangle_{|Q|}$ die Bestimmung der topologischen Suszeptibilität χ_t ermöglicht. Diese Methode basiert auf einer Reihenentwicklung von $\langle q(0)q(x) \rangle_{|Q|}$ in Potenzen von $1/V$.

Diese Arbeit befasst sich mit SU(2) Yang-Mills Theorie. Ergebnisse daraus lassen jedoch Rückschlüsse auf die Anwendbarkeit des hier verwendeten Verfahrens auf beispielsweise Quantenchromodynamik zu.

Zum Aufbau dieser Bachelorarbeit: In Kapitel 2 werden zunächst die wichtigsten theoretischen Grundlagen kurz rekapituliert. Dabei wird insbesondere auf die Pfadintegralformulierung, SU(2) Yang-Mills Theorie und Gitter-Eichtheorie eingegangen. In Kapitel 3 wird dann eine Übersicht der Umsetzung zur Bestimmung der topologischen Suszeptibilität gegeben. Es wird darin die AFHO-Methode zur Bestimmung von χ_t vorgestellt, sowie eine Erläuterung des Cooling-Verfahrens gegeben.

Untersucht wurde in dieser Arbeit die Anwendbarkeit der AFHO-Methode auf unterschiedlich große isotrope Gitter. Dazu wurden sowohl Rechnungen für on-axis, als auch off-axis Abstände angestellt. Neben diesen hyper-kubischen werden auch anisotrope Gitter der Form $V = 2L \times L$ betrachtet. Ergebnisse dieser Berechnungen werden in Kapitel 4 präsentiert.

Literatur, welche eine ähnliche Problematik wie hier betrachtet, ist beispielsweise [1]. Eine Untersuchung der AFHO-Methode für ein anderes Modell findet sich in [2].

2 Physikalische Grundlagen

Zu Beginn sollen innerhalb dieses Kapitels kurz die für diese Arbeit wichtigsten physikalischen Grundlagen wiederholt werden.

2.1 Pfadintegrale

Eine der bedeutendsten Erkenntnisse für die numerische Behandlung von Quantenfeldtheorien ist, dass sich Übergangsamplituden der Form

$$\langle \phi_b(\mathbf{x}), t_b | \phi_a(\mathbf{x}), t_a \rangle \equiv \langle \phi_b(\mathbf{x}) | e^{-i\hat{H}(t_b-t_a)} | \phi_a(\mathbf{x}) \rangle \quad (2)$$

durch Pfadintegrale ausdrücken lassen

$$\langle \phi_b(\mathbf{x}), t_b | \phi_a(\mathbf{x}), t_a \rangle = \int_{\phi(\mathbf{x}, t_a) = \phi_a(\mathbf{x})}^{\phi(\mathbf{x}, t_b) = \phi_b(\mathbf{x})} \mathcal{D}\phi \exp(iS[\phi]). \quad (3)$$

Das Integrationsmaß $\mathcal{D}\phi \equiv \prod_x d\phi(x)$ ist dabei als Integration über alle möglichen Feldkonfigurationen zu verstehen und $S[\phi]$ bezeichnet deren Wirkung.

Die Propagation von Teilchen wird durch sogenannte Vakuumerwartungswerte

$$\langle \Omega | \hat{\phi}(x_b) \hat{\phi}(x_a) | \Omega \rangle. \quad (4)$$

beschrieben. Hierbei bezeichnet $|\Omega\rangle$ das quantenfeldtheoretische Vakuum und $\hat{\phi}(x)$ einen Operator, welcher auf das Vakuum angewandt ein ϕ -Teilchen am Raumzeitpunkt x erzeugt.

Es lässt sich leicht zeigen [3], dass solche Vakuumerwartungswerte wiederum durch Übergangsamplituden ausgedrückt werden können, sodass sie ebenfalls über Pfadintegrale gegeben sind

$$\langle \Omega | \hat{\phi}(x_b) \hat{\phi}(x_a) | \Omega \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi \phi(x_a) \phi(x_b) \exp(iS[\phi]), \quad (5)$$

wobei

$$Z \equiv \int \mathcal{D}\phi \exp(iS[\phi]) \quad (6)$$

und $\langle \phi | \Omega \rangle \neq 0$ sein muss.

Näheres dazu kann in [3] nachgelesen werden.

2.2 Wick-Rotation

Das Pfadintegral hat einen Gewichtungsfaktor der Form $\exp(iS[\phi])$. Dieser beschreibt für größer werdende Wirkungen der Feldkonfigurationen $S[\phi]$ einen immer stärker oszillierenden Beitrag. Für numerische Zwecke sind solche Oszillationen unvorteilhaft, weswegen im Rahmen derartiger Behandlungen die Zeit als imaginäre Größe aufgefasst wird. Umgesetzt wird dies, indem man die Zeit als Gerade in der imaginären Ebene definiert

$$t \equiv \exp(-i\alpha) \tau, \quad (7)$$

mit $\tau \in \mathbb{R}$ und schließlich statt $\alpha \rightarrow 0$ (Minkowskimetrik) $\alpha = \frac{\pi}{2}$ setzt, um eine euklidische Metrik zu etablieren, denn

$$x_\mu x^\mu = t^2 - \mathbf{x}^2 \stackrel{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}}{\equiv} -\tau^2 - \mathbf{x}^2. \quad (8)$$

Durch diesen Übergang erhält das Pfadintegral die Form

$$\langle \phi_b(\mathbf{x}), \tau_b | \phi_a(\mathbf{x}), \tau_a \rangle = \int \mathcal{D}\phi \exp(-S_E[\phi]), \quad (9)$$

wobei S_E die euklidische Wirkung bezeichnet, die mittels der oben angegebenen Substitution aus der gewöhnlichen Wirkung hervorgeht.

Man erkennt, dass der Gewichtungsfaktor nun keine Oszillation mehr beschreibt, sondern eine exponentielle Unterdrückung all derjenigen Feldkonfigurationen bewirkt, welche eine sehr große Wirkung und somit eine große Abweichung vom „klassischen Pfad“ aufweisen.

Zu beachten ist hierbei, dass die euklidische Formulierung des Pfadintegrals bzw. des Vakuumerwartungswerts nicht länger die tatsächliche Propagation physikalischer Teilchen beschreibt, sondern vielmehr ein abstraktes mathematisches Konstrukt ist. Dennoch können aus dieser Formulierung noch immer physikalische Größen gewonnen werden.

2.3 SU(2) Yang-Mills Theorie

Im Folgenden wird die im vorangegangenen Abschnitt besprochene euklidische Metrik verwendet.

Die in dieser Bachelorarbeit untersuchte Eichtheorie ist die der SU(2), also der Gruppe der speziellen (d.h. $\det = +1$) unitären 2×2 Matrizen.

Die SU(2) ist eine Lie-Gruppe, d.h. jedes Element G der Gruppe ist durch

$$G(x) = \exp\left(-i \sum_{a=1}^3 \alpha^a(x) \hat{T}_a\right) \quad (10)$$

darstellbar, wobei $\hat{T}_a \equiv \frac{\sigma_a}{2}$ die Generatoren der SU(2) in der fundamentalen Darstellung und σ_a die Pauli-Matrizen aus Gl.(1) sind.

Im Weiteren wird kein Augenmerk mehr auf die Stellung der Farbindizes (hier a) gelegt, da die dem Farbraum zugrunde liegende Metrik die triviale euklidische Metrik ist. Eine Summation über gleiche Farbindizes ist daher immer zu verstehen und wird nicht explizit angegeben.

Sei nun

$$A_\mu(x) \equiv A_\mu^a(x) \hat{T}_a \quad (11)$$

ein matrixwertiges Feld, welches sich unter lokalen, sprich explizit raumzeitabhängigen, SU(2) Transformationen gemäß

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) \equiv G(x) \left(A_\mu(x) + \frac{i}{g} \partial_\mu \right) G^\dagger(x) \quad (12)$$

verhält, wobei g die Kopplungskonstante ist. Weiterhin sei

$$F_{\mu\nu}(x) \equiv \frac{i}{g}[D_\mu(x), D_\nu(x)] \equiv F_{\mu\nu}^a(x)\hat{T}_a \quad (13)$$

mit dem Kommutator $[A, B] = AB - BA$ und der kovarianten Ableitung

$$D_\mu(x) \equiv \partial_\mu - igA_\mu(x) \quad (14)$$

der matrixwertige Feldstärketensor.

Die kovariante Ableitung transformiert sich gemäß Gl.(12) und Gl.(14)

$$\begin{aligned} D_\mu(x) \rightarrow D'_\mu(x) &= \partial_\mu - igA'_\mu(x) \\ &= \partial_\mu - ig \left(G(x) \left[A_\mu(x) + \frac{i}{g}\partial_\mu \right] G^\dagger(x) \right) \\ &= \partial_\mu - \partial_\mu [G(x)G^\dagger(x)] - igG(x)A_\mu(x)G^\dagger(x) + G(x)\partial_\mu G^\dagger(x) \\ &= \partial_\mu - [\partial_\mu G(x)]G^\dagger(x) - igG(x)A_\mu(x)G^\dagger(x) \\ &= G(x) [G^\dagger(x)\partial_\mu - G^\dagger(x)(\partial_\mu G(x))G^\dagger(x) - igA_\mu(x)G^\dagger(x)] \\ &= G(x) [G^\dagger(x)\partial_\mu + G^\dagger(x)G(x)(\partial_\mu G^\dagger(x)) - igA_\mu(x)G^\dagger(x)] \\ &= G(x) [\partial_\mu - igA_\mu(x)] G^\dagger(x) \\ &= G(x)D_\mu(x)G^\dagger(x), \end{aligned} \quad (15)$$

wodurch das Transformationsverhalten des Feldstärketensors ebenfalls festgelegt ist

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}(x) \rightarrow F'_{\mu\nu}(x) &= \frac{i}{g}[D'_\mu(x), D'_\nu(x)] \\ &= G(x) [D_\mu(x)D_\nu(x) - D_\nu(x)D_\mu(x)] G^\dagger(x) \\ &= G(x)F_{\mu\nu}(x)G^\dagger(x). \end{aligned} \quad (16)$$

Gesucht wird nun eine eichinvariante Kombination von Feldstärketensoren, welche zur Beschreibung der Dynamik der Felder $A_\mu(x)$ in einer Lagrange Dichte \mathcal{L} dienen könnte. Ein solcher Ausdruck ist gegeben durch

$$\mathcal{L}_{YM}(A_\mu, \partial_\mu A_\nu) \equiv \frac{1}{2g^2} Tr(F_{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)), \quad (17)$$

denn dieser transformiert sich gemäß Gl.(16) wie

$$\begin{aligned} Tr(F_{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)) &\rightarrow Tr(F'_{\mu\nu}(x)F'_{\mu\nu}(x)) = Tr(G(x)F_{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)G^\dagger(x)) \\ &= Tr(G^\dagger(x)G(x)F_{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)) \\ &= Tr(F_{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)), \end{aligned} \quad (18)$$

da die Spur zyklisch unter Vertauschungen ist.

