

Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät I
Institut für Physik



Berechnung von kinematischen Faktoren in differentiellen Zerfallsraten $B \rightarrow D^{**}$

Bachelorarbeit

Zur Erlangung des akademischen Grades

Bachelor of Science

im Fach Physik

Eingereicht von
Christian Riha
geboren am 20.01.1988 in Berlin

1. Gutachter : Prof. Dr. Marc Wagner
2. Gutachter : Prof. Dr. Heiko Lacker

eingereicht am 7.11.2011

Abstract

Das angeregte D^{**} -Meson, das bei dem Zerfall $B \rightarrow l\bar{\nu}D^{**}$ entsteht, kann in vier unterschiedlichen P-wave-Zuständen vorliegen. Die leichten Freiheitsgrade des Mesons tragen hierbei in jeweils zwei Zuständen den Drehimpuls $j_l = 1/2$ bzw. $j_l = 3/2$. Die Zerfallsraten dieser vier Zustände wurden bereits von diversen theoretischen Methoden untersucht, wobei eine Mehrheit von ihnen voraussagt, dass in den Zerfällen die $j_l = 3/2$ -Zustände dominant gegenüber den $j_l = 1/2$ -Zuständen sind. Diese Vorhersage steht allerdings in einem gewissen Widerspruch zu einigen experimentellen Befunden, wie den Ergebnissen der Testreihen, die am DELPHI durchgeführt wurden. In dieser Arbeit werden die Zerfallsraten der vier P-wave Zustände des D^{**} auf analytischem Wege hergeleitet und die Ergebnisse der theoretischen Methoden somit nachvollziehbarer gemacht.

Inhaltsverzeichnis

1	Motivation und Vorgehensweise	4
2	Komponenten der Zerfallsrate	5
2.1	Matrixelement und Phasenraumfaktor	5
2.2	Helizität der Leptonen (V-A Kopplung)	6
2.3	Heavy-Quark-Symmetry	7
2.4	Lepton-Spinsummation und-Integration	8
3	Berechnung der Zerfallsraten	9
3.1	Einführung der Variable w	9
3.2	Berechnung der Zerfallsrate für den $B \rightarrow l\bar{\nu}_l D^{**}$ -Zerfall mit dem Gesamtdrehimpuls $J^P = 0^+$	10
3.3	Berechnung der Zerfallsraten für die $B \rightarrow l\bar{\nu}_l D^{**}$ -Zerfälle mit dem Gesamtdrehimpuls $J^P = 1^+$	11
3.3.1	Berechnung der Zerfallsraten Γ_1 und Γ_2 für $B \rightarrow l\bar{\nu}_l D_1^{1/2}$	12
3.3.2	Berechnung der Zerfallsrate Γ_3 für $B \rightarrow l\bar{\nu}_l D_1^{1/2}$	13
3.3.3	Berechnung der Zerfallsraten Γ_1 und Γ_2 für $B \rightarrow l\bar{\nu}_l D_1^{3/2}$	15
3.3.4	Berechnung der Zerfallsrate Γ_3 für $B \rightarrow l\bar{\nu}_l D_1^{3/2}$	16
3.4	Berechnung der Zerfallsrate für den $B \rightarrow l\bar{\nu}_l D^{**}$ -Zerfall mit dem Gesamtdrehimpuls $J^P = 2^+$	17
3.4.1	Berechnung der Zerfallsraten Γ_2 und Γ_3 für $B \rightarrow l\bar{\nu}_l D_2^{3/2}$	18
3.4.2	Berechnung der Zerfallsrate Γ_5 für $B \rightarrow l\bar{\nu}_l D_2^{3/2}$	19
4	Vergleich der Zerfallswahrscheinlichkeiten untereinander	20
5	Zusammenfassung	22
6	Acknowledgement	22
7	Anhang	24
7.1	Feynman-Regeln	24
7.2	Anwendung des Linkshändigkeitsoperators v_L für das Antineutrino	25
7.3	Verfahren zur Lepton-Spinsummation	26
7.4	Herleitungen	26

1 Motivation und Vorgehensweise

Für den angeregten D^{**} -Zustand können die leichten Freiheitsgrade entweder den Drehimpuls $j_l^{\pi_l} = \frac{1}{2}^+$ oder $j_l^{\pi_l} = \frac{3}{2}^+$ tragen. Zusammen mit dem Drehimpuls des im D^{**} enthaltenen schweren c-Quarks $j_Q^{\pi_Q} = \frac{1}{2}^+$ koppelt $j_l^{\pi_l}$ dementsprechend zu den Gesamtdrehimpulsen $J^{\pi_J} = (0^+, 1^+, 1^+, 2^+)$. Die vier möglichen Zustände für das angeregte D^{**} -Meson sind demnach

$$D_J^{j_l} = (D_0^{1/2}, D_1^{1/2}, D_1^{3/2}, D_2^{3/2})$$

In theoretischen Berechnungen wird vorhergesagt, dass die $B \rightarrow l\bar{\nu}D^{**}$ -Zerfälle mit $j_l = 3/2$ um eine Größenordnung wahrscheinlicher sind, als die mit $j_l = 1/2$, was allerdings nicht von experimentellen Befunden gestützt werden kann. Im Gegenteil wurde hier die Beobachtung gemacht, dass die Zerfälle mit $j_l = 1/2$ gegenüber den Zerfällen mit $j_l = 3/2$ um eine Größenordnung dominant sind. Diese widersprüchlichen Aussagen werden unter dem Begriff „1/2 VS 3/2 Puzzle“ zusammengefasst. Folgende Tabelle verdeutlicht diese Diskrepanz:

Semileptonic mode	Experiment	Model
$B \rightarrow D\ell\nu$	$(2.14 \pm 0.20) \times 10^{-2}$	$(1.95 \pm 0.45) \times 10^{-2}$
$B \rightarrow D^*\ell\nu$	$(5.44 \pm 0.23) \times 10^{-2}$	$(5.90 \pm 1.10) \times 10^{-2}$
$B \rightarrow D_2^{3/2}\ell\nu$	(a) $(2.4 \pm 1.1) \times 10^{-3}$ (b) $(4.4 \pm 2.4) \times 10^{-3}$ (c) $(3.0 \pm 3.4) \times 10^{-3}$	$(6.3_{-2.0}^{+3.0}) \times 10^{-3}$
$B \rightarrow D_1^{3/2}\ell\nu$	(a) $(7.0 \pm 1.6) \times 10^{-3}$ (b) $(6.7 \pm 2.1) \times 10^{-3}$ (c) $(5.6 \pm 1.6) \times 10^{-3}$	$(4.0_{-1.4}^{+1.2}) \times 10^{-3}$
$B \rightarrow D_1^{1/2}\ell\nu$	(b) $(2.3 \pm 0.7) \times 10^{-2}$	$(6 \pm 2) \times 10^{-4}$
$B \rightarrow D_0^{1/2}\ell\nu$	„wide“ $D^{**} \rightarrow (D + D^*)\pi$	$(6 \pm 2) \times 10^{-4}$

Abbildung 1: Aus Referenz [3]; Vergleich zwischen Befunden der a) ALEPH, b) DELPHI, c) CLEO -Experimente und einer Modellrechnung zur Zerfallsrate des B -Meson-Zerfalls. „wide“ steht für undefinierte Ereignisse

Die ermittelten Daten der Experimente, die am CLEO, ALEPH und DELPHI durchgeführt wurden, stimmen miteinander überein und überschneiden sich im Rahmen der Zerfälle mit $j_l = 3/2$ ebenfalls mit den Ergebnissen der Modellrechnung. Das Problem tritt bei den Zerfällen mit $j_l = 1/2$ auf. Die Abweichung zwischen theoretischen und

experimentellen Befunden wirft die Frage auf, ob die $j_l = 1/2$ -Zustände nun um den Faktor ≈ 10 dominant oder unterdrückt gegenüber den $j_l = 3/2$ -Zuständen sind. Was die theoretischen Ergebnisse betrifft, so lassen sich diese mithilfe der in Referenz [3] gegebenen Formeln für die Zerfallsraten von $B \rightarrow l\bar{\nu}D^{**}$ mit $D^{**} = (D_0^{1/2}, D_1^{1/2}, D_1^{3/2}, D_2^{3/2})$ nachvollziehen.

Ziel dieser Arbeit ist es, mittels analytischer Techniken, die Zerfallsraten von [3] zu reproduzieren und ihre Herleitung pädagogisch aufzuarbeiten. Hierzu gehen wir auf alle Komponenten der Zerfallsraten explizit ein und werden die dazu nötigen Rechenschritte in detaillierter Weise aufzeigen. Nachdem wir die Formeln aus [3] reproduziert haben, werden wir zum Abschluss die relativen Verhältnisse der Zerfallsraten untereinander bestimmen. Hierfür ist es nötig, das hadronische Matrixelement $\tau(w)$, die Isgur-Wise-Funktion, zu kennen. Da sich $\tau(w)$ jedoch schwer berechnen lässt (z.B. mit Gitterrechnungen), werden wir es genähert als Konstante betrachten.

Im Anhang der Arbeit befinden sich Herleitungen, die aufgrund ihrer Länge den Rahmen der einzelnen Kapitel sprengen würden. Auf sie wird an den entsprechenden Stellen verwiesen.

2 Komponenten der Zerfallsrate

2.1 Matrixelement und Phasenraumfaktor

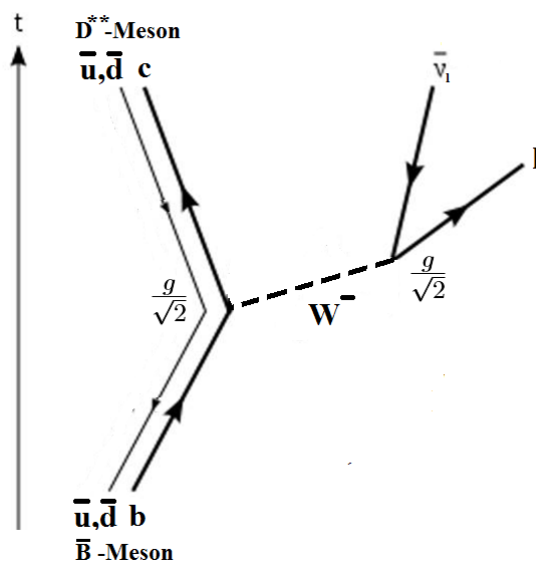


Abbildung 2: Feynman-Graph des $B \rightarrow l\bar{\nu}D^{**}$ -Zerfalls

In dieser Arbeit nehmen wir uns einer allgemeinen Form des semileptonischen B -Meson-Zerfalls an, der entweder in der Form $\bar{B}^0 \rightarrow l\bar{\nu}_l D^{**}$ oder $B^- \rightarrow l\bar{\nu}_l D^{**}$ vorkommen kann. Beide Fälle unterscheiden sich lediglich durch das jeweilige leichtere Quark, das entweder ein Anti-Down oder ein Anti-Up-Quark sein kann. Dieser Unterschied wird jedoch in den folgenden Berechnungen keine Relevanz haben, sodass wir \bar{B}^0 und B^- durch B repräsentieren werden. Ebenso verhält es sich für die Art des Leptons und seines Antineutrinos, die wir allgemein mit l und $\bar{\nu}_l$ bezeichnen werden.

