

Institut für Theoretische Physik



Numerische Berechnung des Quark-Antiquark-Potentials zur Bestimmung der kritischen Temperatur in der $SU(2)$ Yang-Mills-Theorie

BACHELORARBEIT

Björn Fröhlich Wagenbach
geboren am 12.01.1989
Matrikel-Nr. 3934157

September 2012

Betreuer & Erstprüfer	Prof. Marc Wagner
Zweitprüfer	Prof. Owe Philipsen

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	III
1 Einleitung	1
2 Numerische Grundlagen	3
2.1 Monte-Carlo-Simulation	3
2.1.1 Metropolis-Algorithmus	4
2.1.2 Detailed balance	5
2.2 Statistische Fehler	7
2.2.1 Jackknife-Methode	8
2.2.2 Binning	8
3 Vom Polyakov-Loop zur kritischen Temperatur	11
4 Ergebnisse und Auswertung	15
4.1 Polyakov-Loop L	16
4.1.1 $\langle L \rangle$	17
4.1.2 $\langle\langle L \rangle\rangle$	20
4.2 Suszeptibilität χ	21
4.3 Potential $V_{Q\bar{Q}}$	22
4.4 Kraft $F_{Q\bar{Q}}$	24
4.5 String-Spannung σ	26
5 Zusammenfassung und Diskussion	31
Literaturverzeichnis	33

Symbolverzeichnis

Symbol	Bedeutung
a	Gitterabstand
N_t	Gitterausdehnung in zeitlicher Richtung
N_s	Gitterausdehnung in räumlicher Richtung
g_0	Kopplungskonste SU(2)
$\beta = \frac{4}{g_0^2}$	Kopplungskonstante proportional zur Temperatur
β_c	kritisches β
T	Temperatur
T_c	kritische Temperatur
S	Wirkung
P	Plakette
L	Polyakov-Loop
$\langle L \rangle$	L gemittelt über alle räumlichen Gitterpunkte
$\langle\langle L \rangle\rangle$	$\langle L \rangle$ gemittelt über alle Konfigurationen
W	Wilson-Loop
χ	Suszeptibilität
σ	String-Spannung
$V_{Q\bar{Q}}$	Quark-Antiquark-Potential
$F_{Q\bar{Q}}$	Kraft zwischen Quark und Antiquark

1 Einleitung

Quarks lassen sich bislang bei für Experimente typischen Temperaturen nicht einzeln nachweisen, sondern treten mindestens als ein aus Quark und Antiquark bestehendem Paar, welches von Gluonen zusammengehalten wird, auf. Sobald versucht wird eines der Quarks zu separieren, steigt die Energie der Gluonen-Bindung kontinuierlich an, bis sich schließlich ein neues Quark-Antiquark-Paar inmitten des bestehenden Paares bildet. Hierbei spricht man von der sogenannten *Paarbildung* oder *Paarerzeugung*, während die nicht mögliche Separierung als *confinement* bezeichnet wird.

Wird die Temperatur dagegen hinreichend stark erhöht, können Quarks einzeln auftreten. Dieses Phänomen wird als *deconfinement* bezeichnet. Hierfür sind jedoch Temperaturen von über 10^{12} K notwendig, weshalb ein experimenteller Nachweis bisher nicht vollbracht ist.

Möchte man diese Fragestellung theoretisch behandeln, so ist ausgehend von der *QCD-Wirkung* auch ein analytisches Lösen nicht möglich, weshalb man sich numerischer Lösungsverfahren, wie beispielsweise der *Gittereichtheorie* bedient.

Der Fokus dieser Arbeit liegt gerade auf der numerischen Bestimmung der *kritischen Temperatur*, ab der sich Quarks isoliert beobachten lassen. Außerdem soll das Potential zwischen einem Quark und einem Antiquark bei endlicher Temperatur berechnet werden.

Dies wird nicht in der „vollen“ QCD gemacht, sondern in einer vereinfachten Theorie, der sogenannten *SU(2)-Yang-Mills-Theorie*. In dieser treten keine dynamischen, sondern unendlich schwere und somit statische Quarks, die nur zwei statt drei verschiedene *Farbladungen* tragen können, auf.

Durch die unendlich schwere Masse kann es nicht zur oben erwähnten Paarbildung kommen und man kann den Spin der Quarks vernachlässigen, da dieser keine Änderungen hervorrufen würde. Die hier und im Folgenden verwendete Bezeichnung *Quark* entspricht also eher einer *Farbladung*.

Die SU(2)-Yang-Mills-Theorie stellt dennoch eine gute Näherung des eigentlichen Problems dar, denn der Effekt des *confinement* bzw. *deconfinement* ist noch immer vorhanden.

1 Einleitung

Mit einer ähnlichen Fragestellung haben sich bereits die Arbeiten [3, 4] beschäftigt, an welche die vorliegende Arbeit angelehnt ist. Der Großteil des nötigen theoretischen Vorwissens wurde [1] entnommen.

Nach dieser Einleitung wird auf einige theoretische Aspekte, wie die Monte-Carlo-Simulation und das Auftreten statistischer Fehler, sowie Möglichkeiten diese zu minimieren, eingegangen. Anschließend folgt ein Kapitel, welches sich mit den *Polyakov-Loops*, die grundlegend für den größten Teil der Berechnungen sind, befasst. Danach folgen Ergebnisse und Auswertungen der verschiedenen berechneten Größen, wie dem eben erwähnten *Polyakov-Loop*, der *Suszeptibilität*, dem *Quark-Antiquark-Potential*, der *Kraft zwischen einem Quark und einem Antiquark* und der *String-Spannung*. Zum Schluss wird dann noch eine kurze Zusammenfassung samt Diskussion der Ergebnisse gegeben.

2 Numerische Grundlagen

Parallel zu dieser existieren zwei andere Bachelorarbeiten, die sich mit den auch für diese Arbeit grundlegenden Theorien, der Yang-Mills-Theorie im Kontinuum [12], dem Pfadintegralformalismus und der Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter [13], ausführlich auseinandersetzen.

Im Folgenden wird eher auf die technischen Aspekte wie die *Monte-Carlo-Simulation*, die Erzeugung der *Eichfeld-Konfigurationen* und *statistische Fehler* eingegangen.