Der oben angegebene Ausdruck kann auch umgeschrieben werden zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{2g^2} Tr(F_{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)) &= \frac{1}{2g^2} F_{\mu\nu}^a(x)F_{\mu\nu}^b(x) Tr(\hat{T}_a\hat{T}_b) \\ &= \frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu}^a(x)F_{\mu\nu}^b(x)\delta_{ab} \\ &= \frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu}^a(x)F_{\mu\nu}^a(x), \end{aligned} \quad (19)$$

weil die Generatoren der SU(2) der Normierung

$$\text{Tr} \left(\hat{T}_a \hat{T}_b \right) = \frac{1}{2} \delta_{ab} \quad (20)$$

genügen.

Die Wirkung für das SU(2) Yang-Mills Feld ist somit mittels Gl.(17) durch den Ausdruck

$$\begin{aligned} S_E &= \int_V d^4x \mathcal{L}_{YM} (A_\mu, \partial_\mu A_\nu) \\ &= \frac{1}{4g^2} \int_V d^4x F_{\mu\nu}^a(x) F_{\mu\nu}^a(x) \end{aligned} \quad (21)$$

gegeben, mit V einem beliebigen Raumzeitvolumen und d^4x einem infinitesimalen Raumzeitelement.

2.4 Gitter-Eichtheorie

Die bisher gezeigte Methode der Feldquantisierung per Pfadintegralen ist bislang nur in beschränktem Maße nützlich. Das Integrationsmaß $\mathcal{D}\phi$ verlangt eine Integration über sämtliche Feldkonfigurationen ϕ , sodass überabzählbar viele Integrationen durchzuführen wären, um Pfadintegrale zu berechnen. Außer für den Fall der quadratischen Wirkung, das heißt, dass nur quadratische Terme der Variablen in der Lagrange Dichte vorkommen, sind diese Integrationen allgemein nicht umsetzbar.

Um dies zu beheben, ist ein Übergang von einer kontinuierlichen Raumzeit zu einer diskreten notwendig. Dazu wird ein Raumzeit-Gitter eingeführt, welches einen festen Gitterabstand a besitzt. Des Weiteren werden für dieses Gitter eine endliche Ausdehnung und periodische Randbedingungen gefordert. Dadurch treten zwar Diskretisierungs- und Periodizitätsfehler auf, allerdings sind Pfadintegrale somit zumindest mathematisch wohldefiniert und für endliche Gitterausdehnungen verbleiben nun nur noch endlich viele Integrationen.

Zur numerischen Bestimmung quantenfeldtheoretischer Größen wird es daher notwendig für die bisher erlangten Kontinuumsgrößen diskretisierte Versionen aufzustellen.

Angemerkt sei noch, dass, da es sich bei dem Raumzeitpunkt $x^\mu \equiv an^\mu$, ($n^\mu \in \mathbb{Z}^4$) nicht länger um eine kontinuierliche Größe handelt, eine Indizierung der raumzeitabhängigen Größen (z.B. ϕ_x) angebracht wäre. Der Übersichtlichkeit halber soll jedoch darauf verzichtet und weiterhin $\phi(x)$ geschrieben werden.

Ein Integral sei auf dem Gitter definiert als

$$\int d^4x \phi(x) \rightarrow \sum_x a^4 \phi(x). \quad (22)$$

Ableitungen auf dem Gitter sind nicht eindeutig, man definiert

$$\partial_\mu \phi(x) \rightarrow \Delta_\mu^f \phi(x) \equiv \frac{\phi(x + a\hat{\mu}) - \phi(x)}{a} \quad (23)$$

als die Vorwärts-Ableitung und dementsprechend

$$\partial_\mu \phi(x) \rightarrow \Delta_\mu^b \phi(x) \equiv \frac{\phi(x) - \phi(x - a\hat{\mu})}{a} \quad (24)$$

als Rückwärts-Ableitung. $\hat{\mu}$ bezeichnet den Gitter-Einheitsvektor in μ -Richtung. Es ist nun sofort ersichtlich, dass sich Ableitungsterme gemäß

$$\Delta_\mu^f \phi(x) \rightarrow (\Delta_\mu^f \phi(x))' = \frac{G(x + a\hat{\mu})\phi(x + a\hat{\mu}) - G(x)\phi(x)}{a} \quad (25)$$

transformieren, sofern sich die Felder $\phi(x)$ verhalten wie $\phi(x) \rightarrow \phi'(x) \equiv G(x)\phi(x)$. Analog zur Vorgehensweise im Kontinuum wird auch auf dem Gitter eine kovariante Ableitung \mathcal{D}_μ^f eingeführt, welche sich gemäß

$$\mathcal{D}_\mu^f \phi(x) \rightarrow (\mathcal{D}_\mu^f \phi(x))' \equiv G(x)\mathcal{D}_\mu^f \phi(x) \quad (26)$$

transformieren soll. Offenbar muss dazu die kovariante Ableitung definiert werden als

$$\mathcal{D}_\mu^f \phi(x) \equiv \frac{U(x, x + a\hat{\mu})\phi(x + a\hat{\mu}) - \phi(x)}{a} \quad (27)$$

und die sogenannten Link-Variablen $U(x, y)$ müssen sich transformieren wie

$$U(x, y) \rightarrow U'(x, y) \equiv G(x)U(x, y)G^\dagger(y). \quad (28)$$

Die Links $U(x, y)$ nehmen daher die Rolle der Eichfelder A_μ aus dem Kontinuum ein.

Da hier eine reine Eichtheorie betrachtet werden soll, ist nun ein Term gesucht, der analog zu Gl.(17) die Dynamik des Eichfelds auf dem Gitter beschreibt.

Zunächst soll hierfür der folgende Ausdruck betrachtet werden

$$\begin{aligned} P_{\mu\nu}(x) &\equiv U(x, x + a\hat{\mu})U(x + a\hat{\mu}, x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu})U(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}, x + a\hat{\nu})U(x + a\hat{\nu}, x) \\ &\equiv U_\mu(x)U_\nu(x + a\hat{\mu})U_\mu^\dagger(x + a\hat{\nu})U_\nu^\dagger(x). \end{aligned} \quad (29)$$

Das Transformationsverhalten ist

$$\begin{aligned} P_{\mu\nu}(x) \rightarrow P'_{\mu\nu}(x) &= G(x)U_\mu(x)G^\dagger(x + a\hat{\mu})G(x + a\hat{\mu})U_\nu(x + a\hat{\mu})G^\dagger(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}) \times \\ &\quad \times G(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu})U_\mu^\dagger(x + a\hat{\nu})G^\dagger(x + a\hat{\nu})G(x + a\hat{\nu})U_\nu^\dagger(x)G^\dagger(x) \\ &= G(x)P_{\mu\nu}(x)G^\dagger(x). \end{aligned} \quad (30)$$

Man bezeichnet $P_{\mu\nu}(x)$ auch als *Plaquette*. Sie beschreibt eine geschlossene Verknüpfung von Gitterpunkten eines Quadrats mit Kantenlänge a in der $\mu\nu$ -Ebene (kleinster Loop). Demnach ist die einfachste Kombination von Link-Variablen, welche invariant ist unter lokalen Eichtransformationen gegeben durch

$$\sum_x \sum_{\mu\nu; \mu < \nu} \text{Tr}(P_{\mu\nu}(x)). \quad (31)$$

Um jedoch im Kontinuumslimites $a \rightarrow 0$ den Ausdruck aus Gl.(21) zu erhalten, muss die Wirkung auf dem Gitter definiert werden als (siehe z.B. [4])

$$S_{gauge}[U] \equiv \frac{2N}{g^2} \sum_P \left(1 - \frac{1}{2N} \text{Tr}(P_{\mu\nu}(x) + P_{\mu\nu}^\dagger(x)) \right), \quad (32)$$

wobei N die Dimension der $SU(N)$ Eichtransformation ist und der Summationsindex P als Summe über alle Plaquettes gemäß Gl.(31) zu verstehen ist.

Speziell für $SU(2)$ Transformationen ergibt sich entsprechend

$$S_{gauge}[U] \equiv \frac{2}{g^2} \sum_P \text{Tr} \left(\mathbb{1}_{2 \times 2} - \frac{1}{2} [P_{\mu\nu}(x) + P_{\mu\nu}^\dagger(x)] \right). \quad (33)$$

Für nähere Betrachtungen siehe z.B. [4] oder [5].

2.5 Monte-Carlo Methoden

Die in den vorangegangenen Kapiteln besprochene Diskretisierung der Raumzeit erlaubt es Pfadintegrale numerisch zu lösen. Allerdings ist es offensichtlich, dass noch immer zu viele Berechnungen nötig wären, um ein solches Pfadintegral tatsächlich exakt lösen zu können.

Der Gewichtungsfaktor innerhalb des Pfadintegrals stellt eine exponentielle Unterdrückung all derjenigen Konfigurationen dar, die eine sehr große Wirkung aufweisen. Daher liefern diese Konfigurationen einen nur sehr geringen Anteil am gesamten Pfadintegral. Konfigurationen nahe der „klassischen Bewegungsgleichungen“, also einem Minimum der Wirkung, tragen jedoch einen viel höheren Anteil bei. In Monte-Carlo Simulationen werden daher Feld- bzw. Link-Konfigurationen gemäß ihres Gewichtungsfaktors erzeugt, was bedeutet, dass mit erhöhter Wahrscheinlichkeit solche Feldkonfigurationen erstellt werden, welche eine kleine Wirkung aufweisen, wohingegen das Generieren von Konfigurationen mit steigender Wirkung unwahrscheinlicher wird (*important sampling*).

Ein solcher Algorithmus basiert auf sogenannten Markov-Ketten, welche aus Zuständen bestehen, denen alle möglichen Feldkonfigurationen entsprechen, sowie aus Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den einzelnen Konfigurationen entsprechend dem zuvor genannten Prinzip.

Aufgrund der Tatsache, dass die Gewichtung nun in den Konfigurationen selbst enthalten ist, kann ein Pfadintegral schlicht als Mittelwert bestimmt werden.

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int D\phi O(\phi) \exp(-S_E[\phi]) \rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N O(\{\phi\}_i) \quad (34)$$

Da eine unendliche Anzahl an Konfigurationen nicht umsetzbar ist, rechnet man numerisch bis zu einer Ordnung N und erhält dann einen Fehler der Größenordnung $\mathcal{O}(N^{-\frac{1}{2}})$.

Mehr über Monte-Carlo Simulationen kann beispielsweise in [4] oder [6] nachgelesen werden.

2.6 Topologische Objekte

Das Hauptaugenmerk dieser Arbeit liegt auf der Betrachtung topologischer Größen innerhalb der SU(2) Yang-Mills Theorie, wovon die Wichtigsten hier aufgezeigt werden sollen.