Um die Zerfallsrate Γ für den B -Meson-Zerfall ermitteln zu können, müssen wir seinen lorentzinvarianten Phasenraumfaktor $dLips$, die Masse m_B des B -Mesons und das Matrizelement M kennen:

$$d\Gamma = \frac{M^2}{2m_B} dLips \quad (1)$$

Der Phasenraumfaktor setzt sich zusammen aus der Delta-Funktion, die die Energie-Impulserhaltung beinhaltet, und der Zahl der verfügbaren Endzustände des Dreiteilchensystems D^{**} , l , $\bar{\nu}_l$.

$$dLips = (2\pi)^4 \delta^4(p_{D^{**}} + p_l + p_{\bar{\nu}_l} - p_B) \frac{d^3 p_{D^{**}}}{2E_{D^{**}}(2\pi)^3} \frac{d^3 p_l}{2E_l(2\pi)^3} \frac{d^3 p_{\bar{\nu}_l}}{2E_{\bar{\nu}_l}(2\pi)^3} \quad (2)$$

Die Komponenten des Matrizelements lassen sich aus dem Feynman-Graphen in Abbildung 2 ablesen (siehe Feynman-Regeln im Anhang 7.1).

$$M = \frac{g_w}{\sqrt{2}} j_{had}^\mu \frac{-g_{\mu\nu} + q_\mu q_\nu / M_W^2}{q^2 - M_W^2} \frac{g_w}{\sqrt{2}} j_{lep}^\nu \approx j_{had,\mu} \frac{g_w^2}{2M_W^2} j_{lep}^\mu \quad (3)$$

Der Term in der Mitte ist der Propagatorterm des W^- -Austauschteilchens mit der Bosonenmasse M_W und der Kopplungskonstante der schwachen Wechselwirkung g_w . Unter der Annahme, dass der Vierer-Impulsübertrag q^2 klein gegenüber der Bosonenmasse M_W ist, lässt sich die in (3) gemachte Näherung nachvollziehen. j_{had} und j_{lep} bezeichnen den vierdimensionalen Hadron- bzw. Leptonstrom. Um den Lepton-Viererstrom j_{lep} genauer bestimmen zu können, gehen wir näher auf die Spineigenschaften der Leptonen an diesem Vertex im Abschnitt (2.2) ein. j_{had} hingegen erfordert die Ausnutzung der „Heavy Quark Symmetry“ und wird im Abschnitt 2.3 besprochen.

2.2 Helizität der Leptonen (V-A Kopplung)

Der Lepton-Viererstrom j_{lep} an einem Vertex fasst die vierdimensionalen Spinoren der ein- bzw. auslaufenden Teilchen, sowie die γ -Matrix zusammen.

$$j_{lep}^\mu = \bar{u}(l)\gamma^\mu v_L(\bar{\nu}_l) \quad (4)$$

Die Spinoren sind die Lösungen der Dirac-Gleichung. Man unterscheidet zwischen $u_{1,2}$, den Lösungen mit positiver Energie und $v_{1,2}$, den Lösungen mit negativer Energie. In der Feynman-Interpretation haben Teilchen den Spinor u_1 oder u_2 und Antiteilchen den Spinor v_1 oder v_2 , da Antiteilchen gerade als Teilchen betrachtet werden, die sich mit

negativer Energie rückwärts in der Zeit ausbreiten. Wir nehmen die im Zerfall auftretenden Antineutrinos als masselos an. Für ein masseloses Teilchen ist die Helizität eindeutig bestimmt und fällt mit seiner Chiralität zusammen, da sich masselose Teilchen stets mit Lichtgeschwindigkeit bewegen und es somit kein Bezugssystem gibt, von dem sie überholt werden könnten. Masselose Antineutrinos kommen in der Natur nur mit positiver Helizität vor und haben demnach die Chiralität „rechtshändig“. Da Antineutrinos nach der Feynman-Interpretation nun aber Neutrinos darstellen, die rückwärts in der Zeit laufen, haben sie gerade die umgekehrte Spinrichtung und müssen demnach negative Chiralität haben. Um bei einem masselosen Antiteilchen „Rechtshändigkeit“ sicherzustellen, benötigt man also den Linkshändigkeitsoperator $P_L v = v_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)v$. Dieser Sachverhalt kann rechnerisch im Anhang 7.2 nachvollzogen werden. Die Rechtshändigkeit unseres Antineutrinos wird somit gewährleistet, wenn wir (4) durch folgende Form ersetzen:

$$j_{lep}^\mu = \bar{u}(l)\gamma^\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)v(\bar{\nu}_l) \quad (5)$$

Obwohl wir für weitere Betrachtungen (5) verwenden werden, sei erwähnt, dass der Leptonstrom j_{lep} nun aus zwei Termen besteht: Dem Vektorstrom $V^\mu = \bar{u}(l)\gamma^\mu \frac{1}{2}v(\bar{\nu}_l)$ und dem Axialvektorstrom $A^\mu = \bar{u}(l)\gamma^\mu \frac{1}{2}\gamma^5 v(\bar{\nu}_l)$. In diesem Zusammenhang reden wir von der $V - A$ -Kopplung, die uns im nächsten Abschnitt für den Hadronstrom erneut begegnen wird.

2.3 Heavy-Quark-Symmetry

In der Heavy-Quark-Symmetry betrachtet man die Masse m_Q des schweren Quarks im B -Meson als unendlich schwer ($m_Q \rightarrow \infty$). Aus dieser Näherung heraus ergibt sich unter anderem die Eigenschaft, dass die Compton Wellenlänge des schweren Quarks zu klein ist, um von den leichten Freiheitsgraden (den leichten Quarks und den Gluonen) des Hadrons erfasst zu werden. Dadurch koppeln der Drehimpuls der leichten Freiheitsgrade j_l und der des schweren Quarks j_Q nicht mehr aneinander und sind jeder für sich eine Erhaltungsgröße. Der Quantenzustand des D^{**} -Mesons wird damit von dem Drehimpuls j_l der leichten Freiheitsgrade bestimmt. Im angeregten Zustand des D^{**} -Mesons können die leichten Freiheitsgrade die Drehimpulse $j_l^{\pi_l} = \frac{1}{2}^+$ und $j_l^{\pi_l} = \frac{3}{2}^+$ annehmen, während $j_Q^{\pi_Q} = \frac{1}{2}^+$ der Drehimpuls des schweren Quarks ist. π_l und π_Q bezeichnen hierbei die jeweiligen Paritäten. Somit ist der Zustand des D^{**} jeweils zweifach in j_l entartet:

$$D^{**} = D_J^{j_l} = (D_0^{1/2}, D_1^{1/2}, D_1^{3/2}, D_2^{3/2}) \quad (6)$$

Die zugehörigen Gesamtdrehimpulse sind $J^P = (0^+, 1^+, 1^+, 2^+)$. Der Hadronstrom beschreibt nun den Übergang des B -Mesons in einen dieser vier Zustände $D_J^{j_l}$

$$j_{had,\mu} = |V_{cb}| \langle D_J^{j_l} | V_\mu - A_\mu | B \rangle \quad (7)$$

Die Operatoren des Vektor- und Axialstroms vermitteln dabei in Form der $V - A$ -Kopplung den jeweiligen Übergang. $|V_{cb}|$ ist ein Teil der CKM-Matrix und dient als Maß für die Wahrscheinlichkeit der $b \rightarrow c$ -Transition des schweren Quarks.

2.4 Lepton-Spinsummation und-Integration

Nutzt man die aus den letzten Abschnitten gewonnenen Ausdrücke (5) und (7) und setzt diese in (3) ein, so ergibt sich

$$M = \frac{2G_F}{\sqrt{2}} |V_{cb}| \langle D_J^j | V_\mu - A_\mu | B \rangle \bar{u}(l) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) v(\bar{\nu}_l) \quad (8)$$

wobei die Fermikonstante G_F durch die Beziehung $\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g_w^2}{8M_W^2}$ eingebunden wurde. Da die Spins der Leptonen in verschiedenen Endzuständen auftreten können, müssen wir über diese summieren. Die Spinsummation für den hadronischen Anteil des Zerfalls nehmen wir vorläufig noch nicht vor, da wir die einzelnen Spineinstellungen des D^{**} in den nachfolgenden Abschnitten separat behandeln werden. Aufgrund von $\Gamma \propto |M|^2$ muss M zunächst quadriert werden:

$$|M|^2 = 2G_F^2 H_{\mu\nu} L^{\mu\nu} \quad (9)$$

$$H_{\mu\nu} = |V_{cb}|^2 \langle D_J^j | (V - A)_\mu | B \rangle \langle D_J^j | (V - A)_\nu | B \rangle \quad (10)$$

$$L^{\mu\nu} = \sum_{s_1, s_2} \bar{u}(l) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) v(\bar{\nu}_l) \bar{v}(\bar{\nu}_l) \gamma^\nu (1 - \gamma^5) u(l) \quad (11)$$

Die Ausdrücke $H_{\mu\nu}$ und $L^{\mu\nu}$ bezeichnen die Quadrate des Hadron- bzw. Leptonstroms. Bei (11) ist zu erwähnen, dass die Summation üblicherweise mit einem Vorfaktor $\frac{1}{2}$ erfolgt, hier jedoch wegen des festgelegten Spins von $\bar{\nu}_l$ entfällt. Mit einer Methode, die im Anhang 7.3 erläutert wird, lässt sich bei Vernachlässigung der Leptonenmassen (11) umformen zu

$$L^{\mu\nu} = \text{Spur}[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \not{p}_l \gamma^\nu (1 - \gamma^5) \not{p}_{\bar{\nu}_l}] = 8p_{\alpha, \bar{\nu}_l} p_{\beta, l} x^{\mu\alpha\nu\beta} \quad (12)$$

$$x^{\mu\alpha\nu\beta} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta} g^{\alpha\nu} + i\epsilon^{\mu\alpha\nu\beta} \quad (13)$$

und ergibt somit für das Quadrat des Matrizelements, das alle Leptonenspins berücksichtigt

$$M^2 = 16G_F^2 H_{\mu\nu} p_{\alpha, \bar{\nu}_l} p_{\beta, l} x^{\mu\alpha\nu\beta} \quad (14)$$

Dies führt nun zusammen mit (2) und (1) zu

$$d\Gamma = \frac{G_F^2 H_{\mu\nu} p_{\alpha, \bar{\nu}_l} p_{\beta, l} x^{\mu\alpha\nu\beta}}{(2\pi)^5 m_B} \delta^4(p_{D^{**}} + p_l + p_{\bar{\nu}_l} - p_B) \frac{d^3 p_{D^{**}}}{E_{D^{**}}} \frac{d^3 p_l}{E_l} \frac{d^3 p_{\bar{\nu}_l}}{E_{\bar{\nu}_l}} \quad (15)$$

Weiterhin ist es möglich, über die Leptonimpulse zu integrieren, indem man sich einer Technik aus [5] bedient

$$I_{\alpha\beta}(q) = \int d^3 \vec{p}_l d^3 p_{\bar{\nu}_l} \frac{p_{l, \alpha} p_{\bar{\nu}_l, \beta}}{E_l E_{\bar{\nu}_l}} \delta^4(p_l + p_{\bar{\nu}_l} - q) = \frac{1}{6} \pi (g_{\alpha\beta} q^2 + 2q_\alpha q_\beta) \quad (16)$$

Dies vereinfacht unsere Zerfallsrate nun auf

$$d\Gamma = \frac{\pi G_F^2 H_{\mu\nu}}{6(2\pi)^5 m_B} \frac{d^3 p_{D^{**}}}{E_{D^{**}}} x^{\mu\alpha\nu\beta} (g_{\alpha\beta} q^2 + 2q_\alpha q_\beta) \quad (17)$$

Außerdem können wir die Relation $d^3\vec{p}_{D^{**}} = |\vec{p}_{D^{**}}| E_{D^{**}} dE_{D^{**}} d\Omega_{D^{**}}$ verwenden, wobei die Integration über alle Raumwinkel $d\Omega_{D^{**}} = 4\pi$ ergibt.

$$d\Gamma = \frac{G_F^2 H_{\mu\nu}}{48\pi^3 m_B} |\vec{p}_{D^{**}}| dE_{D^{**}} x^{\mu\alpha\nu\beta} (g_{\alpha\beta} q^2 + 2q_\alpha q_\beta) \quad (18)$$

Die letzte Größe, die noch betrachtet werden muss, ist das Quadrat des Hadron-Viererstoms $H_{\mu\nu}$. Da diese aufgrund der Einsteinschen Summenkonvention nur im Zusammenhang mit $x^{\mu\alpha\nu\beta} (g_{\alpha\beta} q^2 + 2q_\alpha q_\beta)$ berechnet werden kann, führen wir an dieser Stelle die Schreibweise

$$\tilde{H} = H_{\mu\nu} x^{\mu\alpha\nu\beta} (g_{\alpha\beta} q^2 + 2q_\alpha q_\beta) \quad (19)$$

$$d\Gamma = \frac{G_F^2 \tilde{H}}{48\pi^3 m_B} |\vec{p}_{D^{**}}| dE_{D^{**}} \quad (20)$$

ein. Die Berechnung von \tilde{H} werden wir für jeden der vier $B - D_j^j$ -Übergänge im folgenden Kapitel separat vornehmen und können somit die jeweiligen Gleichungen für die Zerfallsrate aufstellen.