2.1 Monte-Carlo-Simulation

Ziel ist es, eine Observable \mathcal{O} im Rahmen der Gittereichtheorie zu bestimmen, deren Erwartungswert durch

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z} \int \left(\prod_{i,j} dU_{ij} \right) e^{-\beta S(U)} \mathcal{O}(U) , \quad (2.1)$$

mit der *Zustandssumme*

$$Z = \int \left(\prod_{i,j} dU_{ij} \right) e^{-\beta S(U)} , \quad (2.2)$$

gegeben ist [1]. U_{ij} sind die Link-Variable zwischen Punkt i und Punkt j und $e^{-\beta S(U)}$ das Wahrscheinlichkeitsgewicht mit der Wirkung S und $\beta = \frac{4}{g_0^2}$ (g_0 : SU(2)-Kopplungskonstante).

Die Wirkung S ist dabei beispielsweise – analog zu [2] – gegeben durch:

$$S(U) = \sum_P S_P , \quad (2.3)$$

mit

$$S_P = 1 - \frac{1}{2} \text{Tr} (U_{ab} U_{bc} U_{cd} U_{da}) . \quad (2.4)$$

Hierbei sind U_{ij} die Link-Variablen in räumlicher Richtung und $\frac{1}{2} \text{Tr} (U_{ab} U_{bc} U_{cd} U_{da})$ die Plakette P , die später in Unterabschnitt 2.1.2 noch einmal aufgegriffen wird.

2 Numerische Grundlagen

Die in Gleichung 2.1 und Gleichung 2.2 auftauchenden hoch-dimensionalen Integrale sind oft nicht analytisch lösbar, weshalb man auf numerische Methoden, insbesondere Monte-Carlo-Simulationen, angewiesen ist.

Diese bedienen sich vor allem dem *starken Gesetz der großen Zahlen* [7]:

$$\langle X \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N X_i . \quad (2.5)$$

Auch wenn die Monte-Carlo-Simulation frei von *systematischen* Fehlern ist, entstehen bei endlichem N zwangsläufig *statistische* Fehler. Setzt man voneinander unabhängige Datensätze voraus, verhält sich der statistische Fehler proportional zu $\frac{1}{\sqrt{N}}$. Andernfalls sinkt er noch langsamer mit wachsendem N .

Da eine höhere Anzahl an Daten zwangsläufig mit mehr Rechenaufwand und einem höheren Speicherbedarf einhergeht, muss sich die Frage gestellt werden, inwieweit ein Erhöhen der Anzahl der Daten N sinnvoll ist.

Für die meisten Berechnungen, die in dieser Arbeit angestellt wurden, waren 10 000 Konfigurationen angemessen, was jedoch stark von der Gittergröße, der Temperatur (Nähe zum Phasenübergang bzw. *confinement*- oder *deconfinement*-Bereich) und der angestrebten Präzision der Berechnungen abhängt.

2.1.1 Metropolis-Algorithmus

Als einfaches Beispiel eines Monte-Carlo-Algorithmus' wird in diesem Unterabschnitt kurz auf den *Metropolis-Algorithmus* [8] eingegangen.

Monte-Carlo-Algorithmen basieren auf Markov-Ketten [7]. Man spricht von einer solchen, wenn der nächste Zustand jeweils nur vom gegenwärtigen Zustand abhängt. Dabei gelangt man zum nächsten Glied der Markov-kette, bzw. zum nachfolgenden Zustand, durch Multiplikation mit der zugehörigen *Übergangsmatrix* P .

Sei $P_0(C \rightarrow C')$ die Wahrscheinlichkeit in Konfiguration C die neue Konfiguration C' vorzuschlagen. Als Voraussetzung für den Metropolis-Algorithmus muss die sogenannte *mikroskopische Reversibilität* [1] gewährleistet sein:

$$P_0(C \rightarrow C') = P_0(C' \rightarrow C) \quad (2.6)$$

Die Funktionsweise des Algorithmus' lässt sich dann wie folgt unterteilen:

1. Die Anfangsbedingungen werden festgelegt. Ein Beispiel wäre:
 - *cold-start*: Die Konfiguration C bzw. alle Link-Variablen U_{ij} werden auf 1 gesetzt.
 - *hot-start*: Die Konfiguration C bzw. alle Link-Variablen U_{ij} erhalten einen zufälligen Wert.
2. Eine zufällige neue Konfiguration C' wird mit Wahrscheinlichkeit $P_0(C \rightarrow C')$ vorgeschlagen und es stellt sich die Frage, ob diese akzeptiert wird:
 - Gilt $\exp[-S(C')] > \exp[-S(C)]$, wird die neue Konfiguration sofort angenommen.
 - Gilt hingegen $\exp[-S(C')] \leq \exp[-S(C)]$, wird die neue Konfiguration nur mit Wahrscheinlichkeit $\frac{\exp[-S(C')]}{\exp[-S(C)]}$ akzeptiert. Dazu wird eine uniform auf $[0, 1]$ verteilte Zufallszahl Z erstellt und die Konfiguration wird nur aktualisiert, falls

$$Z \leq \frac{\exp[-S(C')]}{\exp[-S(C)]} . \quad (2.7)$$

Zusammengefasst gilt somit für die Wahrscheinlichkeit von Konfiguration C in Konfiguration C' überzugehen:

$$P(C \rightarrow C') = P_0(C \rightarrow C') \min \left(1, \frac{\exp[-S(C')]}{\exp[-S(C)]} \right) . \quad (2.8)$$

Der in dieser Arbeit verwendete Heatbath-Algorithmus funktioniert in ähnlicher Weise, ist jedoch deutlich effizienter. Die genaue Funktionsweise ist in [2] beschrieben.

2.1.2 Detailed balance

Man ist vor allem daran interessiert den sogenannten *Gleichgewichtszustand* zu erreichen, bei welchem die Wahrscheinlichkeit, die Konfiguration C vorzufinden, durch:

$$P(C) = \frac{\exp[-S(C)]}{Z} , \quad (2.9)$$

mit

$$Z = \sum_C e^{-S(C)} \quad (2.10)$$

gegeben ist. Gleichung 2.9 impliziert unter anderem eine Unabhängigkeit der Anfangsbedingungen.