Man betrachte dazu zunächst die Wirkung der SU(2) Yang-Mills Theorie Gl.(21)

$$\begin{aligned} S_E &= \frac{1}{4g^2} \int_{\mathcal{V}} d^4x F_{\mu\nu}^a(x) F_{\mu\nu}^a(x) \\ &= \frac{1}{4g^2} \int_{\mathcal{V}} d^4x \left(\pm F_{\mu\nu}^a(x) \tilde{F}_{\mu\nu}^a(x) + \frac{1}{2} \left(F_{\mu\nu}^a(x) \mp \tilde{F}_{\mu\nu}^a(x) \right)^2 \right) \\ &\geq \pm \frac{1}{4g^2} \int_{\mathcal{V}} d^4x F_{\mu\nu}^a(x) \tilde{F}_{\mu\nu}^a(x). \end{aligned} \quad (35)$$

Hierbei stellt

$$\tilde{F}_{\mu\nu}^a(x) \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} F_{\sigma\rho}^a(x) \quad (36)$$

den dualen Feldstärketensor dar.

Mit der Definition

$$Q[A] \equiv \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x F_{\mu\nu}^a(x) \tilde{F}_{\mu\nu}^a(x) \quad (37)$$

gilt (*Bogomol'nyi Band*, siehe z.B. [7])

$$S_E \geq \frac{8\pi^2}{g^2} |Q|. \quad (38)$$

Die soeben definierte Größe Q heißt topologische Ladung. Es lässt sich zeigen, dass sie unter kontinuierlichen Deformationen des Systems eine Erhaltungsgröße ist und außerdem stets ganzzahlige Werte annimmt, $Q \in \mathbb{Z}$ (siehe z.B. [4]).

Jeder klassischen Lösung der euklidischen Bewegungsgleichungen kann demnach eine topologische Ladung zugeordnet werden.

Klassische Lösungen, welche topologische Ladung $Q = \pm 1$ aufweisen, werden als *Instantone* ($Q = +1$) bzw. *Anti-Instantone* ($Q = -1$) bezeichnet. Alle Lösungen höherer Ladungen dann dementsprechend als *Multi-Instantone/Anti-Instantone*.

Als topologischer Sektor werden im Folgenden all diejenigen Feldkonfigurationen benannt, welche gleiche topologische Ladung besitzen.

Man spricht vom Integrand in Gl.(37)

$$q(x) \equiv \frac{1}{32\pi^2} F_{\mu\nu}^a(x) \tilde{F}_{\mu\nu}^a(x) \quad (39)$$

als topologische Ladungsdichte $q(x)$.

Der Quotient aus Varianz der topologischen Ladung und betrachtetem Raumzeitvolumen V

$$\chi_t \equiv \frac{\langle Q^2 \rangle - \langle Q \rangle^2}{V} \quad (40)$$

wird topologische Suszeptibilität χ_t genannt.

Sie ist unter anderem für die Beschreibung der Massendifferenz zwischen η - und η' -Meson von Bedeutung (Witten-Veneziano Mechanismus [8] [9]).

3 Umsetzung

Nachdem die theoretischen Grundlagen aufgezeigt wurden, soll nun ein Überblick über die Umsetzung gegeben werden. Dabei werden die wichtigsten Verfahren erklärt, welche innerhalb dieser Arbeit für Berechnungen verwendet wurden.

3.1 AFHO-Methode

Ziel dieser Bachelorarbeit ist die Bestimmung der topologischen Suszeptibilität in festen topologischen Sektoren. Die Motivation dahinter ist die Folgende:

Bei der numerischen Behandlung solcher Eichtheorien, die eine nicht triviale Topologie aufweisen, wie es bei SU(2) Yang-Mills Theorie der Fall ist, frieren Monte-Carlo Rechnungen für zu geringe Gitterabstände in topologischen Sektoren ein. Die somit erzeugten Konfigurationen stellen daher nicht länger eine repräsentative Menge an Eichfeldkonfigurationen für ein physikalisches System dar. Dennoch ist es von Interesse für solche Simulationen physikalische Größen ausrechnen zu können.

Die hier untersuchte Größe ist die topologische Suszeptibilität χ_t , welche nur durch Konfigurationen gleicher topologischer Ladung – also innerhalb fixer topologischer Sektoren – bestimmt werden soll.

Die Theorie hinter einer solchen Berechnung wurde von Sinya Aoki, Hidenori Fukaya, Shoji Hashimoto und Tetsuya Onogi entwickelt, woher der Name AFHO-Methode stammt, siehe [10].

Der zentrale Teil für diese Arbeit besteht darin, dass es eine Reihenentwicklung der 2-Punkt Korrelationsfunktion $\langle q(0)q(x) \rangle_{|Q|}$ in $\frac{1}{V}$ für große Separationen, sprich große Volumina V in Einheiten des Gitterabstands, gibt. Hierbei steht $q(x)$ für die topologische Ladungsdichte am Punkt x und der Index $|Q|$ deutet an, dass nur Konfigurationen mit festem topologischen Ladungsbetrag zur Berechnung der 2-Punkt Korrelationsfunktion verwendet werden. Nach [10] gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \langle q(0)q(x) \rangle_{|Q|} \approx -\frac{\chi_t}{V} + \frac{1}{V^2} \left(Q^2 - \frac{c_4}{2\chi_t} \right) \quad (41)$$

Der Faktor

$$c_4 \equiv \frac{1}{V} (3\langle Q^2 \rangle^2 - \langle Q^4 \rangle) \quad (42)$$

gibt dabei die Abweichung der topologischen Ladung Q von der Gaußverteilung an (kurtosis). Da dieser Beitrag sehr klein ist (siehe z.B. [11] für SU(3) Yang-Mills Theorie) wird er im weiteren Verlauf nicht weiter beachtet, sodass gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \langle q(0)q(x) \rangle_{|Q|} \approx -\frac{\chi_t}{V} + \frac{Q^2}{V^2} \quad (43)$$

Mittels dieser Formel wird im Rahmen dieser Arbeit die topologische Suszeptibilität innerhalb fester topologischer Sektoren berechnet.

3.2 Monte-Carlo heatbath

Zum Erstellen von Eichfeldkonfigurationen unterschiedlicher Gitterausdehnungen wurde ein Monte-Carlo heatbath Algorithmus nach [6] verwendet. Dieser erzeugt Konfigurationen gemäß des Prinzips, welches in Kapitel 2.5 angesprochen wurde. Dabei ist zu beachten,

dass ein solcher Algorithmus stets eine gewisse Zeit benötigt, um Konfigurationen nach der geforderten Verteilung zu generieren. Dieser *Thermalisierungszeit* wurde dadurch Genüge getan, dass stets die ersten 1000 Konfigurationen nicht genutzt und anschließend, um die Unabhängigkeit der Konfigurationen voneinander zu gewährleisten, nur jede hundertste erstellte Konfiguration für Rechnungen verwendet wurde.

Auf diese Weise wurden für unterschiedliche Gittergrößen je 400.000 Konfigurationen erstellt, sodass für die Rechnungen davon 3.990 genutzt werden konnten. Die Kopplungskonstante β wurde dabei auf $\beta = 2,5$ festgelegt, was einem Gitterabstand von ca. $0,073 fm$ entspricht, sofern die Skala durch die Festlegung des Sommer-Parameters r_0 auf $r_0 = 0,46 fm$ gegeben ist (Der Sommer-Parameter ist über die statische Kraft $F(r)$ zwischen Quark und Antiquark gegeben. Für $r_0 = 0,46 fm$ ergibt sich $|F(r_0)r_0^2| = 1,65$), siehe [12].

3.3 Cooling-Verfahren

Für die Berechnung der topologischen Suszeptibilität nach Gl.(43) ist es zunächst notwendig die topologische Ladung jeder einzelnen Feldkonfiguration festzustellen. Da die auf die soeben erklärte Art erstellten Konfigurationen im Allgemeinen kein Minimum der euklidischen Wirkung aufweisen, ist es notwendig UV Fluktuationen innerhalb der Konfigurationen zu entfernen, ohne dabei die zugrunde liegende topologische Struktur zu zerstören. Anschließend kann gemäß Gl.(38) eine topologische Ladung zugeordnet werden.

Auf dem Gitter wird ein solches Cooling-Verfahren umgesetzt, indem der Wert des Eichfeldes bzw. der Links auf jedem Gitterpunkt so verändert wird, dass eine lokale Minimierung der Wirkung eintritt. Ein solcher Durchgang auf jedem Punkt des Gitters wird im Folgenden als Cooling-sweep bezeichnet.

Anders als für das Generieren von Konfigurationen wird hierbei jedoch nicht die zuvor besprochene Plaquetten-Wirkung verwendet, da bei dieser Wirkung bereits niedrige Ordnungen im Gitterabstand vernachlässigt werden. Denn definiert man eine Linkvariable U im Kontinuum gemäß

$$U(x, y) = \hat{P} \left\{ \exp \left(-ig \int_x^y dz_\nu A_\nu(z) \right) \right\}, \quad (44)$$

wobei \hat{P} der Pfadordnungsoperator ist, so weist dieser Link zwar das gewünschte Transformationsverhalten nach Gl.(28) auf, um jedoch für den dazugehörigen Gitterausdruck

$$U(x, x + a\hat{\mu}) = \hat{P} \left\{ \exp \left(-ig \int_x^{x+a\hat{\mu}} dz_\nu \tilde{A}_\nu(z) \right) \right\} \quad (45)$$

die Forderung

$$\lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{D}_\mu^f \phi(x) = D_\mu \phi(x), \quad (46)$$

mit \mathcal{D}_μ^f nach Gl.(27) und D_μ nach Gl.(14), zu erfüllen, ist es notwendig bereits Diskretisierungseinflüsse der Ordnung $\mathcal{O}(a^2)$ zu verwerfen. Sollen daher höhere Ordnungen des Gitterabstands berücksichtigt werden, so ist es nötig sogenannte *verbesserte* Definitionen (improved definitions) der Gitterausdrücke zu verwenden. So wird für die Festlegung der Wirkung einer Konfigurationen beim Cooling-Verfahren die folgende Definition benutzt:

$$S_{gauge}[U] \equiv \frac{\beta}{16} \sum_x \sum_{\mu\nu} \sum_{\Delta=1,2,3} \frac{c_\Delta}{\Delta^4} Tr \left(\mathbb{1}_{2 \times 2} - W_{\mu\nu}^{(\Delta \times \Delta)}(x, U) \right) \quad (47)$$

Hierbei ist $\beta \equiv \frac{1}{4g^2}$ und $W^{(\Delta \times \Delta)}$ ein gemittelter Loop der Größe $\Delta \times \Delta$. Zur Bestimmung der topologischen Ladungsdichte wird

$$q(x, U) \equiv \frac{1}{16\pi^2} \sum_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \sum_{\Delta=1,2,3} \frac{c_\Delta}{\Delta^4} F_{\mu\nu}^{(\Delta \times \Delta)}(x, U) F_{\alpha\beta}^{(\Delta \times \Delta)}(x, U) \quad (48)$$

mit dem über Loops der Größe $\Delta \times \Delta$ gemittelten dimensionslosen Feldstärketensor $F_{\mu\nu}^{(\Delta \times \Delta)}(x, U)$ definiert. Die Parameter c_Δ werden wie folgt gewählt: $c_1 = 1, 5$, $c_2 = -0, 6$ und $c_3 = 0, 1$.