3 Berechnung der Zerfallsraten

3.1 Einführung der Variable w

Die Zerfallsraten in [3] hängen nur von der Variable $w = v_B v_{D^{**}}$ ab. Sie ist das Produkt der Vierergeschwindigkeiten des B -Mesons und des D^{**} -Mesons. Wir wollen unsere Ausgangsformel für die Berechnung der Zerfallsraten (20) ebenfalls auf die Form $d\Gamma = d\Gamma(w)$ bringen und begeben uns in das Ruhesystem des B -Mesons. Die Vierergeschwindigkeiten der Mesonen sind dann

$$v_B = \frac{p_B}{m_B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_{D^{**}} = \frac{p_{D^{**}}}{m_{D^{**}}} = \begin{pmatrix} \frac{E_{D^{**}}}{m_{D^{**}}} \\ 0 \\ 0 \\ \gamma |\vec{v}_{D^{**}}| \end{pmatrix}$$

Mit diesen Vierergeschwindigkeiten bzw. -Impulsen ergibt sich $w = \frac{p_{D^{**}} p_B}{m_B m_{D^{**}}} = \frac{E_{D^{**}}}{m_{D^{**}}}$ und wir erhalten weiterhin

$$dE_{D^{**}} = m_{D^{**}} dw \quad (21)$$

$$|\vec{p}_{D^{**}}| = (E_{D^{**}}^2 - m_{D^{**}}^2)^{1/2} = m_{D^{**}} (w^2 - 1)^{1/2} \quad (22)$$

Mit diesen Umformungen wird aus (20)

$$\boxed{\frac{d\Gamma}{dw} = \frac{G_F^2 m_{D^{**}}^2}{48\pi^3 m_B} (w^2 - 1)^{1/2} \tilde{H}} \quad (23)$$

Diese Form werden wir als Ausgangspunkt für die Herleitung aller folgenden Zerfallsraten nutzen. Mit den Formeln (22) und (21) erhalten wir für die Viererimpulse der Mesonen

$$p_B = \begin{pmatrix} m_B \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad p_{D^{**}} = m_{D^{**}} \begin{pmatrix} w \\ 0 \\ 0 \\ (w^2 - 1)^{1/2} \end{pmatrix}$$

3.2 Berechnung der Zerfallsrate für den $B \rightarrow l\bar{\nu}_l D^{**}$ -Zerfall mit dem Gesamtdrehimpuls $J^P = 0^+$

Durch die Näherung $m_Q \rightarrow \infty$ der Heavy-Quark-Symmetry ergeben sich Symmetrien, die die Berechnung der Hadronströme erheblich erleichtern. Die vier Hadronströme können dann vereinfacht als Funktionen von $|\tau_{jl}(w)|$, der Isgur-Wise-Funktion, betrachtet werden. Die Ansätze für die Berechnung des Hadronstroms lassen sich den Arbeiten von Nathan Isgur und Mark B. Wise (Referenz [2]) entnehmen. Für den $B - D_0^{1/2}$ -Übergang haben wir

$$\langle D_0^{1/2} | V_\nu - A_\nu | B \rangle = 2(v_{D^{**}} - v_B)_\nu [m_B m_{D^{**}}]^{1/2} |\tau_{1/2}(w)| \quad (24)$$

$$H_{\mu\nu} = 4(v_{D^{**}} - v_{\bar{B}})_\mu (v_{D^{**}} - v_{\bar{B}})_\nu m_B m_{D^{**}} |V_{cb}|^2 |\tau_{1/2}(w)|^2 \quad (25)$$

Es bleibt noch, den Ausdruck $\tilde{H} = H_{\mu\nu} x^{\mu\alpha\nu\beta} (g_{\alpha\beta} q^2 + 2q_\alpha q_\beta)$ zu bestimmen. Hierzu nehmen wir in (25) die Substitution $(v_{D^{**}} - v_B)_\mu = (\frac{p_{D^{**}}}{m_{D^{**}}} - \frac{p_B}{m_B})_\mu := \chi_\mu$ vor und erhalten

$$\tilde{H} = 4 * 2[(\chi q)^2 - \chi^2 q^2] m_B m_{D^{**}} |V_{cb}|^2 |\tau_{1/2}(w)|^2 \quad (26)$$

Eine detailliertere Rechnung hierfür findet sich im Anhang 7.4. Setzt man nun (26) in (23) ein, so ergibt sich

$$\frac{d\Gamma}{dw} = \frac{G_F^2 m_{D^{**}}^3}{48\pi^3} 4(w^2 - 1)^{1/2} 2[(\chi q)^2 - \chi^2 q^2] |V_{cb}|^2 |\tau_{1/2}(w)|^2 \quad (27)$$

Der letzte Schritt, der nun noch getan werden muss, um die Zerfallsrate des $B \rightarrow l\bar{\nu}_l D_0^{1/2}$ -Zerfalls zu berechnen, ist $[(\chi q)^2 - \chi^2 q^2]$ zurückzusubstituieren.

$$[(\chi q)^2 - \chi^2 q^2] = ((\frac{p_{D^{**}}}{m_{D^{**}}} - \frac{p_B}{m_B})(p_B - p_{D^{**}}))^2 - (\frac{p_{D^{**}}}{m_{D^{**}}} - \frac{p_B}{m_{\bar{B}}})^2 (p_B - p_{D^{**}})^2 \quad (28)$$

$$[(\chi q)^2 - \chi^2 q^2] = [(p_B p_{D^{**}})^2 - p_B^2 p_{D^{**}}^2] [-2\frac{1}{m_B m_{D^{**}}} + \frac{1}{m_{D^{**}}^2} + \frac{1}{m_B^2}] \quad (29)$$

$$[(\chi q)^2 - \chi^2 q^2] = m_B^2 (w^2 - 1) [1 - \frac{m_{D^{**}}}{m_B}]^2 \quad (30)$$

Mithilfe der Umformung

$$r = \frac{m_{D^{**}}}{m_B} \quad (31)$$

erhalten wir schließlich für die erste Zerfallsrate

$$\boxed{\frac{d\Gamma}{dw} = \frac{G_F^2 m_{\bar{B}}^5}{48\pi^3} |V_{cb}|^2 4r^3 (w^2 - 1)^{3/2} 2(1 - r)^2 |\tau_{1/2}(w)|^2} \quad (32)$$

Dieses, sowie jedes folgende Ergebnis für die Zerfallsraten, unterscheidet sich von den Vorgaben in Referenz [3] um den Faktor 2. Da alle Zerfallsraten um denselben Faktor von [3] abweichen, liegt die Vermutung nahe, dass es sich um unterschiedliche Normierungen zwischen unseren Ausgangsformel und denen aus Referenz [3] handelt.

3.3 Berechnung der Zerfallsraten für die $B \rightarrow l\bar{\nu}_l D^{**}$ -Zerfälle mit dem Gesamtdrehimpuls $J^P = 1^+$

Die Zustände $D_1^{1/2}$ und $D_1^{3/2}$ sind gekennzeichnet durch $J^P = 1^+$ und tragen somit, im Gegensatz zum $D_0^{1/2}$ -Zustand, einen Drehimpuls. Dieser Umstand macht es erforderlich, dass wir nun dem Spin des D^{**} -Mesons mithilfe von ϵ -Vektoren Rechnung tragen. Zunächst wollen wir die Zerfallsrate des $B \rightarrow l\bar{\nu}_l D_1^{1/2}$ -Zerfalls berechnen. Aufgrund der Analogien der beiden Zustände mit $J^P = 1^+$ wenden wir im Anschluss dasselbe Lösungsverfahren auf den $B \rightarrow l\bar{\nu}_l D_1^{3/2}$ -Zerfall an. Der Referenz [2] entnehmen wir

$$\begin{aligned} & \langle D_1^{1/2} | V^\nu - A^\nu | B \rangle = \\ & \underbrace{[2(w-1)\epsilon^\nu]}_{a^\nu} - \underbrace{2v_{D^{**}}^\nu \epsilon^\alpha v_{B,\alpha}}_{b^\nu} - \underbrace{i\epsilon^{\nu\alpha\beta\gamma} \epsilon_\alpha (v_B + v_{D^{**}})_\beta (v_B - v_{D^{**}})_\gamma}_{ic^\nu} [m_B m_{D^{**}}]^{1/2} |\tau_{1/2}(w)| \end{aligned} \quad (33)$$

$$H^{\mu\nu} = |V_{cb}|^2 [a^\nu a^\mu - a^\nu b^\mu - i a^\nu c^\mu - b^\nu a^\mu + b^\nu b^\mu + i b^\nu c^\mu - i c^\nu a^\mu + i c^\nu b^\mu - c^\nu c^\mu] m_B m_{D^{**}} |\tau_{1/2}(w)|^2 \quad (34)$$

Nun berechnen wir wieder \tilde{H}

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= 2|V_{cb}|^2 [[(aq) - (bq)]^2 + 2i[(bq) - (aq)](cq) - (cq)^2] \\ & - ((a-b)^2 + 2i[(bc) - (ac)] - c^2)q^2] [m_B m_{D^{**}}] |\tau_{1/2}(w)|^2 \end{aligned} \quad (35)$$

Um die genaue Herleitung von (35) nachvollziehen zu können, wird an dieser Stelle auf den Anhang 7.4 verwiesen. Diese Formel wird uns als Ansatz für \tilde{H} bei der Berechnung der Zerfallsraten von nun an immer wieder begegnen. Was die verschiedenen Spineinstellungen $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ für Zustände mit $J^P = 1^+$ betrifft, so lassen sich diese durch folgende Vektoren kennzeichnen.

$$\epsilon_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon_3 = \begin{pmatrix} \gamma\beta \\ 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Da unser entstehendes D^{**} -Meson nicht ruht, sondern wir uns im Ruhesystem des B -Mesons befinden, wurden diese Spinvektoren bereits mit einer speziellen Lorentztransformation versehen. Dies wird deutlich bei ϵ_3 , da es den Spin in z-Richtung, der Ausbreitungsrichtung des D^{**} -Mesons, repräsentiert. Im Folgenden wird für jeden möglichen Spinzustand ϵ_i jeweils das zugehörige Γ_i mit $i = 1, 2, 3$ errechnet und im Anschluss die Summe $\Gamma = \sum \Gamma_i$ gebildet.