2 Numerische Grundlagen

Die Bedingung für *detailed balance* lautet allgemein:

$$P(C) P_0(C \rightarrow C') = P(C') P_0(C' \rightarrow C) , \quad (2.11)$$

bzw. im Gleichgewichtszustand:

$$e^{-S(C)} P_0(C \rightarrow C') = e^{-S(C')} P_0(C' \rightarrow C) . \quad (2.12)$$

Der in Unterabschnitt 2.1.1 beschriebene Metropolis-Algorithmus erfüllt Gleichung 2.11 (in [1] ausführlich beschrieben), genauso wie der für die folgenden Berechnungen verwendete Heatbath-Algorithmus.

Jede Markov-Kette, die Gleichung 2.11 erfüllt, konvergiert in eine Gleichgewichtsverteilung und erst dann können die Eichfeld-Konfigurationen für die Berechnungen verwendet werden, da um allgemeingültige Aussagen treffen können eine Unabhängigkeit der Anfangsbedingungen unerlässlich ist.

Es muss daher ein gewisser Teil der erzeugten Eichfeld-Konfigurationen aussortiert werden. Wie viele dies sind, versucht man durch Betrachten leicht zu berechnender Observablen festzulegen. Ein Beispiel ist der Wert der Plakette

$$P = \frac{1}{2} \text{Tr} (U_{ab} U_{bc} U_{cd} U_{da}) . \quad (2.13)$$

Dazu wird sie unter sonst gleichen Voraussetzungen mit einem hot- und einem cold-start, also zwei unterschiedlichen Anfangsbedingungen, berechnet. Es muss nun beobachtet werden, ab wie vielen Monte-Carlo-Zeitschritten das Funktionsverhalten beider Berechnungen übereinstimmt, da dann von einem Gleichgewicht ausgegangen werden kann.

Wie in Abbildung 2.1 zu sehen ist, stellt sich bereits nach ca. 40 erstellten Eichfeld-Konfigurationen ein Gleichgewicht ein.

Man muss jedoch bedenken, dass sich nicht jede Observable im gleichen Tempo dem Gleichgewichtszustand nähert. Gerade die Temperatur (bzw. die Nähe eines Phasenübergangs) hat darauf einen großen Einfluss. Es ist daher ratsam diesen Wert nur als groben Anhaltspunkt zu sehen.

Für die später angestellten Berechnung wurden jeweils die erst 100 Konfigurationen aussortiert.

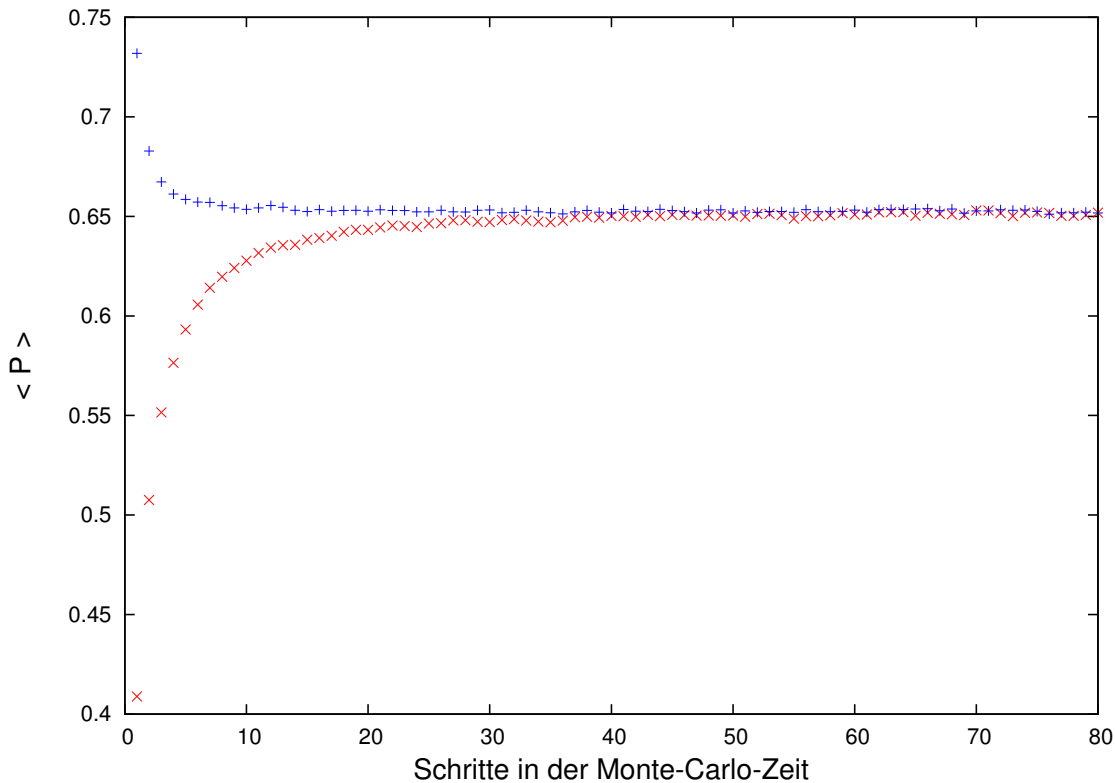


Abbildung 2.1: Die über die Gitterpunkte gemittelte Plakette $\langle P \rangle$ (rot: hot-start, blau: cold-start) als Funktion der Monte-Carlo-Zeitschritte für $\beta = 2.30$ bzw. $T = 140$ MeV ($\approx 0.47 T_c$) auf einem 16×16^3 - Gitter.

2.2 Statistische Fehler

Um die statistischen Fehler zu minimieren gibt es verschiedene Möglichkeiten. Man kann beispielsweise je nach Observable die Gitterausdehnungen N_s und N_t oder die Anzahl der zu berechnenden Konfigurationen N erhöhen. Dadurch erhält man eine größere Statistik, auf die sich die Berechnungen stützen, wodurch die statistischen Fehler abnehmen. Beide Varianten vergrößern jedoch den Rechenaufwand bzw. die Berechnungsdauern. Zudem sinkt der Fehler maximal (bei Unabhängigkeit) – wie weiter oben bereits erwähnt – mit $\frac{1}{\sqrt{N}}$.