Neben dem zuvor genannten Grund wird ein *improved Cooling*-Verfahren jedoch vor allem für eine „stabilere“ Bestimmung der topologischen Ladung verwendet. Bei zu intensivem Cooling kann es vorkommen, dass die topologische Struktur, welche der Konfiguration zugrunde liegt, zerstört wird. Das bedeutet, dass Instantone auf dem Gitter entfernt werden. Zur Vermeidung einer solchen Zerstörung werden daher die genannten Verbesserungen benutzt, sodass selbst bei intensiverem Cooling die topologische Struktur intakt bleibt.

Ist die topologische Ladung $Q = \sum_x q(x)$ festgelegt, werden alle Konfigurationen nach ihren entsprechenden Ladungswerten sortiert und schließlich der Korrelator Gl.(43) berechnet.

Mehr zum Thema Cooling-Verfahren und insbesondere improved-Cooling kann unter [13] nachgelesen werden.

4 Ergebnispräsentation

Vorab einige Worte über die erwarteten Ergebnisse durch die AFHO-Methode:

Nach Gl.(43) wird angenommen, dass sich für $x \rightarrow \infty$ der Wert von $\langle q(0)q(x) \rangle_{|Q|}$ einem Plateau annähert. Diese Plateaus sollten je nach Größe der topologischen Ladung voneinander differieren. Weiterhin wird für $Q = 0$ ein negativer Wert der 2-Punkt Korrelationsfunktion vorhergesagt, denn

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \langle q(0)q(x) \rangle_0 \approx -\frac{\chi_t}{V},$$

wobei V das Gittervolumen darstellt. Für größer werdende $|Q|$ sollte dieser Wert dann immer positiver werden. Betrachtet man die Separation zwischen den einzelnen Sektoren, so müsste diese gemäß Gl.(43) invers proportional zum Gittervolumen V sein und somit für wachsende Gittervolumina abnehmen. Außerdem sind zwischen Sektoren höherer topologischer Ladung die Separationen größer zu erwarten.

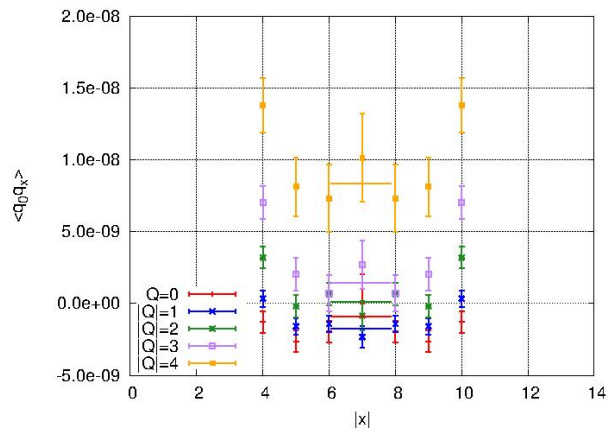
Um dieser Signalunterdrückung für große Volumina entgegenzuwirken, wurden zur Berechnung von $\langle q(0)q(x) \rangle_{|Q|}$ sogenannte *all-to-all Korrelationen* verwendet. Das bedeutet für die Bestimmung der 2-Punkt Korrelationsfunktionen wurden die Translations- und Rotationssymmetrien isotroper Gitter ausgenutzt. Dazu wurde über alle Gitterpunkte mit Abstand $|x|$, die damit einen Beitrag zu $\langle q(0)q(x) \rangle_{|Q|}$ liefern, gemittelt. Ein solches Vorgehen führt zu einer Verbesserung der Statistik.

V	$Q = 0$	$ Q = 1$	$ Q = 2$	$ Q = 3$	$ Q = 4$
14^4	1003	1585	872	383	110
16^4	729	1363	930	571	261
18^4 (16.000 Konfig.)	2356	4468	3552	2553	1518

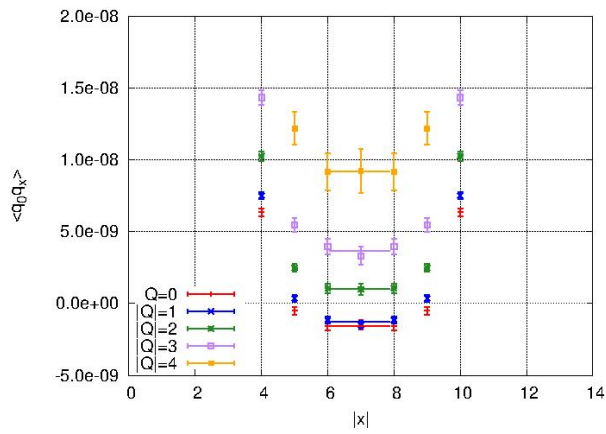
Tabelle 1: Anzahl an Konfigurationen eines topologischen Sektors $0 \leq |Q| \leq 4$ für unterschiedliche Gittergrößen. Die topologische Ladung wurde nach $N_{Cool} = 8$ zugeordnet.

Bevor qualitative Ergebnisse erzeugt werden können, ist es zunächst notwendig eine angemessene Anzahl an Cooling-sweeps zu finden. Werden zu wenige Cooling-sweeps verwendet, sind noch zu starke UV Fluktuationen in den Konfigurationen enthalten. Dieses Rauschen überlagert die zugrunde liegende topologische Struktur und führt somit zu einer ungenauen Bestimmung der topologischen Ladung einer jeden Konfiguration.

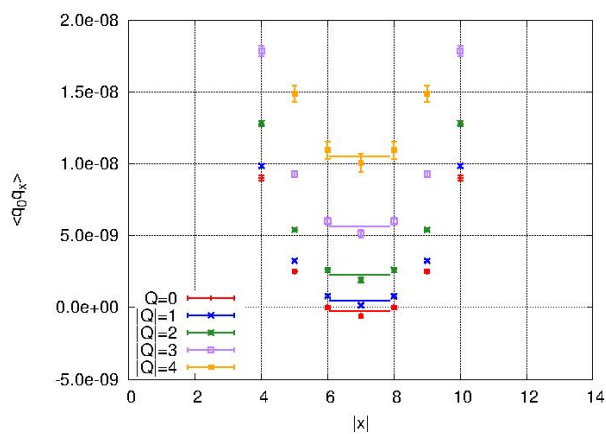
Für das kleinste hier verwendete hyper-kubische Gitter der Größe $V = 14^4$ in Gittereinheiten wurden daher Untersuchungen bei unterschiedlicher Anzahl an Cooling-sweeps angestellt, die eine bestmögliche Wahl der Cooling-sweeps (nachfolgend stets N_{Cool} genannt) ergeben sollten. Einige der Ergebnisse daraus sind in Abbildung 1 für $N_{Cool} = 5, 8, 20$ aufgetragen. Die dabei betrachteten topologischen Sektoren sind $Q = 0, |Q| = 1, 2, 3, 4$. Da die Anzahl der Konfigurationen höheren Ladungsbetrags zu gering ist, um präzise Resultate zu erzielen, wurden diese in weiteren Betrachtungen stets ausgelassen.



(a) $N_{Cool} = 5$



(b) $N_{Cool} = 8$



(c) $N_{Cool} = 20$

Abbildung 1: $\langle q(0)q(x) \rangle_{|Q|}$ als Funktion von $|x|$ für verschiedene N_{Cool} , $V = 14^4$ und $0 \leq |Q| \leq 4$.

Die Verteilung der verwendeten Konfigurationen auf die unterschiedlichen Sektoren für das 14^4 und weiterer isotroper Gitter ist in Tabelle 1 gezeigt.

Wie erwartet, ist eine Separation der unterschiedlichen topologischen Sektoren beobachtbar. Der Wert der 2-Punkt Korrelationsfunktion $\langle q(0)q(x) \rangle_{|Q|}$ bei großen Abständen steigt von einem sich abzeichnenden Plateau im Negativen bei $Q = 0$ für größer werdende $|Q|$ ins Positive hin an.

Es ergibt sich, dass sich die geforderten Plateaus am deutlichsten für eine Anzahl an Cooling-sweeps von $N_{Cool} = 8 - 10$ herausstellen.

Für größer werdende N_{Cool} zeigt sich eine Verringerung der statistischen Fehler (siehe Abbildung 1 (c)). Dieser Effekt ist dadurch zu erklären, dass das Cooling-Verfahren UV Rauschen aus den Konfigurationen entfernt. Neben diesem Effekt ist auch ein Verschlechtern der Ausbildung von Plateaus erkennbar. Um dies zu verstehen, muss zunächst etwas genauer auf das Cooling-Verfahren eingegangen werden.

Anregungen einer reinen Yang-Mills Theorie werden *Glueballs* genannt. Diese Anregungen sind mit einer gewissen Ausdehnung auf dem Gitter lokalisiert. Das Cooling-Verfahren führt zu einem „Verschmieren“ lokaler Größen des Gitters (*smearing*), wodurch die Ausdehnung der Anregungen zunimmt. Bei größer werdender Ausdehnung der Glueballs steigt auch ihr Überlapp mit $q(x)|\Omega\rangle$. Die Abweichung von den Plateaus stammt von solchen Anregungen. Erhalten diese Glueballs nun durch intensives Cooling einen größeren Überlapp mit $q(x)|\Omega\rangle$ und somit auch einen größeren Beitrag zur 2-Punkt Korrelationsfunktion $\langle q(0)q(x) \rangle_{|Q|}$, so führen sie zu einer größeren Abweichung von den Plateaus (Für eine genauere Betrachtung der Zusatände, die zu $\langle q(0)q(x) \rangle_{|Q|}$ beitragen, siehe [14]).

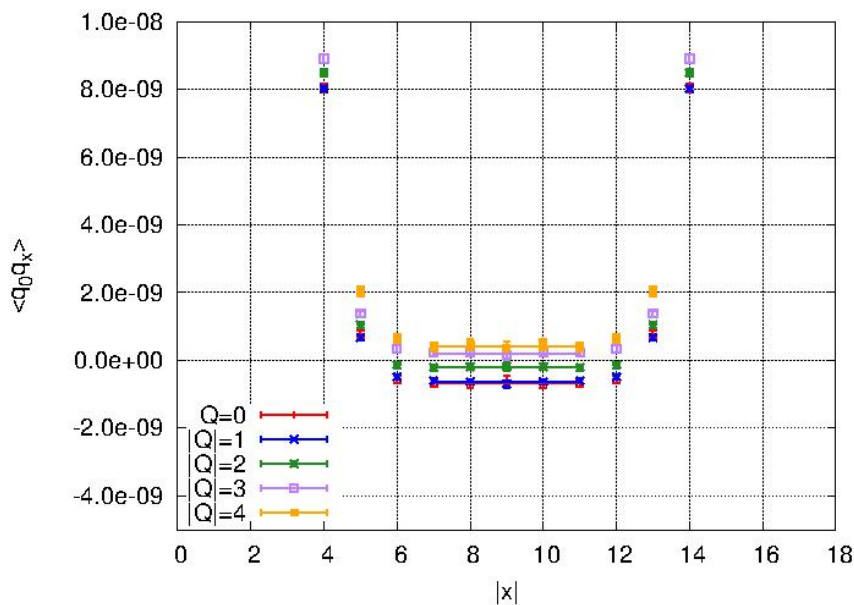


Abbildung 2: $\langle q(0)q(x) \rangle_{|Q|}$ als Funktion der Separation $|x|$ für $V = 18^4$ und $N_{Cool} = 8$ bei 16.000 verwendeten Konfigurationen.