3.3.1 Berechnung der Zerfallsraten Γ_1 und Γ_2 für $B \rightarrow l\bar{\nu}_l D_1^{1/2}$

Wir betrachten nun die einzelnen Summanden in (35)

$$a^\nu = 2(w-1)\epsilon^\nu \quad b^\nu = \frac{2p_{D^{**}}^\nu}{m_{D^{**}}m_B}(\epsilon_\delta p_B^\delta) \quad q^\nu = (p_B - p_{D^{**}})^\nu$$

$$c^\nu = \epsilon^{\nu\alpha\beta\gamma}\epsilon_\alpha\left(\frac{p_B}{m_B} + \frac{p_{D^{**}}}{m_{D^{**}}}\right)_\beta\left(\frac{p_B}{m_B} - \frac{p_{D^{**}}}{m_{D^{**}}}\right)_\gamma$$

und erinnern uns an die Konvention des Levi-Civita-Symbols

$$\epsilon^{\nu\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} +1, & \text{wenn } \nu\alpha\beta\gamma \text{ eine gerade Permutation von } 0123 \text{ ist} \\ -1, & \text{wenn } \nu\alpha\beta\gamma \text{ eine ungerade Permutation von } 0123 \text{ ist} \\ 0, & \text{bei mehrfach auftretenden Indizes} \end{cases}$$

Im Folgenden werden die Schritte für die Auflösung des in c auftretenden ϵ -Tensors aus pädagogischen Gründen im Detail erläutert:

Da der Term $c = c(\nu, \alpha, \beta, \gamma)$ den ϵ -Tensor enthält, muss $\tilde{H}(\epsilon_1)$ über alle möglichen $c(\nu, \alpha, \beta, \gamma)$ summiert werden. Hierbei kann jeder Index die Werte 0, 1, 2 und 3 annehmen, sodass es prinzipiell $4^4 = 256$ Möglichkeiten für $c(\nu, \alpha, \beta, \gamma)$ gibt. Jedoch gibt es nur wenige Index-Kombinationen, bei denen c nicht 0 wird, da doppelt auftretende Indizes nicht vorkommen dürfen. Der Index α muss den Wert 1 annehmen, da über ihn mit ϵ_1 multipliziert wird. Über die Indizes β und γ wird $\epsilon^{\nu\alpha\beta\gamma}$ mit den Viererimpulsen $p_{D^{**}}$ und p_B , die zusammen über eine 0. und 3. Komponente verfügen, multipliziert. β und γ teilen sich also die Werte 0 und 3. Für den Index ν , über den c mit den Termen a , b und q multipliziert wird, bleibt somit der Wert 2. c kann also nur dann mit anderen Termen multipliziert werden, wenn diese eine 2. Komponente haben, die ungleich 0 ist. Aus diesem Grund ist $(cq) = 0$ und $(ac) = 0$. b ist ebenfalls gleich 0, da p_B und ϵ_1 über keine gemeinsame Komponente multipliziert werden können, die verschieden von 0 ist. Dasselbe gilt für $(aq) = 0$. Berücksichtigt man alle genannten Argumente, vereinfacht sich (35) zu.

$$\tilde{H}(\epsilon_1) = 2m_{D^{**}}m_B|V_{cb}|^2|\tau_{1/2}(w)|^2 \left[\underbrace{-a^2q^2}_S + \underbrace{c^2q^2}_T \right] \quad (36)$$

$$S = 4(w-1)^2q^2 \quad (37)$$

(37) trägt ein positives Vorzeichen, da $\epsilon_\nu\epsilon^\nu = -1$. Die beiden Terme S und T wollen wir getrennt betrachten, da sich S verhältnismäßig leicht ermitteln lässt, T hingegen eine Betrachtung und Summation aller in c^2 vorkommenden Indexkombinationen erfordert. Die Indizes α und ν haben eindeutige Wertzuweisungen. Für β und γ gibt es jedoch zwei Möglichkeiten, sich die Werte 0 und 3 zu teilen. Da c quadriert wird, ergeben sich dementsprechend vier verschiedene Möglichkeiten für T :

$$T = T_{\beta\gamma BC} = (T_{0303}, T_{0330}, T_{3003}, T_{3030}) \quad (38)$$

Die Indizes dienen hierbei lediglich der Kennzeichnung von T und weisen nicht auf einen kontravarianten Term hin.

$$T_{\beta\gamma BC} = [\epsilon^{21\beta\gamma}\left(\frac{p_B}{m_B} + \frac{p_{D^{**}}}{m_{D^{**}}}\right)_\beta\left(\frac{p_B}{m_B} - \frac{p_{D^{**}}}{m_{D^{**}}}\right)_\gamma\epsilon^{21BC}\left(\frac{p_B}{m_B} + \frac{p_{D^{**}}}{m_{D^{**}}}\right)_B\left(\frac{p_B}{m_B} - \frac{p_{D^{**}}}{m_{D^{**}}}\right)_C]q^2 \quad (39)$$

$$\begin{aligned}
T_{0303} &= (1+w)^2(w^2-1)q^2 \\
T_{0330} &= (1-w^2)(w^2-1)q^2 \\
T_{3030} &= (1-w)^2(w^2-1)q^2 \\
T_{3003} &= T_{0330}
\end{aligned}$$

Eine detaillierte Fassung dieser Rechnung befindet sich im Anhang 7.4. Da das T nun die Summe all dieser Teilterme ist, ergibt sich entsprechend.

$$T = T_{0303} + T_{0330} + T_{3003} + T_{3030} = [(1+w)^2 + 2(1-w^2) + (1-w)^2](w^2-1)q^2 \quad (40)$$

$$T = 4(w^2-1)q^2 \quad (41)$$

Damit ist die Summe der Terme S und T

$$S + T = 4[(w-1)^2 + (w^2-1)]q^2 = 4[2w(w-1)]q^2 \quad (42)$$

Bedient man sich, unter Zuhilfenahme von (21) und (31), der Relation

$$q^2 = (p_B - p_{D^{**}})^2 = (m_B^2 - 2m_B E_{D^{**}} + m_{D^{**}}^2) = (1 - 2rw + r^2)m_B^2 \quad (43)$$

und setzt dies nun in den Ausdruck (36) ein, so ergibt sich

$$\tilde{H}(\epsilon_1) = 8m_{D^{**}}m_B^3|V_{cb}|^2|\tau_{1/2}(w)|^2 2w(1-2rw+r^2)(w-1) \quad (44)$$

Analog dazu lässt sich

$$\tilde{H}(\epsilon_1) = \tilde{H}(\epsilon_2) \quad (45)$$

für die zweite Spineinstellung mit ϵ_2 ermitteln, da die Unterschiede zwischen ϵ_1 und ϵ_2 für die gezeigten Rechenschritte nicht von Bedeutung sind. Für die Zerfallsraten Γ_1 und Γ_2 ergibt sich nach (23) und bei erneuter Anwendung von (31)

$$\frac{d\Gamma_1}{dw} = \frac{d\Gamma_2}{dw} = \frac{G_F^2 m_B^5}{48\pi^3} |V_{cb}|^2 8r^3 (w-1)(w^2-1)^{1/2} 2w(1+r^2-2rw) |\tau_{1/2}(w)|^2 \quad (46)$$

3.3.2 Berechnung der Zerfallsrate Γ_3 für $B \rightarrow l\bar{\nu}_l D_1^{1/2}$

Betrachten wir nun erneut die einzelnen Terme aus (35). Um Γ_3 berechnen zu können, müssen wir auf ϵ_3 zurückgreifen. Es handelt sich dabei um einen Lorentz-Boost in z -Richtung für Vierervektoren und enthält somit eine 0. und 3. Komponente. Wir erinnern uns daran, dass bereits zwei der vier Indizes des Vertauschungstensors in c die Werte 0 und 3 annehmen können. Wenn ein weiterer Index 0 oder 3 annehmen muss, folgt daraus, dass mindestens zwei Indizes denselben Wert annehmen müssen und c dadurch 0 wird. Berücksichtigt man diesen Sachverhalt, so kürzt sich (35) für ϵ_3 zu

$$\tilde{H}(\epsilon_3) = 2m_B m_{D^{**}} |V_{cb}|^2 |\tau_{1/2}(w)|^2 \left[\underbrace{[(aq) - (bq)]^2}_S - \underbrace{(a-b)^2 q^2}_T \right] \quad (47)$$

Was folgt, ist ein längerer Prozess der Termumformung, dem wir zum besseren Verständnis zumindest in den Ansätzen nachgehen wollen.

$$S = [2(w-1)(m_B\gamma\beta - wm_{D^{**}}\gamma\beta + m_{D^{**}}\gamma(w^2-1)^{1/2}) - \frac{2\gamma\beta m_B}{m_{D^{**}}m_B}(wm_{D^{**}}m_B - m_{D^{**}}^2)]^2 \quad (48)$$

$$T = [-4(w-1)^2 - 2[2(w-1)\frac{2\gamma\beta m_B}{m_{D^{**}}m_B}(\beta\gamma wm_{D^{**}} - \gamma m_{D^{**}}(w^2-1)^{1/2})] + \frac{4m_B^2\gamma^2\beta^2 p_{D^{**}}^2}{m_{D^{**}}^2 m_B^2}]q^2 \quad (49)$$

Diese ausgedehnten Terme werden mit den folgenden Relationen erheblich vereinfacht.

$$\gamma = w \quad (50)$$

$$\gamma\beta = (w^2 - 1)^{1/2} \quad (51)$$

Die Herleitungen für (50) und (51) befinden sich im Anhang 7.4. Mit diesen Umformungen ergibt sich

$$S = [2(w-1)m_B - 2(wm_B - m_{D^{**}})]^2(w^2 - 1) \quad (52)$$

$$T = [-4(w-1)^2 + 4(w^2 - 1)]q^2 \quad (53)$$

Nach einigen weiteren Umformungsschritten und der Relation (43) erhalten wir das Ergebnis

$$S - T = 4(w-1)^2(m_B + m_{D^{**}})^2 \quad (54)$$

mit dem wir nun, unter Anwendung von (31) die Zerfallsrate Γ_3 berechnen können:

$$\tilde{H}(\epsilon_3) = 8m_B^3 m_{D^{**}} |V_{cb}|^2 |\tau_{1/2}(w)|^2 (w-1)^2 (1+r)^2 \quad (55)$$

$$\frac{d\Gamma_3}{dw} = \frac{G_F^2 m_B^5}{48\pi^3} |V_{cb}|^2 8r^3 (w^2-1)^{1/2} (w-1)^2 (1+r)^2 |\tau_{1/2}(w)|^2 \quad (56)$$

Nachdem wir nun für den $D_1^{1/2}$ -Endzustand die Zerfallsraten für alle drei Spineinstellungen ϵ kennen, sind wir in der Lage, seine Zerfallsrate $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$ zu berechnen.

$$\boxed{\frac{d\Gamma}{dw} = \frac{G_F^2 m_B^5}{48\pi^3} |V_{cb}|^2 4r^3 (w-1) 2(w^2-1)^{1/2} [(w-1)(1+r)^2 + 4w(1+r^2 - 2rw)] |\tau_{1/2}(w)|^2} \quad (57)$$

Wie bereits angekündigt, werden wir die Zerfallsrate für $B \rightarrow D_1^{3/2}$ nun mit dem gleichen Lösungsverfahren behandeln.

$$\langle D_1^{1/2} | V^\nu - A^\nu | B \rangle = [a^\nu - b^\nu - ic^\nu] [m_B m_{D^{**}}]^{1/2} |\tau_{3/2}(w)| \quad (58)$$

Für \tilde{H} können wir erneut (35) verwenden, wobei wir nun allerdings mit $|\tau_{3/2}(w)|$ rechnen werden.

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= 2|V_{cb}|^2 [[(aq) - (bq)]^2 + 2i[(bq) - (aq)](cq) - (cq)^2] \\ &\quad - ((a-b)^2 + 2i[(bc) - (ac)] - c^2)q^2] m_B m_{D^{**}} |\tau_{3/2}(w)|^2 \end{aligned}$$

Mit a , b und c wurden die folgenden Terme substituiert:

$$\begin{aligned} a^\nu &= \frac{(1-w^2)}{\sqrt{2}} \epsilon^\nu & b^\nu &= \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \frac{p_B^\mu}{m_B} + \frac{2-w}{\sqrt{2}} \frac{p_{D^{**}}^\nu}{m_{D^{**}}} \right) (\epsilon_\delta \frac{p_B^\delta}{m_B}) & q^\nu &= (p_B - p_{D^{**}})^\nu \\ c^\nu &= \left(-\frac{w+1}{2\sqrt{2}} \right) \epsilon^{\nu\alpha\beta\gamma} \epsilon_\alpha \left(\frac{p_B}{m_B} + \frac{p_{D^{**}}}{m_{D^{**}}} \right) \beta \left(\frac{p_B}{m_B} - \frac{p_{D^{**}}}{m_{D^{**}}} \right) \gamma \end{aligned}$$

Da $D_1^{3/2}$ ebenfalls einen Drehimpuls besitzt, müssen die Zerfallsraten $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$ für die einzelnen Spineinstellungen $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ auch hier getrennt berechnet werden und im Anschluss wieder zur Gesamtzerfallsrate zusammengeführt werden.