Es gibt daher andere Methoden, mit denen sich die statistischen Fluktuationen reduzieren lassen. Ein Beispiel wäre das sogenannte *Smearing*, welches in dieser Arbeit bei der Berechnung des Quark-Antiquark-Potentials $V_{Q\bar{Q}}$ bei $T = 0$ angewandt wurde. Genauer gesagt handelt es sich dabei um das *APE Smearing*, bei dem die Links in räumlicher Richtung „fetter“ gemacht werden, was bedeutet, dass nicht nur der direkte räumliche Link zur Berechnung beiträgt, sondern auch die umliegenden mit entsprechender Gewichtung. Etwas ausführlicher wird darauf in [13] eingegangen.

2 Numerische Grundlagen

Ein anderes Problem der Berechnungen sind die auftretenden *Autokorrelationen*, da sich die meisten hier verwendeten Methoden zur Fehlerabschätzung gerade darauf stützen, dass diese nicht vorhanden sind. Die Autokorrelation beschreibt einen Spezialfall der *Korrelation*, bei der es sich um die *selbe* Zufallsvariable (zu verschiedenen Monte-Carlo-Zeitschritten) handelt. In Unterabschnitt 2.2.2 wird die Methode des *Binnings* als eine Möglichkeit, Autokorrelationen zu erkennen und ggf. zu beseitigen, vorgestellt.

2.2.1 Jackknife-Methode

Für Zufallsvariablen x_i ($i = 1, 2, \dots, N$), die mit einem Monte-Carlo-Algorithmus erzeugt wurden, lässt sich der Fehler bzw. die Standardabweichung direkt angeben:

$$\sigma(x_i) = \sqrt{\text{Var}(x_i)} = \sqrt{\langle x_i^2 \rangle - \langle x_i \rangle^2} . \quad (2.14)$$

Sobald jedoch die Standardabweichung einer Funktion $f(x_i)$ bestimmt werden soll, wird die Berechnung aufwändiger. Mit der sogenannten *Jackknife-Methode* kann der Fehler jedoch angenähert werden.

Bei der *Jackknife-Methode* werden zunächst der Mittelwert \bar{f} sowie N neue Funktionswerte f'_i aus den erzeugten Daten x_i ($i = 1, 2, \dots, N$) gebildet:

$$\bar{f} = f \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right) \quad (2.15)$$

und

$$f'_i = f \left(\frac{1}{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N x_j \right) . \quad (2.16)$$

Der Fehler bzw. die Standardabweichung ist dann gegeben durch:

$$\sigma(f) = \sqrt{\frac{N-1}{N} \sum_{i=1}^N (\bar{f} - f'_i)^2} . \quad (2.17)$$

2.2.2 Binning

Die Methode des *Binnings* ist besonders geeignet um unerwünschte Autokorrelationen zu identifizieren und ggf. zu beseitigen.

Seien x_i ($i = 1, 2, \dots, N$) wieder die Werte des vorhandenen Datensatzes. Zunächst wird festgelegt, welche *Bin-Größe* n verwendet wird. Der neue Datensatz besteht dann aus folgenden Werten:

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n), \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{n}(x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{2n}), \quad \dots \quad (2.18)$$

Nun führt man die Berechnungen mit den neuen Werten \bar{x}_i durch. Ändern sich die Fehler beim Erhöhen der Bin-Größe n nicht, so liegt keine Autokorrelation vor. Sollten diese jedoch mit steigendem n anwachsen, muss man solange von Autokorrelationen ausgehen, bis die Funktion in ein Plateau übergeht. Als neuer Fehler ist dann der Wert in Höhe des Plateaus zu nehmen.

Als ein Beispiel soll der Betrag des sogenannten *Polyakov-Loops* $\langle\langle |L| \rangle\rangle$ (über die Gitterpunkte und die Eichfeld-Konfigurationen gemittelt), der eine zentrale Rolle dieser Arbeit spielt, dienen.

In Abbildung 2.2 und Abbildung 2.3 sind die Fehler bzw. die relativen Fehler von $\langle\langle |L| \rangle\rangle$ für verschiedene Temperaturen gegen die Bin-Größe n aufgetragen.

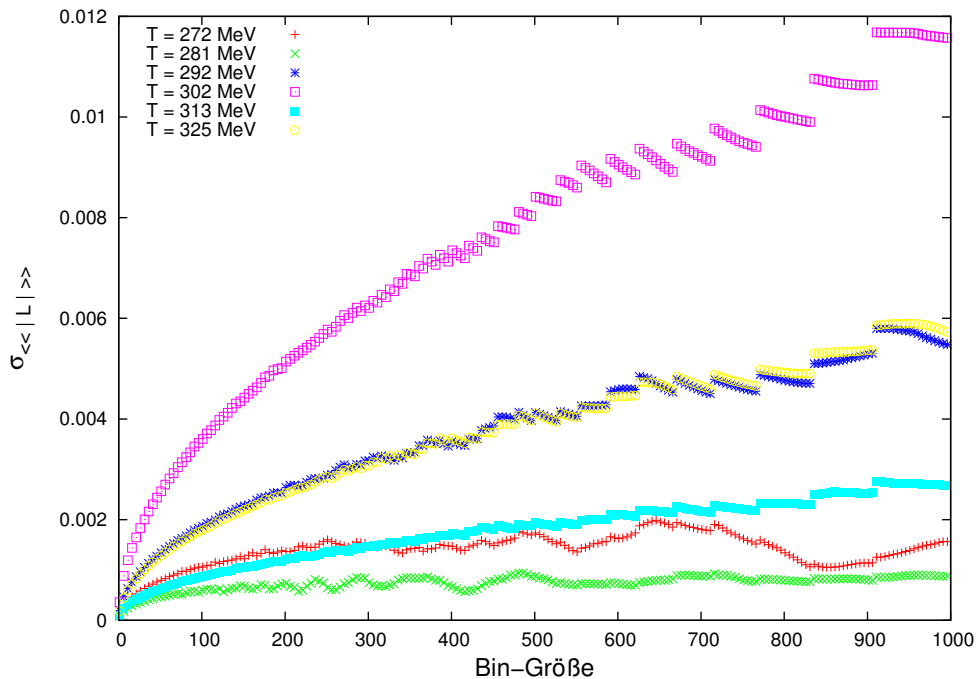


Abbildung 2.2: Der absolute Fehler (die Standardabweichung σ) von $\langle\langle |L| \rangle\rangle$ in Abhängigkeit der Bin-Größe für verschiedene Temperaturen T .