Nach diesen Untersuchungen wurden nachfolgend stets Rechnungen für $N_{Cool} = 8$ und 10 durchgeführt.

Bei den vorangegangenen Ergebnissen wurde auch deutlich, dass Konfigurationen einer Größe von 14^4 nicht genügend Daten bei großen Abständen liefern, um von tatsächlichen Plateaus sprechen zu können. Da diese Plateaus maximal aus 3 Punkten bei $6 \leq |x| \leq 8$ bestehen, wobei $|x| = 8$ aufgrund der Periodizität mit $|x| = 6$ übereinstimmt, sind größere Gitter nötig um qualitative Aussagen geben zu können. Zum Erzeugen größerer Plateaus bei denen eine vernünftige Bestimmung der topologischen Suszeptibilität χ_t möglich ist, wurden deshalb Konfigurationen der Größe 16^4 und 18^4 erstellt.*

Für derartige Gitter ist aufgrund des hohen Volumens eine sehr geringe Separation der einzelnen topologischen Sektoren zu erwarten. Deshalb wurden für on-axis Berechnungen bei $V = 18^4$ 16.000 Konfigurationen zur Bestimmung von $\langle q(0)q(x) \rangle_{|Q|}$ verwendet, damit ein Auflösen der unterschiedlichen Sektoren gewährleistet ist. Eine solche Vervielfachung der Anzahl an Konfigurationen führt nach der bekannten Fehlerabschätzung für Monte-Carlo Simulationen zu einer Halbierung der Fehlerwerte.

Ergebnisse dieser $V = 18^4$ Rechnungen sind für $N_{Cool} = 8$ in Abbildung 2 zu finden. Die daraus folgenden Werte für χ_t können Tabelle 2 entnommen werden, wobei dort auch Ergebnisse für $V = 18^4$ mit 4.000 Konfigurationen zu sehen sind, welche im Rahmen von [*] entstanden.

N_{Konfig}	N_{Cool}	$Q = 0$	$ Q = 1$	$ Q = 2$	$ Q = 3$	Kombiniert
4.000 [*]	8	7,1(14)	5,8(10)	7,4(12)	9,2(19)	7,3(17)
	10	6,2(10)	5,9(10)	6,6(9)	8,7(11)	7,9(13)
16.000	8	7,0(7)	7,6(5)	5,9(6)	6,4(7)	6,9(4)
	10	7,0(6)	6,3(4)	6,0(6)	5,6(5)	6,3(3)

Tabelle 2: Werte der topologischen Suszeptibilität $\chi_t \times 10^5$ in den Sektoren $0 \leq |Q| \leq 3$ für $V = 18^4$ bei einer Anzahl an Konfigurationen von $N_{Konfig} = 4.000, 16.000$, sowie unterschiedlichen N_{Cool} . Die Fehlerwerte wurden mit 10^6 multipliziert. Für die rot gezeichneten Werte gilt $\frac{Q}{\chi_t V} \geq 0,5$.

Wie eindeutig zu erkennen ist, hat die Separation zwischen den einzelnen Sektoren stark abgenommen. Dennoch sind die richtige Reihenfolge der topologischen Sektoren, sowie der negative Wert für $Q = 0$ noch immer klar ersichtlich. Eine ausgeprägte Plateauausbildung ist über eine Spanne von 5 Punkten, $7 \leq |x| \leq 11$, erkennbar.

Alle Fits für diese und folgende Rechnungen wurden für diejenigen Bereiche durchgeführt in den $\frac{Q}{\chi_t V} < 0,5$ gilt. Diese Bedingung entspricht dem Entwicklungskoeffizienten in der Herleitung von Gl.(43) [10].

Werte, welche in der Spalte „Kombiniert“ angegeben sind, stammen aus einem Fit bei dem die Werte aller topologischen Sektoren simultan angefitet wurden. Das bedeutet zur

Mehrere Personen waren an der Untersuchung der AFHO-Methode beteiligt. Die Resultate daraus befinden sich derzeit noch in der Prüfung zur Veröffentlichung unter dem Titel „Measuring the Topological Susceptibility in a Fixed Sector“. Mit [] gekennzeichnete Daten stammen aus dieser Zusammenarbeit und sind im Literaturverzeichnis nochmals explizit erwähnt.

Bestimmung des Fitparameters χ_t wurde die Funktion $f(x, Q) = -\frac{\chi_t}{V} + \frac{Q^2}{V^2}$ verwendet. Als Referenzwert für die topologische Suszeptibilität dient $\chi_t = 7,0(9) \times 10^{-5}$ [13] bei nicht-fixierter Topologie.

V	Abstand	$Q = 0$	$ Q = 1$	$ Q = 2$
16^4	on-axis [*]	7,4(10)	5,4(7)	6,5(9)
	off-axis $\sqrt{2}$	5,7(5)	6,4(4)	7,7(4)
	off-axis $\sqrt{3}$	5,7(6)	6,9(4)	6,6(5)
Kombiniert		6,3(4)	6,5(3)	7,2(3)

V	Abstand	$Q = 0$	$ Q = 1$	$ Q = 2$
18^4	on-axis	7,0(6)	6,3(4)	6,0(6)
	off-axis $\sqrt{2}$	6,2(7)	7,5(5)	6,0(6)
	off-axis $\sqrt{3}$	5,4(7)	5,7(5)	6,0(7)
Kombiniert		6,3(4)	6,5(3)	5,9(3)

Tabelle 3: Werte der topologischen Suszeptibilität $\chi_t \times 10^5$ in den Sektoren $Q = 0$, $|Q| = 1, 2$ bei $N_{Cool} = 10$ für $V = 16^4$ und $V = 18^4$. Die Fehlerwerte wurden mit 10^6 multipliziert.

Es konnte gesehen werden, dass die gezeigten on-axis Berechnungen nur eine sehr begrenzte Anzahl an Daten für die Bestimmung der topologischen Suszeptibilität χ_t liefern. Für $V = 18^4$ sind es lediglich 5 Punkte, die ein Plateau ausbilden, $7 \leq |x| \leq 11$.

Eine Möglichkeit, um größere Plateaus zu erzeugen, ist daher die Betrachtung von off-axis Abständen. Das heißt statt wie bisher Distanzen entlang einer Achse zu betrachten, werden nun 2-Punkt Korrelationsfunktionen $\langle q(0)q(x) \rangle_{|Q|}$ für allgemeinere Abstände $|x|$ bestimmt. Hier soll sich auf solche off-axis Abstände beschränkt werden, die in der Diagonalen von Ebenen (im Folgenden als off-axis $\sqrt{2}$ bezeichnet) und dreidimensionalen Würfeln (off-axis $\sqrt{3}$) liegen, also solche, die einen Faktor $\sqrt{2}$ bzw. $\sqrt{3}$ zum Abstand der on-axis Berechnungen besitzen. Dieses Vorgehen sollte eine Vergrößerung der Plateaus bewirken, sodass selbst für Gitter geringer Ausdehnung mehr Punkte zur Verfügung stehen, um die sich ausbildenden Plateaus zu fitten.

In Abbildung 3 und 4 sind einige dieser off-axis Rechnungen für jeweils einen topologischen Sektor zusammen mit den on-axis Daten aufgetragen. Die daraus resultierenden Werte der topologischen Suszeptibilität für $Q = 0$ und $|Q| = 1, 2$ befinden sich in Tabelle 3. Auch diese Berechnungen erlauben es, wie bereits bei den on-axis Abständen, all-to-all Korrelationen für die Bestimmung von $\langle q(0)q(x) \rangle_{|Q|}$ zu verwenden. Für eine Verbesserung der Statistik wurden daher auch hier all-to-all Korrelationen benutzt.

Betrachtet man nun diese Ergebnisse werden die Erwartungen bestätigt. Für das $V = 16^4$ Gitter zeichnen sich nun – statt wie bisher 3 Punkte – Plateaus mit bis zu 5 Punkten bei off-axis $\sqrt{2}$ bzw. bis zu 9 Punkten bei off-axis $\sqrt{3}$ ab.

Ähnliches ergibt sich für $V = 18^4$. Dort vergrößern sich die Plateaus von 5 Punkten auf 9 bei off-axis $\sqrt{2}$ bzw. bis zu 11 bei off-axis $\sqrt{3}$.

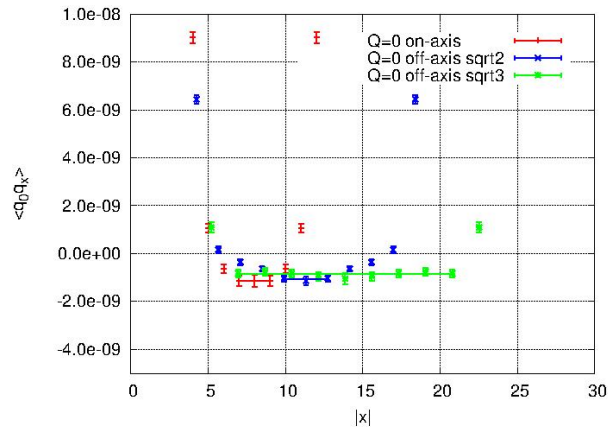
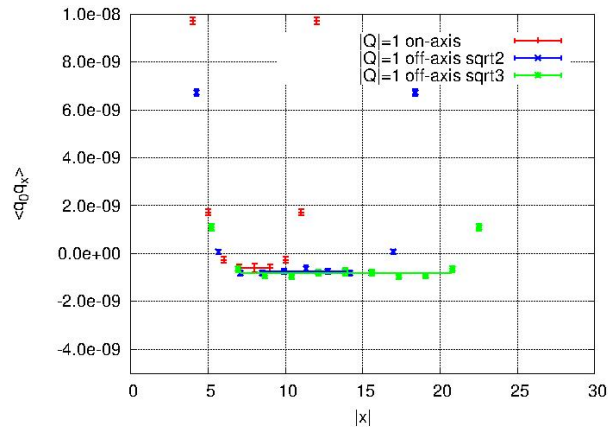
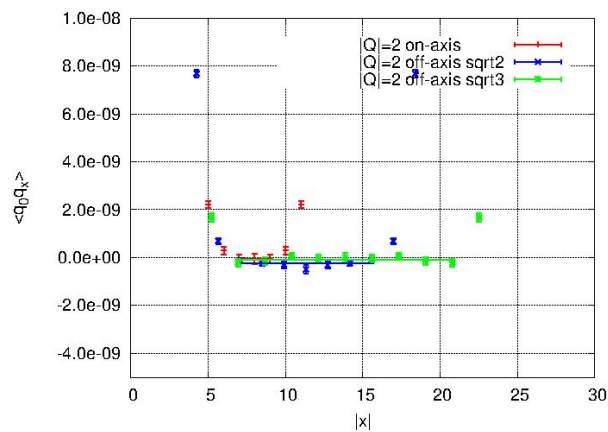
(a) $Q = 0$ (b) $|Q| = 1$ (c) $|Q| = 2$

Abbildung 3: $\langle q(0)q(x) \rangle$ in topologischen Sektoren mit $Q = 0$ und $|Q| = 1, 2$ für $N_{Cool} = 10$ und $V = 16^4$. Gezeigt sind sowohl on-axis Abstände, als auch off-axis Abstände der Diagonalen in einer Ebene ($\sqrt{2}$) und eines 3d Würfels ($\sqrt{3}$).