3.3.3 Berechnung der Zerfallsraten Γ_1 und Γ_2 für $B \rightarrow l\bar{\nu}_l D_1^{3/2}$

In diesem Teilabschnitt widmen wir uns zunächst wieder den Möglichkeiten der Indexkombinationen in dem Term $c(\nu\alpha\beta\gamma)$ für die c nicht 0 wird. Da $D_1^{3/2}$ ein Zustand mit Drehimpuls $J = 1$ ist, haben die ϵ -Vektoren dieselbe Form wie bei $D_1^{1/2}$. Auch der konzeptionelle Aufbau der Terme a, b und c ist identisch mit dem der Terme der $B - D_1^{1/2}$ -Transition. Die in (3.3.1) dargelegte Argumentationskette führt also wieder zur folgenden Vereinfachung für (35)

$$\tilde{H}(\epsilon_1) = 2m_{D^{**}}m_B |V_{cb}|^2 |\tau_{3/2}(w)|^2 \underbrace{[-a^2 q^2]}_S + \underbrace{[c^2 q^2]}_T \quad (59)$$

Auch die Terme S und T lassen sich dank der Analogien zwischen dem $D_1^{1/2}$ -Zustand und dem $D_1^{3/2}$ -Zustand in bereits angewendeter Weise lösen. Die Berechnung von T wird an dieser Stelle nicht wiederholt, da sie vollkommen identisch mit der in 3.3.1 ist. Lediglich der Vorfaktor $\frac{(w+1)}{2\sqrt{2}}$, der nun in c enthalten ist, wird ergänzt.

$$S = \frac{(1-w^2)^2}{2} q^2 \quad (60)$$

$$T = \frac{(w+1)^2}{2} (w^2 - 1) q^2 \quad (61)$$

$$S + T = \frac{(w^2 - 1)}{2} [(w^2 - 1) + (w + 1)^2] q^2 = w(w + 1)(w^2 - 1) q^2 \quad (62)$$

Unter Anwendung der Beziehungen (31), (43) und dem gerade gewonnenen Ausdruck für $S + T$ lässt sich nun $\tilde{H}(\epsilon_1)$ für den $B - D_1^{3/2}$ -Übergang berechnen

$$\tilde{H}(\epsilon_1) = 2m_{D^{**}}m_B^3 |V_{cb}|^2 |\tau_{3/2}(w)|^2 w(w + 1)(w^2 - 1)(1 - 2rw + r^2) \quad (63)$$

Mit der abermals auftretenden Gleichheit $\tilde{H}(\epsilon_1) = \tilde{H}(\epsilon_2)$ ergibt sich schließlich für die Zerfallsraten Γ_1 und Γ_2 :

$$\frac{d\Gamma_1}{dw} = \frac{d\Gamma_2}{dw} = \frac{G_F^2 m_B^5}{48\pi^3} |V_{cb}|^2 2r^3 (w + 1)(w^2 - 1)^{3/2} w(1 + r^2 - 2rw) |\tau_{3/2}(w)|^2 \quad (64)$$

3.3.4 Berechnung der Zerfallsrate Γ_3 für $B \rightarrow l\bar{\nu}_l D_1^{3/2}$

Dank der Analogien der Zerfälle mit $J = 1$ können wir die Vereinfachung $c = 0$ aus Abschnitt 3.3.2 erneut verwenden und erhalten

$$\tilde{H}(\epsilon_3) = 2m_B m_{D^{**}} |V_{cb}|^2 |\tau_{3/2}(w)|^2 \left[\underbrace{[(aq) - (bq)]^2}_S - \underbrace{(a-b)^2 q^2}_T \right] \quad (65)$$

Auch hier führt das Resubstituieren und Rechnen zu ausgedehnten Termen,

$$S = \left[\frac{(1-w^2)}{\sqrt{2}} (m_B \gamma \beta - w m_{D^{**}} \gamma \beta + \gamma m_{D^{**}} (w^2 - 1)^{1/2}) \right. \quad (66)$$

$$\left. - \gamma \beta \left[\frac{3}{\sqrt{2}} (m_B - w m_{D^{**}}) + \frac{2-w}{\sqrt{2}} (w m_B - m_{D^{**}}) \right] \right]^2$$

$$T = \left[-\frac{(w^2 - 1)^2}{2} - 2\gamma \beta \frac{(1-w^2)}{2} \left[3 * \gamma \beta + (2-w) \frac{m_{D^{**}} w \gamma \beta - m_{D^{**}} (w^2 - 1)^{1/2} \gamma}{m_{D^{**}}} \right] \right. \quad (67)$$

$$\left. + \frac{\gamma^2 \beta^2}{2} [9 + 6(2-w)w + (2-w)^2] \right] q^2$$

die sich nach Verwendung von (50) und (51) vereinfachen zu

$$S = \left[\frac{(1-w^2)}{\sqrt{2}} m_B - \left[\frac{3}{\sqrt{2}} (m_B - w m_{D^{**}}) + \frac{2-w}{\sqrt{2}} (w m_B - m_{D^{**}}) \right] \right]^2 (w^2 - 1) \quad (68)$$

$$T = \left[-\frac{(w^2 - 1)^2}{2} + 3(w^2 - 1)^2 + \frac{(w^2 - 1)}{2} [9 + 6(2-w)w + (2-w)^2] \right] q^2 \quad (69)$$

und nach einigen Termumformungen das Folgende ergeben:

$$S - T = 2(w^2 - 1)(w + 1)(w - 1)(m_B + m_{D^{**}})^2 \quad (70)$$

Wir sind nun in der Lage, $\tilde{H}(\epsilon_3)$ und somit Γ_3 zu bestimmen.

$$\tilde{H}(\epsilon_3) = 2m_B^3 m_{D^{**}}^2 |V_{cb}|^2 |\tau_{3/2}(w)|^2 (w^2 - 1)(w + 1)(w - 1)(1 + r)^2 \quad (71)$$

$$\frac{d\Gamma_3}{dw} = \frac{G_F^2 m_B^5}{48\pi^3} |V_{cb}|^2 2r^3 2(w + 1)(w^2 - 1)^{3/2}(w - 1)(1 + r)^2 |\tau_{3/2}(w)|^2 \quad (72)$$

Nachdem wir nun für den $B \rightarrow l\bar{\nu}_l D_1^{3/2}$ -Zerfall die Zerfallsraten für alle drei ϵ_i kennen, sind wir in der Lage, die Summe der Zerfallsraten $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$ zu berechnen.

$$\boxed{\frac{d\Gamma}{dw} = \frac{G_F^2 m_B^5}{48\pi^3} |V_{cb}|^2 2r^3 (w + 1) 2(w^2 - 1)^{3/2} [(w - 1)(1 + r)^2 + w(1 + r^2 - 2rw)] |\tau_{3/2}(w)|^2} \quad (73)$$

3.4 Berechnung der Zerfallsrate für den $B \rightarrow l\bar{\nu}_l D^{**}$ -Zerfall mit dem Gesamtdrehimpuls $J^P = 2^+$

Der letzte der vier möglichen Übergänge des B -Mesons in das D^{**} -Meson lässt sich in bereits vertrauter Weise in die Form

$$\langle D_1^{1/2} | V^\nu - A^\nu | B \rangle = [a^\nu - b^\nu - ic^\nu] [m_B m_{D^{**}}]^{1/2} |\tau_{3/2}(w)| \quad (74)$$

überführen, sodass man für \tilde{H} den Ausdruck (35) verwenden kann. Die Substitutionen wurden hierbei folgendermaßen durchgeführt:

$$\begin{aligned} a^\nu &= -\sqrt{3}(w+1) \frac{p_{B,\delta}}{m_B} \epsilon^{\delta\nu} & b^\nu &= \frac{-\sqrt{3} p_{D^{**}}^\nu}{m_B^2 m_{D^{**}}} (\epsilon_{\delta\omega} p_B^\delta p_B^\omega) & q^\nu &= (p_B - p_{D^{**}})^\nu \\ c^\alpha &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \epsilon^{\alpha\nu\beta\gamma} \epsilon_{\nu,\delta} \frac{p_B^\delta}{m_B} \left(\frac{p_B}{m_B} + \frac{p_{D^{**}}}{m_{D^{**}}}\right)_\beta \left(\frac{p_B}{m_B} - \frac{p_{D^{**}}}{m_{D^{**}}}\right)_\gamma \end{aligned}$$

Es fällt auf, dass die Spineinstellungen ϵ nun in Form eines zweidimensionalen Tensors vorliegen. Dies lässt sich dadurch erklären, dass der Gesamtdrehimpuls J des D^{**} in diesem Zustand nun 2 ist, was auch der Grund dafür ist, dass wir nun fünf Spineinstellungen für die $B - D_2^{3/2}$ -Transition berücksichtigen müssen. Die möglichen Spineinstellungen werden somit durch die fünf, auf den Wert 1 normierten, spurlosen und symmetrischen ϵ' -Matrizen dargestellt:

$$\begin{aligned} \epsilon'_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \epsilon'_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \epsilon'_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \epsilon'_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \epsilon'_5 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Diese fünf Matrizen müssen des Weiteren mit einer speziellen Lorentztransformation in das Ruhesystem des B -Mesons überführt werden, da sich das D^{**} -Meson mitsamt seines Spins relativ zu diesem Ruhesystem bewegt. Die Spineinstellung $\epsilon' = (\epsilon'_1, \epsilon'_2, \epsilon'_3, \epsilon'_4, \epsilon'_5)$ kann hierfür mithilfe der Lorentzmatrix λ durch

$$\epsilon = \lambda^T \epsilon' \lambda \quad (75)$$

transformiert werden. Die Lorentzmatrix hat die Form

$$\lambda = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Nach der Ausführung der speziellen Lorentztransformation, erhalten wir die fünf ϵ -Matrizen, mit denen wir auch im Ruhesystem von B rechnen können.

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \epsilon_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix} & \epsilon_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \epsilon_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \epsilon_5 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2\gamma^2\beta^2 & 0 & 0 & -2\gamma^2\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\gamma^2\beta & 0 & 0 & -2\gamma^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ohne weitere Rechnungen anstellen zu müssen, lassen sich ϵ_1 und ϵ_4 sofort aus allen weiteren Betrachtungen ausschließen. Der Grund dafür ist, dass die Spineinstellung ϵ in jedem der drei Terme a , b und c mit p_B , dem Viererimpuls des ruhenden B -Mesons, über δ summiert wird. Da p_B nur eine 0. Komponente besitzt, führt dies dazu, dass ϵ_1 und ϵ_4 über ν nur noch mit Komponenten summiert werden können, die gleich 0 ergeben. Sie werden somit nicht zur Zerfallsrate des $B - D_2^{3/2}$ -Übergangs beitragen. Für alle anderen Spineinstellungen, werden wir die Zerfallsrate im Folgenden ermitteln. Die Bezeichnung $\Gamma_i = \Gamma(\epsilon_i)$ behalten wir bei.

3.4.1 Berechnung der Zerfallsraten Γ_2 und Γ_3 für $B \rightarrow l\bar{\nu}_l D_2^{3/2}$

Als Ausgangspunkt für \tilde{H} können wir auf (35) zurückgreifen, da sich der konzeptionelle Aufbau des Hadronstroms bei den Zerfällen mit D_2^J und $J \neq 0$ nicht verändert.