Bei höheren oder niedrigeren Temperaturen stiegen die Fehler so gering an, dass von einer Abwesenheit von Autokorrelationen auszugehen ist und sie deshalb hier auch nicht aufgeführt sind.

2 Numerische Grundlagen

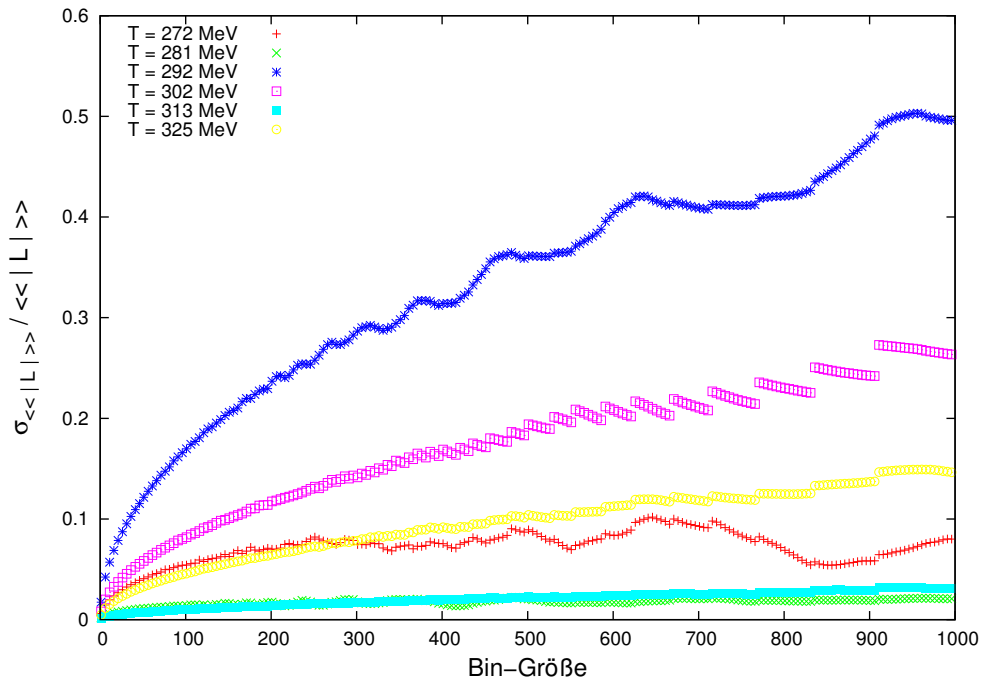


Abbildung 2.3: Der relative Fehler $\frac{\sigma_{\langle\langle L \rangle\rangle}}{\langle\langle L \rangle\rangle}$ des über die Gitterpunkte und Konfigurationen gemittelten Polyakov-Loops $\langle\langle L \rangle\rangle$ in Abhängigkeit der Bin-Größe für verschiedene Temperaturen T .

Wie zu sehen ist, steigen die Fehler für die Temperaturen 292, 302, 313 und 325 MeV (das entspricht den β -Werten 2.52, 2.53, 2.54 und 2.55) mit wachsender Bin-Größe zum Teil drastisch an. Das lässt darauf schließen, dass hohe Autokorrelationen zugrunde liegen. Dieses Verhalten muss bei der Fehlerbetrachtung später berücksichtigt werden.

Für die Temperaturen 272 und 281 MeV (β -Werte 2.50 und 2.51) ist es hingegen möglich den tatsächlichen Fehler relativ gut abzuschätzen, da die Funktionen in Plateaus überzugehen scheinen.

Die periodisch auftretenden Sprünge der Funktionen sind dadurch zu erklären, dass bei einer Bin-Größe von beispielsweise 100 bei 1000 Werten exakt 10 neue Werte \bar{x}_i entstehen. Anders beispielsweise bei einer Bin-Größe von 101. Hier entstehen für 1000 Werte lediglich 9 neue Werte \bar{x}_i analog zu Gleichung 2.18 und die letzten 91 Werte x_{910}, \dots, x_{1000} bleiben unberücksichtigt. Weniger Werte führen zu einem Anwachsen des statistischen Fehlers. Das bedeutet, dass immer wenn die Bin-Größe so stark gewachsen ist, dass sich die neue Datenmenge verringert, der Fehler sprunghaft ansteigt.

3 Vom Polyakov-Loop zur kritischen Temperatur

Wie bereits erwähnt ist der Polyakov-Loop L ein zentraler Bestandteil dieser Arbeit und ist die Grundlage fast aller Berechnungen. Er hat die Form

$$L(\vec{r}_i) = \frac{1}{2} \text{Tr} \left(U_1(\vec{r}_i) U_2(\vec{r}_i) \cdots U_{N_t}(\vec{r}_i) \right). \quad (3.1)$$

Hierbei sind $U_n(\vec{r}_i) = e^{ig_0 a A_4(\vec{r}_i)}$, die Link-Variablen in zeitlicher Richtung, welche in aufsteigender Reihenfolge zu multiplizieren sind, mit der Kopplungskonstante g_0 , dem Gitterabstand a und dem Eichfeld $A_\mu = A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2}$ (vgl. [1]).

Er bildet damit an einem bestimmten Raumpunkt \vec{r}_i eine aufgrund der Periodizität des Gitters geschlossene Schleife in zeitlicher Richtung.