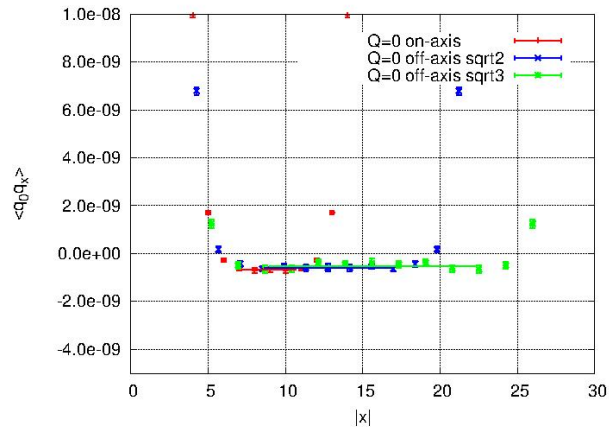
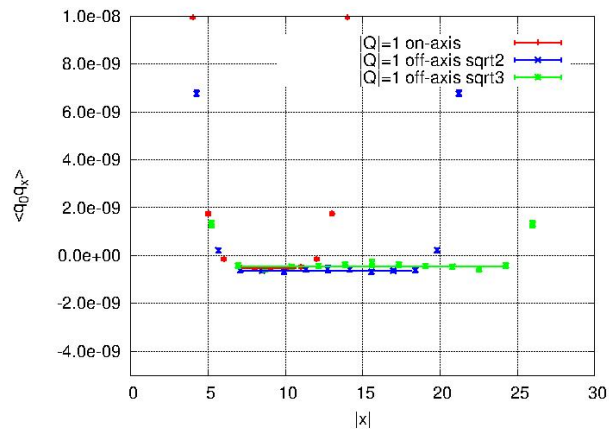
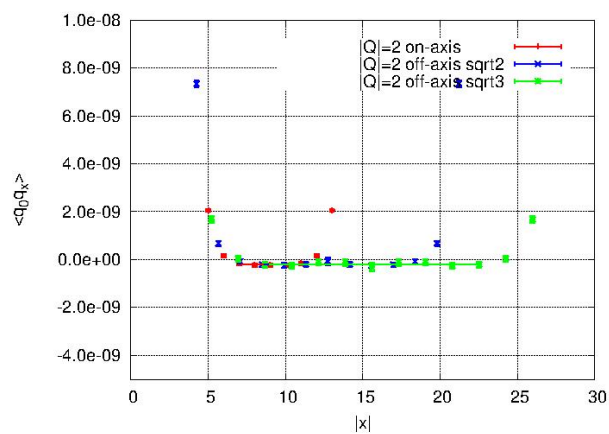
(a) $Q = 0$ (b) $|Q| = 1$ (c) $|Q| = 2$

Abbildung 4: $\langle q(0)q(x) \rangle$ in topologischen Sektoren mit $Q = 0$ und $|Q| = 1, 2$ für $N_{Cool} = 10$ und $V = 18^4$. Gezeigt sind sowohl on-axis Abstände, als auch off-axis Abstände der Diagonalen in einer Ebene ($\sqrt{2}$) und eines 3d Würfels ($\sqrt{3}$).

N_{Cool}	Abstand	$Q = 0$	$ Q = 1$	$ Q = 2$
8	off-axis $\sqrt{2}$	5,9(6)	6,3(5)	7,8(7)
	off-axis $\sqrt{3}$	7,2(6)	7,7(4)	7,1(9)
Kombiniert		6,6(4)	7,2(4)	7,3(5)

N_{Cool}	Abstand	$Q = 0$	$ Q = 1$	$ Q = 2$
10	off-axis $\sqrt{2}$	6,6(5)	6,3(4)	7,5(5)
	off-axis $\sqrt{3}$	6,8(4)	7,2(3)	6,4(5)
Kombiniert		6,7(3)	6,8(3)	6,9(4)

Tabelle 4: Werte der topologischen Suszeptibilität $\chi_t \times 10^5$ in den Sektoren $Q = 0$, $|Q| = 1, 2$ bei $N_{Cool} = 10$ für $V = 14^4$. Die Fehlerwerte wurden mit 10^6 multipliziert. Für die rot gezeichneten Werte gilt $\frac{Q}{\chi_t V} \geq 0,5$.

Interessant sind solche off-axis Berechnungen vor allem für diejenigen Gitter bei denen die on-axis Rechnungen zu keinen wirklichen Plateaus führen.

Wie in Abbildung 1 gesehen werden konnte, ist dies für $V = 14^4$ der Fall. Eine Betrachtung von off-axis Abständen bei diesen Konfigurationen ist daher naheliegend.

Abbildung 5 zeigt die errechneten Werte der 2-Punkt Korrelationsfunktion für derartige Distanzen. Da ein Vergleich mit on-axis Rechnungen hier ausbleibt, sind nur die off-axis Werte geplottet.

In Tabelle 4 sind die dazugehörigen Werte der topologischen Suszeptibilität aufgetragen.

Besonders bei niedriger topologischer Ladung sind dort im Gegensatz zu den on-axis Berechnungen eindeutige Plateaus über 3 (off-axis $\sqrt{2}$) bzw. 5 Punkte (off-axis $\sqrt{3}$) erkennbar.

Die in der Zeile „Kombiniert“ angegebenen Werte in Tabelle 3 und 4 stammen aus einem Fit bei dem sowohl off- als auch on-axis Werte zusammen verwendet wurden.

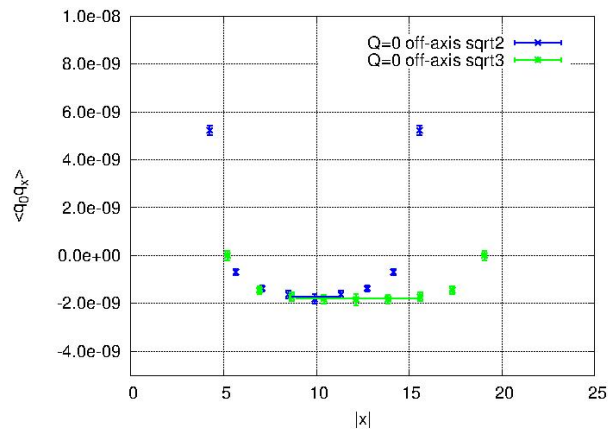
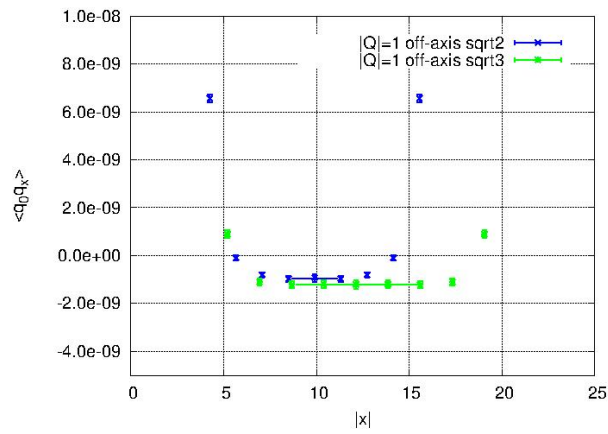
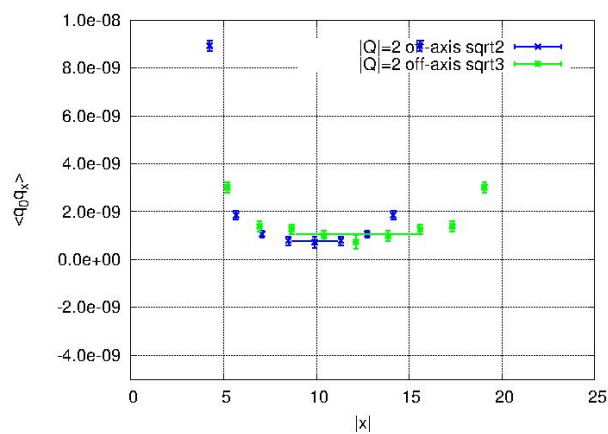
(a) $Q = 0$ (b) $|Q| = 1$ (c) $|Q| = 2$

Abbildung 5: $\langle q(0)q(x) \rangle$ in topologischen Sektoren mit $Q = 0$ und $|Q| = 1, 2$ für $N_{Cool} = 10$ und $V = 14^4$. Gezeigt sind off-axis Abstände der Diagonalen in einer Ebene ($\sqrt{2}$) und eines 3d Würfels ($\sqrt{3}$).

V	$Q = 0$	$ Q = 1$	$ Q = 2$
20×10^3	1678	1721	489
24×12^3	965	1646	880
28×14^3	681	1279	927

Tabelle 5: Anzahl an Konfigurationen eines topologischen Sektors für $Q = 0, |Q| = 1, 2$ für unterschiedliche anisotrope Gittergrößen. Die topologische Ladung wurde nach $N_{Cool} = 8$ zugeordnet.

Die bisherigen Ergebnisse erlauben die Schlussfolgerung, „asymmetrische Gitter“ – beispielsweise $V = 24 \times 12^3$ – zur Untersuchung der AFHO-Methode zu benutzen. Denn verglichen mit einem hyper-kubischen Gitter wie etwa $V = 14^4$, welches von annähernd gleichem Volumen ist, werden größere Plateaus bei etwa gleicher Separation zwischen den topologischen Sektoren erwartet. Allerdings ist es aufgrund der Anisotropie solcher Gitter nicht länger möglich all-to-all Korrelationen für die Bestimmung von χ_t zu verwenden, was zu einer erhöhten Statistik führt.

Wegen dieser Vorüberlegungen wurden solche Gitter der Form $2L \times L^3$ für $L = 10, 12, 14$ generiert. Auch hier wurden zunächst einige Rechnungen durchgeführt, welche die bestmögliche Wahl von N_{Cool} festlegen sollten. Es ergab sich, dass bei solch großen Plateaus eine etwas größere Wahl der Cooling-sweeps, etwa $N_{Cool} = 10 - 12$, besser geeignet erscheint, um stabile Plateaus zu erzeugen (siehe Abbildung 7 für $V = 20 \times 10^3$).