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\epsilon_2) &= 2|V_{cb}|^2 [[(aq) - (bq)]^2 + 2i[(bq) - (aq)](cq) - (cq)^2] \\ &\quad - ((a-b)^2 + i[(bc) - (ac)] - c^2)q^2] [m_B m_{D^{**}}] |\tau_{3/2}(w)|^2 \end{aligned}$$

Wie bereits erwähnt, tritt die ϵ -Matrix in den Termen a, b und c stets in der Form $\epsilon_{\nu\delta} p_B^\delta$ auf. Somit wird in jeder Situation nur auf die 0. Zeile der Spinmatrizen zugegriffen und das Problem vereinfacht sich zu dem einer Vektorrechnung. Im Falle des ϵ_2 -Spinzustandes bleibt für die Summation über ν in der ersten Zeile der Spinmatrix noch die 1. Komponente. Somit werden die Ausdrücke (aq) , (cq) und (ac) null. Weiterhin wird $b = 0$, denn in ihm wird ϵ_2 gleich zweimal mit der 0. Komponente des p_B multipliziert. Diese Überlegungen machen aus (35) folgenden Ausdruck:

$$\tilde{H}(\epsilon_2) = 2m_{D^{**}}m_B|V_{cb}|^2|\tau_{3/2}(w)|^2 \left[\underbrace{-a^2q^2}_S + \underbrace{c^2q^2}_T \right] \quad (76)$$

$$S = \frac{3}{2}(w+1)^2(w^2-1)q^2 \quad (77)$$

Der Vorfaktor $\frac{1}{2}$ in S kommt aus der Normierung der Spinmatrizen. Weiterhin ist zu beachten, dass die Spinmatrizen für $J = 2$ verglichen mit den Spinvektoren von $J = 1$ immer einen zusätzlichen Faktor $\gamma\beta = (w^2 - 1)^{1/2}$ liefern. Da die nötigen Schritte für die Berechnung von T bereits bekannt sind, sei an dieser Stelle nur das bereits bekannte Endresultat mit angepasstem Vorfaktor gegeben.

$$T = \frac{3}{2}(w^2-1)^2q^2 \quad (78)$$

Unter Anwendung von (43) und (31) ergibt sich weiterhin

$$S + T = 3w(w+1)(w^2-1)(1-2wr+r^2)m_B^2 \quad (79)$$

$$\tilde{H}(\epsilon_2) = 2m_{D^{**}}m_B^3|V_{cb}|^2|\tau_{3/2}(w)|^2 3w(w+1)(w^2-1)(1-2wr+r^2) \quad (80)$$

$$\frac{d\Gamma_2}{dw} = \frac{G_F^2 m_B^5}{48\pi^3} |V_{cb}|^2 2r^3 (w+1)(w^2-1)^{3/2} 3w(1+r^2-2rw) |\tau_{3/2}(w)|^2 \quad (81)$$

Betrachtet man sich anschließend die Matrix ϵ_3 , so zeigt sich, dass nach der Multiplikation ($\epsilon_3^{\delta\nu} p_{B,\delta}$) dem $\epsilon_3^{\delta\nu}$ lediglich noch die Multiplikation über ν mit der 2. Komponente bleibt. Die für ϵ_2 erläuterte Argumentationen wiederholen sich und führen zu den Verhältnissen:

$$\tilde{H}(\epsilon_2) = \tilde{H}(\epsilon_3) \quad (82)$$

$$\Gamma_2 = \Gamma_3 \quad (83)$$

3.4.2 Berechnung der Zerfallsrate Γ_5 für $B \rightarrow l\bar{\nu}_l D_2^{3/2}$

Dadurch, dass bei $\epsilon_5^{\nu,\delta}$ über δ mit p_B multipliziert wird, bleibt für die Summation über ν nur noch die 0. und 3. Komponente. Ähnlich, wie bei der Berechnung der Zerfallsrate Γ_3 für $J = 1$ Endzustände, lässt sich wegen doppelt auftretenden Indizes im Vertauschungstensor der Ausdruck $c = 0$ setzen und führt auf:

$$\tilde{H}(\epsilon_5) = 2m_B m_{D^{**}} |V_{cb}|^2 |\tau_{3/2}(w)|^2 \left[\underbrace{[(aq) - (bq)]^2}_S - \underbrace{(a-b)^2 q^2}_T \right] \quad (84)$$

Beachtet man die Normierung der Matrizen und verwendet man (50) und (51), so erhält man als Zwischenergebnis für S und T

$$S = \left(\frac{2 * \sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right)^2 [-\beta\gamma(w+1)(-\beta\gamma m_B + \beta\gamma w m_{D^{**}} - \gamma m_{D^{**}}(w^2-1)^{1/2}) \quad (85)$$

$$+ (-\gamma^2 \beta^2) \left(\frac{m_{D^{**}} w m_B - m_{D^{**}}^2}{m_{D^{**}}}\right)^2]$$

$$T = \left(\frac{2 * \sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right)^2 [-(w+1)^2(w^2-1) \quad (86)$$

$$-2(w^2-1)(w+1)\gamma\beta(\gamma\beta w - \frac{m_{D^{**}}(w^2-1)^{1/2}}{m_{D^{**}}}\gamma) + (w^2-1)^2]q^2]$$

Unter Anwendung der Relationen (50) und (51) vereinfachen sich diese Terme zu

$$S = 2[(w+1)m_B - (wm_B - m_{D^{**}})]^2(w^2-1)^2 \quad (87)$$

$$T = 2[-(w+1)^2(w^2-1) + (w^2-1)^2]q^2 \quad (88)$$

$$S - T = 2(w-1)(w+1)^3(m_B - m_{D^{**}})^2 \quad (89)$$

Diese Gleichungen führen auf folgendes Ergebnis für $\tilde{H}(\epsilon_5)$ und Γ_5 :

$$\tilde{H}(\epsilon_5) = 2m_B^3 m_{D^{**}} |V_{cb}|^2 2(w+1)^3 (w-1)(1-r)^2 |\tau_{3/2}(w)|^2 \quad (90)$$

$$\frac{d\Gamma_5}{dw} = \frac{G_F^2 m_B^5}{48\pi^3} |V_{cb}|^2 4r^3 (w+1)^2 (w^2-1)^{3/2} (1-r)^2 |\tau_{3/2}(w)|^2 \quad (91)$$

und ergibt mit Γ_2 und Γ_3 als Summe

$$\boxed{\frac{d\Gamma}{dw} = \frac{G_F^2 m_B^5}{48\pi^3} |V_{cb}|^2 2r^3 (w+1) 2(w^2-1)^{3/2} [(w+1)(1-r)^2 + 3w(1+r^2-2rw)] |\tau_{3/2}(w)|^2} \quad (92)$$

4 Vergleich der Zerfallswahrscheinlichkeiten untereinander

Nachdem wir nun die Zerfallsraten aus [3], bis auf einen Vorfaktor von 2, hergeleitet haben, können wir den jeweiligen Anteil der einzelnen Zerfallsraten an der Gesamtzerfallsrate berechnen. In diesem Zusammenhang definieren wir die Zerfallswahrscheinlichkeit

$$P(B \rightarrow l\bar{\nu}_l D_J^{ji}) = \frac{\Gamma(B \rightarrow l\bar{\nu}_l D_J^{ji})}{\Gamma_{total}} \quad (93)$$

$$\Gamma_{total} = \Gamma(B \rightarrow l\bar{\nu}_l D_0^{1/2}) + \Gamma(B \rightarrow l\bar{\nu}_l D_1^{1/2}) + \Gamma(B \rightarrow l\bar{\nu}_l D_1^{3/2}) + \Gamma(B \rightarrow l\bar{\nu}_l D_2^{3/2}) \quad (94)$$

Die hergeleiteten Formeln zur Berechnung der Zerfallsraten lassen sich nun über w integrieren und ausrechnen. Für die Integrationsgrenzen wählen wir $[1, w_{max}]$. Die untere Integrationsgrenze $w = 1$ bezeichnet den „zero recoil“, den Punkt, an dem die beiden Mesonen B und D^{**} im Endzustand ruhen. Die obere Integrationsgrenze w_{max} hingegen berechnet sich folgendermaßen

$$w_{max} = \frac{m_B^2 + m_{D^{**}}^2}{2m_B m_{D^{**}}} \quad (95)$$

Für die Masse des B -Mesons verwenden wir $m_B = 5279 MeV$. Die Masse des D^{**} -Mesons ist abhängig von seinem Drehimpuls J . Wir entnehmen die D^{**} -Massen der Referenz [7] und erhalten $m_{D^{**}}(J=0) = 2400 MeV$, $m_{D^{**}}(J=1) = 2420 MeV$ und $m_{D^{**}}(J=2) = 2460 MeV$. Für das jeweilige $r = \frac{m_{D^{**}}}{m_B}$ gilt entsprechend $r(J=0) \approx 0.45$, $r(J=1) \approx 0.46$ und $r(J=2) \approx 0.47$.

Die Größen G_F und $|V_{cb}|$ fließen in die verschiedenen Zerfallsraten als Konstanten gleichermaßen ein, sodass ihre genauen Werte für relative Betrachtungen unerheblich sind. Dies gilt auch für die Abweichung um den Faktor 2 zwischen unseren Ergebnissen und denen aus [3].

Eine vollständige Berechnung der Isgur-Wise-Funktionen $\tau_{1/2}(w)$ und $\tau_{3/2}(w)$ liegt zu diesem Zeitpunkt noch nicht vor und kann z.B. mit Gitterrechnungen hergeleitet werden. Für die Berechnung der Zerfallswahrscheinlichkeiten, nähern wir $\tau_{1/2}(w)$ und $\tau_{3/2}(w)$

demnach als konstant in w . Für diese Näherung gibt es jedoch verschiedene Herangehensweisen; so verwendet ein OPE-Treatment unter Anwendung der Uraltsev-Summenregeln (siehe [4]) die Näherung

$$\tau_{1/2}(1)|_{SR} \approx 0.32$$

$$\tau_{3/2}(1)|_{SR} \approx 0.60$$

Eine alternative Näherung wird von dem „Bakamjian Thomas covariant quark model“ (BT-model) verwendet:

$$\tau_{1/2}(1)|_{BT} \approx 0.22$$

$$\tau_{3/2}(1)|_{BT} \approx 0.54$$

Eine verhältnismäßig neue Näherung geht aus einer Gitterrechnung aus Referenz [6] hervor.

$$\tau_{1/2}(1)|_{Gitter} = 0.296$$

$$\tau_{3/2}(1)|_{Gitter} = 0.526$$

Im Folgenden werden wir die Zerfallsraten mit den aufgelisteten Werten über dw integrieren und werden dabei auch die Zerfallswahrscheinlichkeiten der möglichen Spin-einstellung der jeweiligen Zerfälle einzeln präsentieren. Mit dem Programm *Maple 15* errechnen wir folgende Werte:

Zerfallstyp	Anteil an Γ_{total}		
	Uraltsev	BT-model	Gitterrechnung
$P(B \rightarrow l\bar{\nu}_l D_0^{1/2})$	4.9%	3.0%	5.4%
$P(B \rightarrow l\bar{\nu}_l D_1^{1/2})$	6.3%	3.8%	6.8%
$P(B \rightarrow l\bar{\nu}_l D_1^{1/2}(\epsilon_1))$	1.4%	0.8%	1.5%
$P(B \rightarrow l\bar{\nu}_l D_1^{1/2}(\epsilon_2))$	1.4%	0.8%	1.5%
$P(B \rightarrow l\bar{\nu}_l D_1^{1/2}(\epsilon_3))$	3.5%	2.1%	3.8%
$P(B \rightarrow l\bar{\nu}_l D_1^{3/2})$	36.7%	38.4%	36.2%
$P(B \rightarrow l\bar{\nu}_l D_1^{3/2}(\epsilon_1))$	2.9%	3.0%	2.8%
$P(B \rightarrow l\bar{\nu}_l D_1^{3/2}(\epsilon_2))$	2.9%	3.0%	2.8%
$P(B \rightarrow l\bar{\nu}_l D_1^{3/2}(\epsilon_3))$	30.8%	32.3%	30.5%
$P(B \rightarrow l\bar{\nu}_l D_2^{3/2}l)$	52.2%	54.8%	51.6%
$P(B \rightarrow l\bar{\nu}_l D_2^{3/2}(\epsilon_1))$	0%	0%	0%
$P(B \rightarrow l\bar{\nu}_l D_2^{3/2}(\epsilon_2))$	7.8%	8.2%	7.7%
$P(B \rightarrow l\bar{\nu}_l D_2^{3/2}(\epsilon_3))$	7.8%	8.2%	7.7%
$P(B \rightarrow l\bar{\nu}_l D_2^{3/2}(\epsilon_4))$	0%	0%	0%
$P(B \rightarrow l\bar{\nu}_l D_2^{3/2}(\epsilon_5))$	36.6%	38.3%	36.1%

Unsere berechneten Zerfallsraten zeigen deutliche Größenunterschiede zwischen Zerfällen mit $D^{**}(j_l = 1/2)$ und $D^{**}(j_l = 3/2)$. Hierbei dominieren Zerfälle mit $D^{**}(j_l = 3/2)$ um etwa eine Größenordnung. Da wir die Isgur-Wise-Funktionen als Konstanten genähert haben, handelt es sich bei diesen Werten nur um grobe Abschätzungen. Tatsächlich wird vermutet, dass die Isgur-Wise-Funktionen gegen w_{max} immer weiter abfallen.

Die Unterschiede zwischen den einzelnen Näherungsmethoden für $|\tau_{j_l}(w)|$ sind häufig nur minimal, da der generelle Ansatz für eine solche Näherung der folgende ist (siehe [4]):

$$\frac{1}{4} \approx |\tau_{3/2}^{(0)}(1)|^2 - |\tau_{1/2}^{(0)}(1)|^2$$

wobei die 0 im Exponenten aussagt, dass es sich um den niedrigsten angeregten Zustand handelt. Eine vollständige Beschreibung der Isgur-Wise-Funktionen könnte eine Gitterrechnung liefern.

5 Zusammenfassung

Die in dieser Arbeit hergeleiteten Zerfallsraten stimmen, bis auf einen Vorfaktor von 2, mit denen aus Referenz [3] überein und konnten, ausgehend von den Vorgaben für die Axial- und Vektorströme aus [2], hergeleitet werden. Der Vorfaktor von 2 lässt sich vermutlich auf Unterschiede der Normierungen zwischen [3] und anderen verwendeten Quellen zurückführen.

Die Berechnungen der Verhältnisse der Zerfallsraten untereinander wurden mit $|\tau_{j_l}(w)| \approx |\tau_{j_l}(1)|$ abgeschätzt. Die in den theoretischen Methoden vorhergesagte Dominanz der Zerfälle mit $D^{**}(j_l = 3/2)$ konnte somit im Rahmen dieser Näherung nachvollzogen werden.

Um die Abhängigkeit der Isgur-Wise-Funktion von der Variable w vollständig beschreiben zu können, benötigen wir zusätzliche Informationen aus Gitterrechnungen mit dynamischen Quarkflavours. Auf diese Weise könnte eine Gitterrechnung aussagekräftigere Resultate hervorbringen und sehr dazu beitragen, das „1/2 VS 3/2 Puzzle“ zu lösen.

6 Acknowledgement

Zum Abschluss möchte ich in erster Linie meinem Betreuer, Marc Wagner, danken. Seine Geduld und seine Bemühungen für diese Arbeit haben das Gelingen der Herleitungen erst möglich gemacht.

Weiterhin möchte ich der gesamten Arbeitsgruppe *Theorie der Elementarteilchen/Phänomenologie* und insbesondere Herrn Prof. Dr. Müller-Preußker danken, dass sie mich so herzlich in ihrer Mitte willkommen hießen.

Literatur

- [1] P. Schmüser, *Feynman-Graphen und Eichtheorien für Experimentalphysiker*, Zweite neu bearbeitete Auflage, Springer Verlag,
- [2] N. Isgur, M.B. Wise, *Excited charm mesons in semileptonic \bar{B} decay and their contributions to a Bjorken sum rule*, 1991
- [3] F. Jugeau, A. Le Yaouanc, L. Olivier, J.C. Raynal *The decays $\bar{B} \rightarrow D^{**}\pi$ and the Isgur-Wise functions $\tau_{1/2}(w)$, $\tau_{3/2}(w)$* , 2005
- [4] I.I. Bigi, B.Blossier, A. Le Yaouanc, L. Olivier, O.Pène. J.C. Raynal, A. Oyanguren, P.Roudeau *Memorino on the '1/2 vs 3/2 Puzzle' in $B \rightarrow l\bar{\nu}X_C$ -a Year later and a bit wiser*, 2007
- [5] F. Mandl, G. Shaw, R. Bönisch *Quantenfeldtheorie*, 1993
- [6] Benoit Blossier, Marc Wagner, Olivier Pène *Lattice calculation of the Isgur-Wise functions $\tau_{1/2}$ and $\tau_{3/2}$ with dynamical quarks*, 2009
- [7] B. Golob *Recent results for properties of D^{**} and excited D_S mesons*, 2010

7 Anhang

7.1 Feynman-Regeln

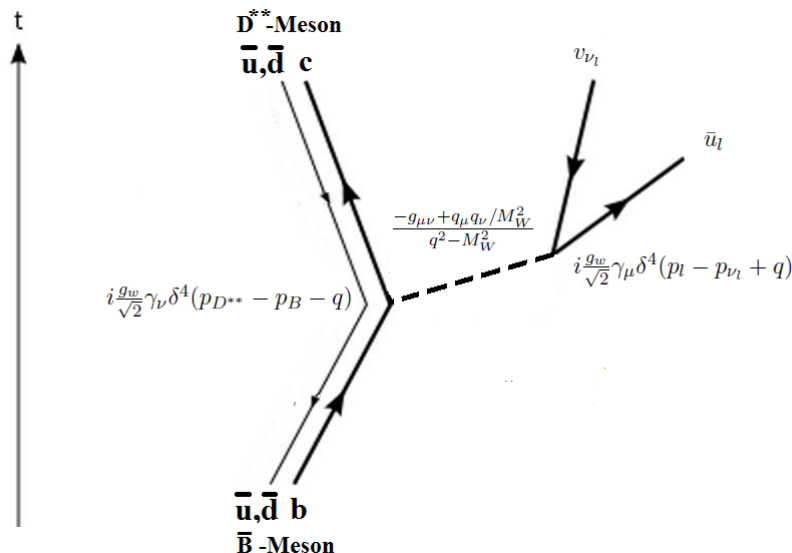


Abbildung 3: Feynman-Graph des $B \rightarrow D^{**} l \bar{\nu}$ -Zerfalls

Um das Matrixelement

$$M = \frac{g_w}{\sqrt{2}} j_{had}^\mu \frac{-g_{\mu\nu} + q_\mu q_\nu / M_W^2}{q^2 - M_W^2} \frac{g_w}{\sqrt{2}} j_{lep}^\nu$$

unseres $B \rightarrow D^{**} l \bar{\nu}$ -Zerfalls bestimmen zu können, bedienen wir uns seines Feynman-Graphen und befolgen die Feynman-Konventionen:

- 1.) In Feynman-Diagrammen werden Leptonen und Quarks durch gerade Linien dargestellt, Austauschteilchen dagegen durch gestrichelte oder geschwungene Linien.
- 2.) An jedem Vertex müssen jeweils die Leptonzahl-, Bosonzahl-, Ladungs- und Energie-Impulserhaltung der ein- und auslaufenden Teilchen gegeben sein. Die Energie- Impulserhaltung ist zudem an jedem Vertex durch die Delta-Funktion dargestellt.
- 3.) In der Feynman-Konvention breiten sich Teilchen vorwärts in der Zeit aus, Antiteilchen hingegen werden als Teilchen betrachtet, die sich rückwärts in der Zeit bewegen. Im Feynman-Diagramm wird diesem Sachverhalt durch die entsprechende Pfeilrichtung der Teilchen Rechnung getragen. Zudem werden Spinoren von Teilchen mit u bezeichnet, während jene von Antiteilchen v genannt werden. Eine weitere Regel ist, dass die Spinoren von einlaufenden Teilchen u bzw. v sind, während die von auslaufenden Teilchen

\bar{u} bzw. \bar{v} sind, wobei $\bar{u} = u^\dagger \gamma^0$ gilt.

4.) Die einzelnen Beiträge zum Matrixelement sind

1. Der Strom j_{had} des am linken Vertex ein-bzw. auslaufenden Quarks.
2. Der Vierer-Spinor des am rechten Vertex einlaufenden Antineutrinos v_{ν_l} und der des auslaufenden Leptons u_l . Zusammen mit der γ -Matrix am Lepton-Vertex ergeben diese den Leptonstrom $j_{lep}^\mu = \bar{u}(l)\gamma^\mu v_L(\bar{\nu}_l)$
3. Das W^- -Austauschteilchen, dessen Propagatorterm $\frac{-g_{\mu\nu} + q_\mu q_\nu / M_W^2}{q^2 - M_W^2}$ aus der Wellengleichung des massiven Vektorpotentials hergeleitet werden kann (siehe hierzu Anhang D in Referenz [1]).
4. Die Ladung $\frac{g_w}{\sqrt{2}}$ an jedem Vertex.

7.2 Anwendung des Linkshändigkeitsoperators v_L für das Antineutrino

Grundsätzlich haben die auf N normierten Dirac-Spinoren die folgende Form:

$$u_1 = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \end{pmatrix} \quad u_2 = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix} \quad v_1 = N \begin{pmatrix} \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = N \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für unser Antineutrino sind die Spinoren v_1 und v_2 von Interesse. Setzt man voraus, dass der Impuls des Antineutrinos in die z-Richtung zeigt und beachtet man die Masselosigkeit des Antineutrinos, vereinfachen sich v_1 und v_2 zu:

$$v_1 = N \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = +\frac{1}{2} \quad \lambda = -\frac{1}{2}$$

λ bezeichnet hierbei die Helizität, die für v_1 positiv und für v_2 negativ ist. Der Projektionsoperator P_L für die Linkshändigkeit eines Teilchens lautet $P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)$, wobei γ^5 das Produkt aller Dirac-Matrizen ist.

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nach Anwendung von P_L auf die Dirac Spinoren erhalten wir

$$P_L v_1 = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)v_1 = \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}(-v_1) = v_1 \quad P_L v_2 = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)v_2 = \frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{2}(+v_2) = 0$$

Dieses Resultat zeigt uns, dass die Anwendung des Projektionsoperators P_L auf ein Antineutrino nur den Spinor für die positive Helizität, also für die Rechtshändigkeit, zulässt.