Wie diese doch eher abstrakte Größe eine Auskunft über die kritische Temperatur T_c geben kann, wird im Folgenden – angelehnt an [3] – erläutert:

Aus der *Statistischen Mechanik* [11] ist folgender Zusammenhang zwischen der *kanonischen Zustandssumme* und der *Freien Energie* bekannt:

$$F = -T \ln(Z) \quad \text{bzw.} \quad Z = \exp \left(-\frac{F}{T} \right). \quad (3.2)$$

Um zu zeigen, dass sich diese Gleichung in einen Ausdruck, der die Polyakov-Loops enthält, umformen lässt, müssen zunächst die *Quark-Operatoren* $Q_a^\dagger(\vec{r}_i, t)$ (Erzeuger) und $Q_a(\vec{r}_i, t)$ (Vernichter), genauso wie die *Antiquark-Operatoren* $Q_a^{c\dagger}(\vec{r}_i, t)$ (Erzeuger) und $Q_a^c(\vec{r}_i, t)$ (Vernichter) zur *Farbladung* a , die die Antikommutationsrelation

$$\{Q_a(\vec{r}_i, t), Q_b^\dagger(\vec{r}_j, t)\} = \delta_{ij} \delta_{ab} \quad (3.3)$$

erfüllen, eingeführt werden.

3 Vom Polyakov-Loop zur kritischen Temperatur

Gleichung 3.2 lässt sich in der *Bra-Ket*-Notation für N_Q Quarks bzw. $N_{\bar{Q}}$ Antiquarks in folgende Form bringen:

$$\exp\left(-\frac{1}{T} F_{N_Q, N_{\bar{Q}}}\right) = \sum_{|s\rangle} \langle s| \exp\left(-\frac{H}{T}\right) |s\rangle, \quad (3.4)$$

mit

$$F_{N_Q, N_{\bar{Q}}} \equiv F\left(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{N_Q}, \vec{r}'_1, \dots, \vec{r}'_{N_{\bar{Q}}}\right). \quad (3.5)$$

$|s\rangle$ sind dabei alle Zustände mit Quarks an den Stellen $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{N_Q}$ und Antiquarks an den Stellen $\vec{r}'_1, \dots, \vec{r}'_{N_{\bar{Q}}}$.

Mit Hilfe der oben eingeführten Quark- und Antiquark-Operatoren lässt sich Gleichung 3.4 auch als Summe über beliebige Zustände $|s'\rangle$ umschreiben:

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{1}{T} F_{N_Q, N_{\bar{Q}}}\right) &= \frac{1}{N^{N_Q + N_{\bar{Q}}}} \sum_{|s'\rangle} \sum_{a,b} Q_{a_1}(\vec{r}_1, 0) \cdots Q_{a_{N_Q}}(\vec{r}_{N_Q}, 0) \\ &\cdot Q_{b_1}^c(\vec{r}'_1, 0) \cdots Q_{b_{N_{\bar{Q}}}}^c(\vec{r}'_{N_{\bar{Q}}}, 0) \exp\left(-\frac{H}{T}\right) Q_{a_1}^+(\vec{r}_1, 0) \cdots Q_{a_{N_Q}}^+(\vec{r}_{N_Q}, 0) \\ &\cdot Q_{a_1}^{c+}(\vec{r}_1, 0) \cdots Q_{a_{N_{\bar{Q}}}}^{c+}(\vec{r}_{N_{\bar{Q}}}, 0) |s'\rangle. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Der Faktor $\frac{1}{N^{N_Q + N_{\bar{Q}}}}$ wurde analog zu [3] aus Normierungsgründen eingeführt und ist physikalisch nicht problematisch, da dadurch lediglich eine Konstante zur Freien Energie addiert wird.

Nachdem $\exp\left(-\frac{H}{T}\right)$ analog zum Zeitentwicklungsoperator [10]

$$\exp\left(-\frac{H}{T}\right) \mathcal{O}(t) \exp\left(\frac{H}{T}\right) = \mathcal{O}(t + \beta) \quad (3.7)$$

erfüllt, ist Gleichung 3.6 nach mehrfachem Einfügen von $1 = \exp\left(\frac{H}{T}\right) \exp\left(-\frac{H}{T}\right)$ in

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{1}{T} F_{N_Q, N_{\bar{Q}}}\right) &= \frac{1}{N^{N_Q + N_{\bar{Q}}}} \sum_{|s'\rangle} \sum_{a,b} \exp\left(-\frac{H}{T}\right) \\ &\cdot Q_{a_1}(\vec{r}_1, \beta) Q_{a_1}^+(\vec{r}_1, 0) \cdots Q_{a_{N_Q}}(\vec{r}_{N_Q}, \beta) Q_{a_{N_Q}}^+(\vec{r}_{N_Q}, 0) \\ &\cdot Q_{b_1}^c(\vec{r}'_1, \beta) Q_{b_1}^{c+}(\vec{r}'_1, 0) \cdots Q_{b_{N_{\bar{Q}}}}^c(\vec{r}'_{N_{\bar{Q}}}, \beta) Q_{b_{N_{\bar{Q}}}}^{c+}(\vec{r}'_{N_{\bar{Q}}}, 0) |s'\rangle \end{aligned} \quad (3.8)$$

umzuformen.

Da es sich hierbei um unendlich schwere Quarks handelt, lässt sich Gleichung 3.8 im Rahmen der *Heavy Quark Effective Theory* in

$$\exp\left(-\frac{1}{T} F_{N_Q, N_{\bar{Q}}}\right) = \text{Tr} \left[\exp\left(-\frac{H}{T}\right) L(\vec{r}_1) \cdots L(\vec{r}_{N_Q}) L^\dagger(\vec{r}'_1) \cdots L^\dagger(\vec{r}'_{N_{\bar{Q}}}) \right] \quad (3.9)$$

überführen [3].

Da es sich in dieser Arbeit bei den Link-Variablen U um $SU(2)$ -Gruppenelemente handelt, ist die Spur der Link-Variablen in Gleichung 3.1 reell. Von hier an wird daher $L^\dagger(\vec{r}) = L(\vec{r})$ verwendet.

Für nur ein Quark nimmt Gleichung 3.9 die recht einfache Form

$$\exp\left(-\frac{1}{T} F_{1,0}\right) = \text{Tr} \left[\exp\left(-\frac{H}{T}\right) L(0) \right] \quad (3.10)$$

an.