Für Berechnungen an anisotropen Gittern wurden wieder je circa 4.000 Konfigurationen für $V = 20 \times 10^3$ und $V = 24 \times 12^3, 28 \times 14^3$ generiert. Die beiden Letztgenannten erlauben einen Vergleich mit den symmetrischen Gittern $V = 14^4, 16^4$, da ihre Volumina annähernd gleich sind.

Die Verteilung der Konfigurationen auf die topologischen Sektoren für $0 \leq |Q| \leq 2$ findet sich in Tabelle 5.

V	N_{Cool}	$Q = 0$	$ Q = 1$	Kombiniert
20×10^3	12	2,6(3)	6,5(3)	4,0(2)
24×12^3	8	6,6(8)	6,6(4)	6,6(5)
	10	6,5(6)	6,2(4)	6,3(4)
28×14^3	8	7,4(11)	6,9(8)	7,1(7)
	10	7,6(9)	7,4(7)	7,5(5)

Tabelle 6: Ergebnisse für die topologische Suszeptibilität $\chi_t \times 10^5$ in den Sektoren $0 \leq |Q| \leq 1$ für unterschiedlich ausgedehnte anisotrope Gitter. Die Fehlerwerte wurden mit 10^6 multipliziert.

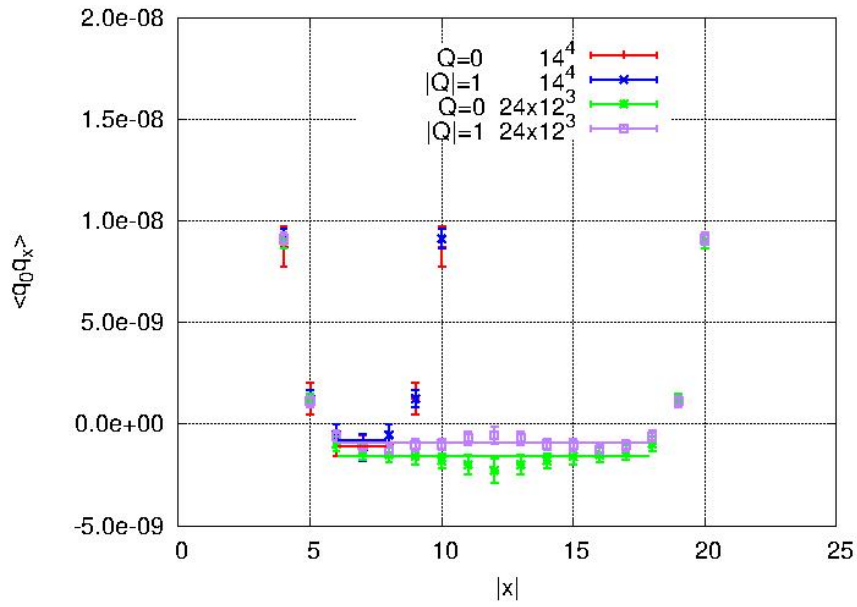
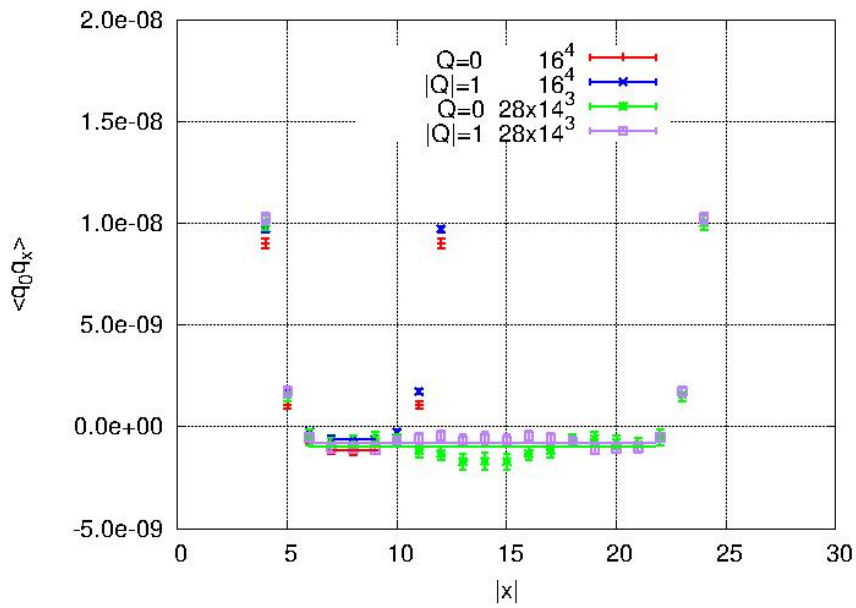
(a) $V = 24 \times 12^3$ (b) $V = 28 \times 14^3$

Abbildung 6: $\langle q(0)q(x) \rangle_{|Q|}$ in topologischen Sektoren mit $Q = 0$ und $|Q| = 1$ für $N_{Cool} = 10$. Gezeigt sind sowohl anisotrope, als auch isotrope Gitter annähernd gleichen Volumens.

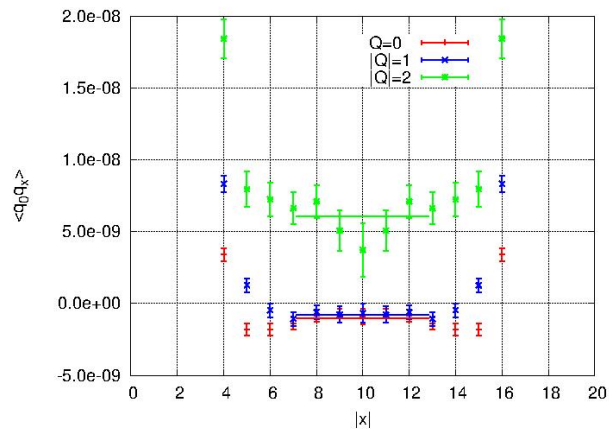
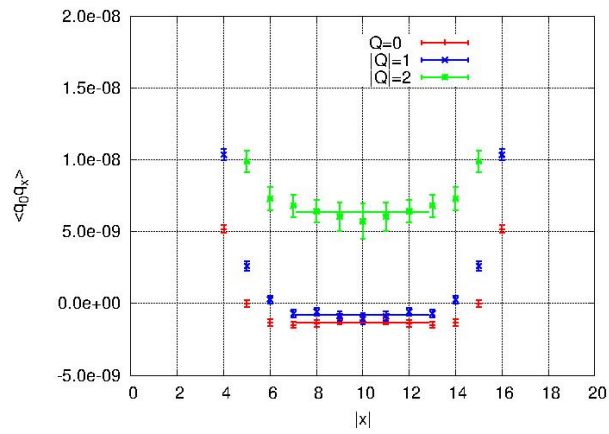
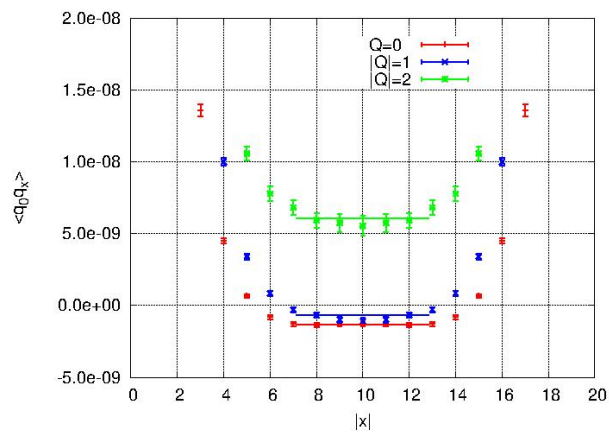
(a) $N_{Cool} = 8$ (b) $N_{Cool} = 12$ (c) $N_{Cool} = 20$

Abbildung 7: $\langle q(0)q(x) \rangle_{|Q|}$ als Funktion von $|x|$ für verschiedene N_{Cool} , $V = 20 \times 10^3$ und $0 \leq |Q| \leq 2$.

Die Anwendbarkeit der AFHO-Methode ist nur für solche Bereiche gewährleistet in denen $\frac{Q}{\chi t V} < 0,5$ gilt. Da die hier betrachteten Volumina sehr gering sind, ist diese Bedingung vor allem für die beiden kleineren Gitter 20×10^3 und 24×12^3 für höhere topologische Ladungen nicht länger erfüllt (siehe Abbildung 7 für $|Q| = 2$ bei $V = 20 \times 10^3$). Aus diesem Grund wurde sich bei der Betrachtung anisotroper Gitter auf die beiden niedrigsten topologischen Sektoren mit $Q = 0$ und $|Q| = 1$ beschränkt.

Abbildung 6 zeigt die Resultate einiger Rechnungen für unterschiedliche anisotrope Gitter. Die Werte vergleichbar großer hyper-kubischer Gitter sind dabei ebenfalls aufgetragen. Die daraus bestimmten Werte der topologischen Suszeptibilität sind mit einem Faktor 10^5 multipliziert in Tabelle 6 zu sehen.

Auffallend dabei sind in erster Linie die geringen Fehler. Wie bereits zuvor erwähnt, können wegen der Anisotropie der Gitter nicht länger all-to-all Korrelationen verwendet werden, weswegen sehr viel höhere Fehlerwerte zu erwarten sind.

Durch das Ausbleiben von all-to-all Korrelationen, also einer Mittelung über alle Raumzeitrichtungen, werden viermal weniger Werte zur Bestimmung der 2-Punkt Korrelationsfunktion $\langle q(0)q(x) \rangle_{|Q|}$ für einen Abstand $|x|$ verwendet. Dies führt zu einer Erhöhung der Fehlerwerte um einen Faktor 2. Ausgeglichen wird diese Tatsache jedoch durch die wesentlich größeren Plateaus. Bei $V = 28 \times 14^3$ sind es beispielsweise bis zu 17 Abstände, $6 \leq |x| \leq 22$, die ein Plateau bilden. Eine solche Vervielfachung der verwendeten Werte für den Fit an das Plateau verringert daher den Fehler, sodass die Fehlerwerte ungefähr gleiche Größenordnung wie jene bei isotropen Gittern haben.

5 Diskussion und Fazit

Zur Bestimmung der topologischen Suszeptibilität in festen topologischen Sektoren wurde im Rahmen dieser Bachelorarbeit die AFHO-Methode untersucht. Diese erlaubt eine Bestimmung der topologischen Suszeptibilität χ_t durch die Berechnung der 2-Punkt Korrelationsfunktion $\langle q(0)q(x) \rangle_{|Q|}$. Dadurch wird es möglich χ_t auch dann noch berechnen zu können, wenn die Monte-Carlo Simulation in einem bestimmten topologischen Sektor einfriert.