7.3 Verfahren zur Lepton-Spinsummation

$$L^{\mu\nu} = \sum_{s_i, s_f} \bar{u}(l)\gamma^\mu(1 - \gamma^5)v(\bar{\nu}_l)\bar{v}(\bar{\nu}_l)\gamma^\nu(1 - \gamma^5)u(l)$$

Das Produkt der Viererspinoren $\bar{u}u$ ergibt, summiert über die Spinmöglichkeiten der Anfangszustände, den Ausdruck $u_1\bar{u}_1 + u_2\bar{u}_2 = \not{p} + mI$. Entsprechend für Antispinoren ergibt dies $v_1\bar{v}_1 + v_2\bar{v}_2 = \not{p} - mI$. Dies kann der Referenz [1] entnommen werden. Damit sind nun folgende Rechenoperationen möglich:

$$\sum_{s_i, s_f} = \bar{v}_{\nu_l}\gamma^\mu u_l \bar{u}_l \gamma^\nu v_{\nu_l} = \sum_{s_f} \bar{v}_{\nu_l} \underbrace{\gamma^\mu(\not{p}_l + m_l)}_{Matrix A} \gamma^\nu v_{\nu_l} = \sum_{j, k=1} \sum_{s_f} (\bar{v}_{\nu_l})_j A_{jk} (v_{\nu_l})_k$$

Die Spinoren sind komplexe Zahlen und somit vertauschbar:

$$\sum_{j, k=1} \sum_{s_f} (\bar{v}_{\nu_l})_j A_{jk} (v_{\nu_l})_k = \sum_{j, k} A_{jk} \underbrace{(v_{\nu_l})_k (\bar{v}_{\nu_l})_j}_{Matrix B} = \sum_j B_{jj} = Spur B$$

Daraus folgt bei Vernachlässigung der Leptonenmassen:

$$L^{\mu\nu} = Spur[\gamma^\mu(1 - \gamma^5)\not{p}_l\gamma^\nu(1 - \gamma^5)\not{p}_{\bar{\nu}_l}]$$

mit den Relationen

$$[\gamma^5, \gamma^\alpha]_+ = 0 \quad \alpha = 0, \dots, 3 \quad (1 - \gamma^5)^2 = 2(1 - \gamma^5)$$

ergibt sich der Ausdruck

$$L^{\mu\nu} = 2p_{\alpha, \bar{\nu}_l} p_{\beta, l} Spur[\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta]$$

und führt unter Anwendung der Regeln (A.17) und (A.21) in Referenz [5] zu

$$L^{\mu\nu} = 8p_{\alpha, \bar{\nu}_l} p_{\beta, l} x^{\mu\alpha\nu\beta}$$

$$x^{\mu\alpha\nu\beta} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta} g^{\alpha\nu} + i\epsilon^{\mu\alpha\nu\beta}$$

7.4 Herleitungen

Herleitung von (26)

$$\tilde{H} = H_{\mu\nu} x^{\mu\alpha\nu\beta} (g_{\alpha\beta} q^2 + 2q_\alpha q_\beta)$$

$$\tilde{H} = 4m_B m_{D^{**}} |V_{cb}|^2 |\tau_{1/2}(w)|^2 \chi_\mu \chi_\nu x^{\mu\alpha\nu\beta} (g_{\alpha\beta} q^2 + 2q_\alpha q_\beta)$$

$$\text{mit } x^{\mu\alpha\nu\beta} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta} g^{\alpha\nu} + i\epsilon^{\mu\alpha\nu\beta}$$

Bei der Multiplikation von $x^{\mu\alpha\nu\beta}$ ist zu beachten, dass „ \square “-Terme gleich 0 sind, denn $\square_{\mu\nu} = \square_{\nu\mu}$ ist ein symmetrischer Tensor während ϵ antisymmetrisch in μ, ν ist.

$$\begin{aligned} & \chi_\mu \chi_\nu x^{\mu\alpha\nu\beta} (g_{\alpha\beta} q^2 + 2q_\alpha q_\beta) \\ &= (\chi^\alpha \chi^\beta + \chi^\beta \chi^\alpha - \chi^2 g^{\alpha\beta}) (g_{\alpha\beta} q^2 + 2q_\alpha q_\beta) \\ &= [\chi_\beta \chi^\beta q^2 + \chi_\beta \chi^\beta q^2 - \chi^2 \underbrace{g_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}}_{=4} q^2 + 2\chi_\alpha q^\alpha \chi_\beta q^\beta + 2\chi_\beta q^\beta \chi_\alpha q^\alpha - 2\chi^2 q_\alpha q^\alpha] \\ &= 2[(\chi q)^2 - \chi^2 q^2] \end{aligned}$$

$$\rightarrow \tilde{H} = 2 * 4 [(\chi q)^2 - \chi^2 q^2] m_B m_{D^{**}} |V_{cb}|^2 |\tau_{1/2}(w)|^2$$

Herleitung von (35)

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= H_{\mu\nu} x^{\mu\alpha\nu\beta} (g_{\alpha\beta} q^2 + 2q_\alpha q_\beta) \\ &\quad \text{mit} \\ x^{\mu\alpha\nu\beta} &= g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta} g^{\alpha\nu} + i\epsilon^{\mu\alpha\nu\beta} \\ &\quad \text{und} \\ H_{\mu\nu} &= |V_{cb}|^2 [a_\nu - b_\nu - ic_\nu]^2 m_B m_{D^{**}} |\tau_{1/2}(w)|^2 \\ &= |V_{cb}|^2 [a_\nu a_\mu - a_\nu b_\mu - ia_\nu c_\mu - b_\nu a_\mu + b_\nu b_\mu + ib_\nu c_\mu - ic_\nu a_\mu + ic_\nu b_\mu - c_\nu c_\mu] m_B m_{D^{**}} |\tau_{1/2}(w)|^2 \\ H_{\mu\nu} x^{\mu\alpha\nu\beta} &= [\\ &+ a^\beta a^\alpha - a^\beta b^\alpha - ia^\beta c^\alpha - b^\beta a^\alpha + b^\beta b^\alpha + ib^\beta c^\alpha - ic^\beta a^\alpha + ic^\beta b^\alpha - c^\beta c^\alpha \\ &+ a^\alpha a^\beta - a^\alpha b^\beta - ia^\alpha c^\beta - b^\alpha a^\beta + b^\alpha b^\beta + ib^\alpha c^\beta - ic^\alpha a^\beta + ic^\alpha b^\beta - c^\alpha c^\beta \\ &- (aa - ab - iac - ba + bb + ibc - ica + icb - cc) g_{\alpha\beta}] [m_B m_{D^{**}}] |\tau_{1/2}(w)|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= H_{\mu\nu} x^{\mu\alpha\nu\beta} (g_{\alpha\beta} q^2 + 2q_\alpha q_\beta) = [(\\ &+ aa - ab - iac - ba + bb + ibc - ica + icb - cc \\ &+ aa - ab - iac - ba + bb + ibc - ica + icb - cc \\ &- 4(+aa - ab - iac - ba + bb + ibc - ica + icb - cc) \\ &] q^2 \end{aligned}$$

+

$$\begin{aligned} & 2(\\ & + (aq)(aq) - (aq)(bq) - i(aq)(cq) - (bq)(aq) + (bq)(bq) + i(bq)(cq) - i(cq)(aq) + i(cq)(bq) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (cq)(cq) \\
& + (aq)(aq) - (aq)(bq) - i(aq)(cq) - (bq)(aq) + (bq)(bq) + i(bq)(cq) - i(cq)(aq) + i(cq)(bq) - \\
& (cq)(cq) \\
& - (aa - ab - iac - ba + bb + ibc - ica + icb - cc)q^2 \\
&) \\
&] [m_B m_{D^{**}}] |\tau_{1/2}(w)|^2
\end{aligned}$$

Vereinfacht ergeben die Terme

$$\begin{aligned}
\tilde{H} &= 2|V_{cb}|^2 [[(aq) - (bq)]^2 + 2i[(bq) - (aq)](cq) - (cq)^2] \\
& - ((a - b)^2 + 2i[(bc) - (ac)] - c^2)q^2] [m_B m_{D^{**}}] |\tau_{1/2}(w)|^2
\end{aligned}$$

Herleitung von (41)

$$T_{\beta\gamma BC} = [\epsilon^{21\beta\gamma} (\frac{p_B}{m_B} + \frac{p_{D^{**}}}{m_{D^{**}}})_\beta (\frac{p_B}{m_B} - \frac{p_{D^{**}}}{m_{D^{**}}})_\gamma \epsilon^{21BC} (\frac{p_B}{m_B} + \frac{p_{D^{**}}}{m_{D^{**}}})_B (\frac{p_B}{m_B} - \frac{p_{D^{**}}}{m_{D^{**}}})_C] q^2$$

$$T_{0303} = (-1) (\frac{m_B}{m_B} + \frac{E_{D^{**}}}{m_{D^{**}}}) (-\frac{|\vec{p}_{D^{**}}|}{m_{D^{**}}}) (-1) (\frac{m_B}{m_B} + \frac{E_{D^{**}}}{m_{D^{**}}}) (-\frac{|\vec{p}_{D^{**}}|}{m_{D^{**}}}) q^2$$

$$T_{0303} = (1 + \frac{E_{D^{**}}}{m_{D^{**}}})^2 (\frac{|\vec{p}_{D^{**}}|}{m_{D^{**}}})^2 q^2$$

$$T_{0303} = (1 + w)^2 (\frac{|\vec{p}_{D^{**}}|}{m_{D^{**}}})^2 q^2$$

$$T_{0330} = (-1) (\frac{m_B}{m_B} + \frac{E_{D^{**}}}{m_{D^{**}}}) (-\frac{|\vec{p}_{D^{**}}|}{m_{D^{**}}}) (+1) \frac{|\vec{p}_{D^{**}}|}{m_{D^{**}}} (\frac{m_B}{m_B} - \frac{E_{D^{**}}}{m_{D^{**}}}) q^2$$

$$T_{0330} = (1 - (\frac{E_{D^{**}}}{m_{D^{**}}})^2) (\frac{|\vec{p}_{D^{**}}|}{m_{D^{**}}})^2 q^2$$

$$T_{0330} = (1 - w^2) (\frac{|\vec{p}_{D^{**}}|}{m_{D^{**}}})^2 q^2$$

$$T_{3030} = (+1) (\frac{m_B}{m_B} - \frac{E_{D^{**}}}{m_{D^{**}}}) (\frac{|\vec{p}_{D^{**}}|}{m_{D^{**}}}) (+1) (\frac{m_B}{m_B} - \frac{E_{D^{**}}}{m_{D^{**}}}) (\frac{|\vec{p}_{D^{**}}|}{m_{D^{**}}}) q^2$$

$$T_{3030} = (1 - \frac{E_{D^{**}}}{m_{D^{**}}})^2 (\frac{|\vec{p}_{D^{**}}|}{m_{D^{**}}})^2 q^2$$

$$T_{3030} = (1 - w)^2 (\frac{|\vec{p}_{D^{**}}|}{m_{D^{**}}})^2 q^2$$

$$T_{3003} = T_{0330}$$

$$\rightarrow T = (\frac{|\vec{p}_{D^{**}}|}{m_{D^{**}}})^2 [(1 + w)^2 + (1 - w)^2 + 2(1 - w^2)] q^2 = 4(\frac{|\vec{p}_{D^{**}}|}{m_{D^{**}}})^2 q^2 = 4(w^2 - 1)q^2$$

Herleitung von (50)

w ist das Produkt der Vierergeschwindigkeiten des B - und des D^{**} -Mesons.

$$w = v_B v_{D^{**}}$$

Um das D^{**} -Meson in das Ruhessystem des B -Mesons zu überführen, bedient man sich des Lorentzboosts

$$v_{D^{**}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ |\vec{v}_{D^{**}}| \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ 0 \\ \gamma |\vec{v}_{D^{**}}| \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ 0 \\ \gamma|\vec{v}_{D^{**}}| \end{pmatrix} = \gamma$$

Herleitung von (51)

Der Zusammenhang zwischen Geschwindigkeits- und Impulsbetrag ist bei Beachtung relativistischer Effekte:

$$|\vec{p}_{D^{**}}| = m_{D^{**}}\gamma|\vec{v}_{D^{**}}|$$

In den Heavyside-Lorentz-Einheiten ist weiterhin $|\vec{v}_{D^{**}}| = \beta$

$$\rightarrow \frac{|\vec{p}_{D^{**}}|}{m_{D^{**}}} = \gamma|\vec{v}_{D^{**}}| = (w^2 - 1)^{1/2}$$

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.