Somit lässt sich jetzt schon anhand des Polyakov-Loops L die kritische Temperatur T_c auf einen gewissen Bereich einschränken; denn wie an Gleichung 3.10 zu sehen ist, gilt offenbar:

$$\begin{aligned} \langle L \rangle = 0 &\iff \text{Freie Energie unendlich} \iff \text{confinement} \\ \langle L \rangle \neq 0 &\iff \text{Freie Energie endlich} \iff \text{deconfinement} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Die jeweils rechten Äquivalenzrelationen in Gleichung 3.11 rühren daher, dass sich ein einzelnes Quark mit einer unendlich hohen Freien Energie nicht separiert betrachten lässt. Deshalb spricht man vom confinement. Sobald hingegen die Freie Energie des Quarks endlich wird, ist es möglich, dieses zu separieren und es ist die Rede vom deconfinement.

Um eine genauere Aussage über die kritische Temperatur T_c treffen zu können, lassen sich noch weitere Größen betrachten [6]:

- Der Betrag des über alle Eichfeld-Konfigurationen gemittelten *Polyakov-Loops* $\langle\langle |L| \rangle\rangle$ in Abhängigkeit von β bzw. der Temperatur T :
Bei der kritischen Temperatur T_c , sollte aufgrund des Phasenübergangs¹ ein deutlicher Anstieg des Wertes von $\langle\langle |L| \rangle\rangle$ zu sehen sein.
- Die *Suszeptibilität* χ , die der Varianz des Polyakov-Loops entspricht (Abschnitt 4.2), in Abhängigkeit von β bzw. T :
Bei T_c sollte ein Peak entstehen.

¹ Ein „echter“ Phasenübergang findet nicht statt, da diese nur im Kontinuum auftreten und es sich hier um Berechnungen auf einem endlichen Gitter handelt. Trotzdem sind die charakteristischen Verhalten der Observablen in der Nähe des Phasenübergangs sichtbar.

3 Vom Polyakov-Loop zur kritischen Temperatur

- Das *Quark-Antiquark-Potential* $V_{Q\bar{Q}}$ (Abschnitt 4.3) in Abhängigkeit des Abstands der Quarks:
Ab T_c sollte das Potential für große Abstände in ein Plateau übergehen.
 - Die *Kraft zwischen Quark und Antiquark* $F_{Q\bar{Q}}$, also die Ableitung des Potentials $V_{Q\bar{Q}}$, in Abhängigkeit des Abstands:
Ab T_c muss die Kraft für große Abstände verschwinden.
 - Die *String-Spannung* σ , welche der Steigung des Potentials $V_{Q\bar{Q}}$ für große Abstände entspricht:
Ab T_c sollte diese den Wert 0 annehmen.

Anhand dieser Größen lässt sich der Bereich für T_c dann recht gut einschränken und man hat gleichzeitig die Möglichkeit seine Berechnungen zu überprüfen.

4 Ergebnisse und Auswertung

Da eigentlich $N_s \rightarrow \infty$ zu erfüllen ist, sollte N_s zumindest deutlich größer als N_t sein. Im Folgenden wird die Ermittlung einer hierfür sinnvollen Gitterausdehnung kurz beschrieben.

Da der im Mittelpunkt stehende lineare Anteil des statischen Potentials ab ca. 0.5 fm zu beobachten ist, sollten Abstände bis mindestens 1 fm erreicht werden. Zudem entspricht 1 fm in etwa der Hadronenausdehnung und bietet somit eine geeignete Größenordnung für die starken Wechselwirkung. Berücksichtigt man nun noch die Periodizität des Gitters, wird mit der in Abschnitt 4.3 eingeführten Gleichung 4.4 schnell folgender Zusammenhang klar:

$$\begin{aligned} V_{Q\bar{Q}}(0) &= V_{Q\bar{Q}}(N_t) \\ V_{Q\bar{Q}}(1) &= V_{Q\bar{Q}}(N_t - 1) \\ &\vdots \end{aligned} \tag{4.1}$$

Dies ist zwar praktisch, um seine Berechnungen zu überprüfen, jedoch erhält man für eine räumliche Ausdehnung von N_s für das Potential nur Werte bis zum Abstand $\frac{N_s}{2}a$.

Die Größe der Gitterausdehnung ist vor allem auch durch die verfügbaren Rechenkapazitäten bestimmt. Die Wahl fiel schließlich auf ein 8×24^3 - Gitter, mit Werten für die Kopplungskonstante β im Bereich von 2.30 und 2.70, wodurch alle oben genannten Kriterien erfüllt sind.

Der Zusammenhang $\beta \leftrightarrow a$ wurde mit [5] hergestellt. Dort folgte die Umrechnung von Gittereinheiten in „physikalische“ Einheiten mit Hilfe der *String-Spannung* σ bei $T = 0$. In [5] hat diese den Wert von ca. $870 \frac{\text{MeV}}{\text{fm}}$ (4.41 in Gittereinheiten). Da auch β -Werte, die nicht in [5] aufgeführt sind, verwendet wurden, mussten die fehlenden Daten interpoliert werden.

Über den so bestimmten Gitterabstand a erhält man die Temperatur durch [1]

$$T = \frac{1}{N_t a} . \tag{4.2}$$

Diese hat zunächst noch die Einheit $\frac{1}{\text{fm}}$, was durch die in *natürlichen Einheiten* geltende Beziehung $1 = \hbar c \approx 197.32697 \text{ MeVfm}$ schnell in MeV umzuwandeln ist.

4 Ergebnisse und Auswertung

In Tabelle 4.1 sind die in dieser Arbeit verwendeten Werte für β , a und T aufgeführt.

β	a in fm	T in MeV	β	a in fm	T in MeV
2.30	0.1757	140	2.54	0.0787	313
2.40	0.1267	195	2.55	0.0759	325
2.50	0.0907	272	2.56	0.0732	337
2.51	0.0878	281	2.58	0.0681	362
2.52	0.0846	292	2.60	0.0648	381
2.53	0.0816	302	2.70	0.0483	511

Tabelle 4.1: Zusammenhang zwischen der Kopplungskonstanten β , dem Gitterabstand a und der Temperatur T .

Für die folgenden Ergebnisse wurden für die Temperaturen aus Tabelle 4.1 jeweils 10 000 Eichfeld-Konfigurationen berechnet, wobei jedes Mal die ersten 100 unberücksichtigt blieben (vgl. Unterabschnitt 2.1.2).