Es wurden dazu Untersuchungen zu unterschiedlichen Gittergrößen angestellt. Innerhalb dieser Studien erhobene Resultate sollen nun im einzelnen diskutiert und eingeordnet werden.

Zunächst wurde ein Gitter der Größe $V = 14^4$ betrachtet, wobei jedoch schnell ersichtlich wurde, dass eine solche Ausdehnung nicht ausreichend ist, um die nach der AFHO-Methode vorhergesagten Plateaus bei großen Separationen eindeutig zu erzeugen. Aus Untersuchungen dieses Gitters konnte jedoch eine bestmögliche Bestimmung der Anzahl an Cooling-sweeps erfolgen ($N_{Cool} = 8 - 10$), wie sie im vorangegangenen Kapitel bereits begründet wurde.

Infolge dieser Erkenntnisse wurden größere Gitter erzeugt, um größere Plateaus zu erhalten. Betrachtet man aber die hier verwendete Näherung

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \langle q(0)q(x) \rangle_{|Q|} \approx -\frac{\chi_t}{V} + \frac{Q^2}{V^2},$$

so ist erkennbar, dass für größere Volumina eine Unterdrückung von $\langle q(0)q(x) \rangle_{|Q|}$ mit einem Faktor $\frac{1}{V}$ und eine Unterdrückung der Separationen zwischen den unterschiedlichen topologischen Sektoren mit $\frac{1}{V^2}$ erfolgt. Diese Tatsache macht deutlich, dass die AFHO-Methode für größere Volumina zu Schwierigkeiten bei der Auflösung der verschiedenen Sektoren führt. Um diesen Unterdrückungen entgegenzuwirken wurden hier all-to-all Korrelationen verwendet.

Nach diesen Feststellungen wurden zur Bestimmung von χ_t bei $V = 18^4$ 16.000 Konfigurationen verwendet, um Fehler zu minimieren und eine bessere Auflösung zu gewährleisten. Die in Tabelle 2 dargestellten Werte für $N_{Konfig} = 16.000$ weisen gegenüber den Werten für $N_{Konfig} = 4.000$ aus [*] eine leichte Verbesserung im Bezug auf den Referenzwert $\chi_t = 7,0(9) \times 10^{-5}$ aus [13] auf. Außerdem wird deutlich, dass eine bestmögliche Bestimmung der topologischen Suszeptibilität nur für solche Sektoren geringer topologischer Ladung erfolgen kann. Dies ist konsistent mit der Tatsache, dass für die Gültigkeit der AFHO-Formel Gl.(43) die Bedingung $\frac{Q}{\chi_t V} < 0,5$ erfüllt sein muss. Die größte Abweichung vom Referenzwert ist daher für größere $|Q|$ gegeben, bei denen diese Bedingung nahezu nicht mehr erfüllt ist (siehe Tabelle 2 für $|Q| = 3$). Von diesen Abweichungen abgesehen, besitzen die nach der hier verwendeten Methode bestimmten Werte für χ_t im Rahmen der Fehler jedoch eine gute Übereinstimmung mit dem Referenzwert (ca. 10% Abweichung bei den niedrigeren Sektoren), was deutlich macht, dass die Methode als solche funktioniert und die verwendeten Näherungen gerechtfertigt sind. Es zeigt auch, dass die Verwendung von all-to-all Korrelationen der zuvor besprochenen Unterdrückung erfolgreich entgegenwirkt und somit die Anwendbarkeit der AFHO-Methode bei größeren Volumina ermöglicht.

Eine genauere Betrachtung des angesprochenen $V = 16^4$ Gitters soll hier ausbleiben, da diese on-axis Berechnungen nicht im Umfang dieser Bachelorarbeit entstanden sind (siehe [*]).

Wie bereits erwähnt, ist die Bestimmung von χ_t bei kleinen Gittern (14^4 oder kleiner) mittels der AFHO-Methode zumindest für reine on-axis Abstände nicht möglich, da ein eindeutiges Ausbilden von Plateaus ausbleibt. Eine Möglichkeit bei derartigen Gittern die benutzte Methode dennoch anwenden zu können, ist die Untersuchung von off-axis Abständen. Die hier verwendeten off-axis Berechnungen ermöglichen eine Vergrößerung der betrachteten Distanzen $|x|$, um bis zu $\sqrt{3}$. Diese Vergrößerung führt dazu, dass bis zu 50% mehr Punkte (bei off-axis $\sqrt{3}$) ein Plateau ausbilden.

Betrachtet man die somit berechneten Werte der topologischen Suszeptibilität (Tabelle 3 und Tabelle 4), so erkennt man, dass für die beiden hier verwendeten größeren Gitter $V = 16^4$ und $V = 18^4$ die Werte mit den bereits aus on-axis Berechnungen erhaltenen Werten annähernd übereinstimmen, darüber hinaus jedoch keine Verbesserung im Vergleich zum Referenzwert auftritt. Für das kleinere Gitter ($V = 14^4$) zeigt sich aber, dass dort mittels der off-axis Berechnungen ebenfalls Werte für χ_t bestimmt werden können, welche sehr gut mit der Referenz übereinstimmen. Der Vorteil der off-axis Berechnungen ist daher vor allem im Bereich solcher Anwendungen zu sehen. Durch die Kombination von on- und off-axis Ergebnissen bzw. einer Berechnung von allgemeinen off-axis Abständen können, trotz einer eher geringen Anzahl an Konfigurationen in einem topologischen Sektor (Größenordnung $\mathcal{O}(1.000)$), gute Resultate von einer Abweichung besser als 10% erzielt werden.

Zuletzt wurden anisotrope Gitter der Form $2L \times L^3$ untersucht. Die dabei entstandenen Werte für χ_t sind Tabelle 6 zu entnehmen. Auch hier bestätigen sich die Ergebnisse der vorherigen Untersuchungen. Eine Bestimmung der topologischen Suszeptibilität ist dort für diejenigen topologischen Sektoren geringer Ladung sehr gut möglich und liefert Resultate etwa gleicher Genauigkeit wie bei den zuvor besprochenen Ergebnissen.

Abschließend kann gesagt werden, dass die AFHO-Methode zur Bestimmung der topologischen Suszeptibilität innerhalb fester topologischer Sektoren für SU(2) Yang-Mills Theorie funktioniert und bereits bei eher geringer Anzahl der hier in den einzelnen topologischen Sektoren verwendeten Konfigurationen gute Übereinstimmungen der erzielten Resultate mit dem Referenzwert erreicht werden können. Interessant für weitere Projekte könnte daher vor allem eine Anwendung der Methode in anderen Theorien, wie etwa Quantenchromodynamik sein.

6 Literatur

- [1] R.C. Brower et al. (LSD Collaboration). A numerical study of the 2-flavour schwinger model with dynamical overlap hypercube fermions. *Eur. Phys. J. C* 72 (2012) 1938, 2012. hep-lat/1109.2649.
- [2] S. Shcheredin W. Bietenholz, I. Hip and J. Volkholz. Local topological and chiral properties of qcd. *Nucl. Phys. (Proc. Suppl.)* 73 (1999) 578, 1998. hep-lat/9810033.
- [3] Daniel V. Schroeder Michael E. Peskin. *An Introduction To Quantum Field Theory*. Westview Press, 1995.
- [4] Heinz J. Rothe. *Lattice Gauge Theories - An Introduction*. World Scientific, 2012.
- [5] M. Walzl Gernot Münster. Lattice gauge theory - a short primer. 2000. hep-lat/0012005.
- [6] Michael Creutz. *Quarks, Gluons and Lattices*. Cambridge University Press, 1985.
- [7] Frieder Lenz. Topological concepts in gauge theories. 2004. hep-th/0403286.
- [8] E. Witten. *Nucl. Phys. B*156, 269 (1979).
- [9] G. Veneziano. *Nucl. Phys. B*159, 213 (1979).
- [10] Shoji Hashimoto Tetsuya Onogi Sinya Aoki, Hidenori Fukaya. Finite volume qcd at fixed topological charge. *Phys. Rev. D* 76 (2007), 2007. hep-lat/0707.0396.
- [11] Claudio Pica Luigi Del Debbio, Leonardo Giusti. Topological susceptibility in the su(3) gauge theory. *Phys. Rev. Lett.* 94 (2005) 032003, 2005.
- [12] Marc Wagner Owe Philipsen. On the definition and interpretation of a static quark anti-quark potential in the colour-adjoint channel. *Phys. Rev. D* 89, 014509 (2014), 2013. hep-lat/1305.5957.
- [13] Ion-Olimpiu Stamatescu Philippe de Forcrand, Margarita Garcia Perez. Topology of the su(2) vacuum: a lattice study using improved cooling. *Nucl. Phys. B* 499 (1997), 1997. hep-lat/9701012.
- [14] Marc Wagner Arthur Dromard. Extracting hadron masses from fixed topology simulations. *Phys. Rev. D* 90 (2014) 074505, 2014. hep-lat/1404.0247.
- [15] Erick J. Weinberg. *Classical Solutions in Quantum Field Theory: Solitons and Instantons in High Energy Physics*. Cambridge University Press, 2012.

- [*] Teil der im Prüfungsverfahren zur Veröffentlichung befindlichen Publikation:
"Measuring the Topological Susceptibility in a Fixed Sector"
I. Bautista, W. Bietenholz, A. Dromard, U. Gerber, L. Gonglach, C. P. Hofmann, H. Mejía-Díaz und M. Wagner.

7 Danksagung

Zu Beginn möchte ich mich bei Prof. Dr. Marc Wagner für die großartige Betreuung und Hilfestellung, sowie für Diskussionen – auch über den Rahmen dieser Arbeit hinaus – bedanken.

Ein weiterer sehr großer Dank gilt Arthur Dromard, der mir stets bei Fragen oder Problemen zur Verfügung stand. Viele Diskussionen, Tipps, Literaturhilfen und Unterstützung seinerseits haben die Entstehung dieser Arbeit in ihrer jetzigen Form erst ermöglicht.

Ich danke neben den beiden genannten noch Irais Bautista, Wolfgang Bietenholz, Urs Gerber und Héctor Mejía-Díaza vom Instituto de Ciencias Nucleares der Universidad Nacional Autónoma de México, sowie Christoph P. Hofmann (Facultad de Ciencias, Universidad de Colima), dass ich am paper „Measuring the Topological Susceptibility in a Fixed Sector“ mitarbeiten durfte. Dieses soll demnächst veröffentlicht werden (Physical Review D).

Für die großartige Unterstützung während dieser Arbeit und des ganzen bisherigen Studiums möchte ich mich zu guter Letzt insbesondere bei Denise Goldstein, meinen Eltern Tanja und Heiko, sowie meinen Brüdern Jonas und Philipp herzlichst bedanken.

Eigenständigkeitserklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende schriftliche Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Die Stellen, die anderen Werken im Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, sind durch Quellenangaben im Text deutlich gemacht.

Die Arbeit ist in gleicher oder ähnlicher Form noch in keinem anderen Studiengang als Prüfungsleistung eingereicht worden.

Ort, Datum

Lukas Gonglach