Zudem sollte den Autokorrelationen vorgebeugt werden, weshalb nur jede fünfte Eichfeld-Konfiguration zur Berechnung verwendet wurde. Dies ist jedoch gerade für Temperaturen nahe T_c , wie in Abbildung 2.2 bzw. Abbildung 2.3 zu sehen ist, nicht immer ausreichend. Mit dem in Unterabschnitt 2.2.2 vorgestellten Binning konnte dennoch ein Großteil der Autokorrelationen beseitigt werden.

Effektiv kamen somit jeweils 1 980 Eichfeld-Konfigurationen pro Temperaturwert für die späteren Berechnungen zustande.

Da zu niedrigen Temperaturen hin der relative Fehler bei der Berechnung des Quark-Antiquark-Potentials $V_{Q\bar{Q}}$ (Abschnitt 4.3) deutlich anstieg, wurden bei $T = 140$ MeV ($\beta = 2.30$) und $T = 195$ MeV ($\beta = 2.40$) je 100 000 Eichfeld-Konfiguration nach obigem Muster berechnet, wodurch effektiv 19 980 Eichfeld-Konfigurationen den zugrundeliegenden Datensatz bildeten.

4.1 Polyakov-Loop L

Die erste Observable, die berechnet und ausgewertet wurde, war der Polyakov-Loop. Hierbei gibt es zwei Methoden, Aufschlüsse über T_c zu erlangen (vgl. Kapitel 3).

In Unterabschnitt 4.1.1 wird zunächst der über die räumlichen Gitterpunkte gemittelte Polyakov-Loop $\langle L \rangle$ in Abhängigkeit der einzelnen Konfigurationen betrachten und danach, in Unterabschnitt 4.1.2, der zusätzlich über die Konfigurationen gemittelte Betrag des Polyakov-Loops $\langle \langle |L| \rangle \rangle$ in Abhängigkeit der Temperatur.

4.1.1 $\langle L \rangle$

In Abbildung 4.1 sind zunächst nur deutlich höhere bzw. niedrigere Temperaturen als T_c dargestellt, damit ein Überblick über den Verlauf der Funktionen im jeweiligen Extremfall geschaffen wird.

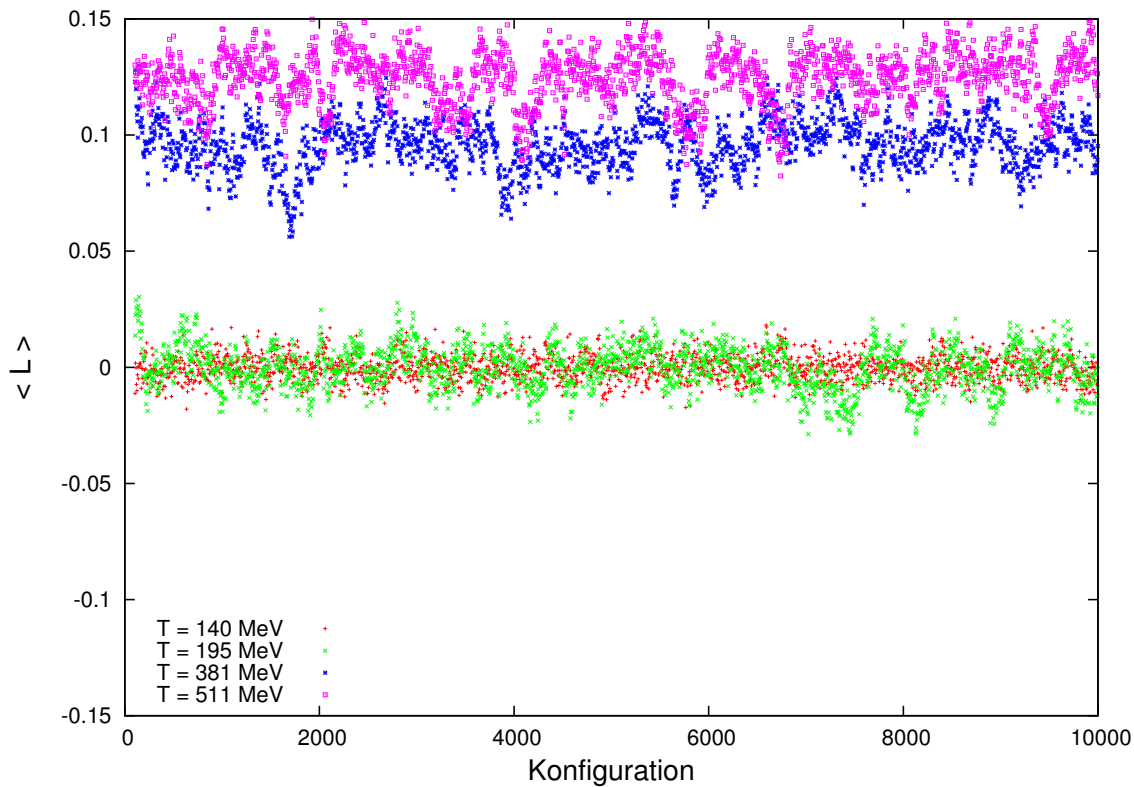


Abbildung 4.1: Der Polyakov-Loop $\langle L \rangle$ in Abhängigkeit der Konfigurationen für Temperaturen $T \ll T_c$ ($0.47 T_c$ und $0.65 T_c$) und $T \gg T_c$ ($1.27 T_c$ und $1.70 T_c$).

Es ist deutlich zu sehen, dass die Werte für die niedrigen Temperaturen von 140 und 195 MeV um den Nullpunkt fluktuieren und der Erwartungswert somit den Wert 0 annimmt. Vergleicht man dies mit Gleichung 3.11, so befindet man sich offenbar im confinement-Bereich.

Ganz anders sieht es bei den hohen Temperaturen 381 und 511 MeV aus. Hier kann vom deconfinement-Bereich ausgegangen werden, da sich die Erwartungswerte deutlich vom Wert 0 abheben.

In Abbildung 4.2 und Abbildung 4.3 sind dann die Temperaturen nahe T_c aufgetragen.

4 Ergebnisse und Auswertung

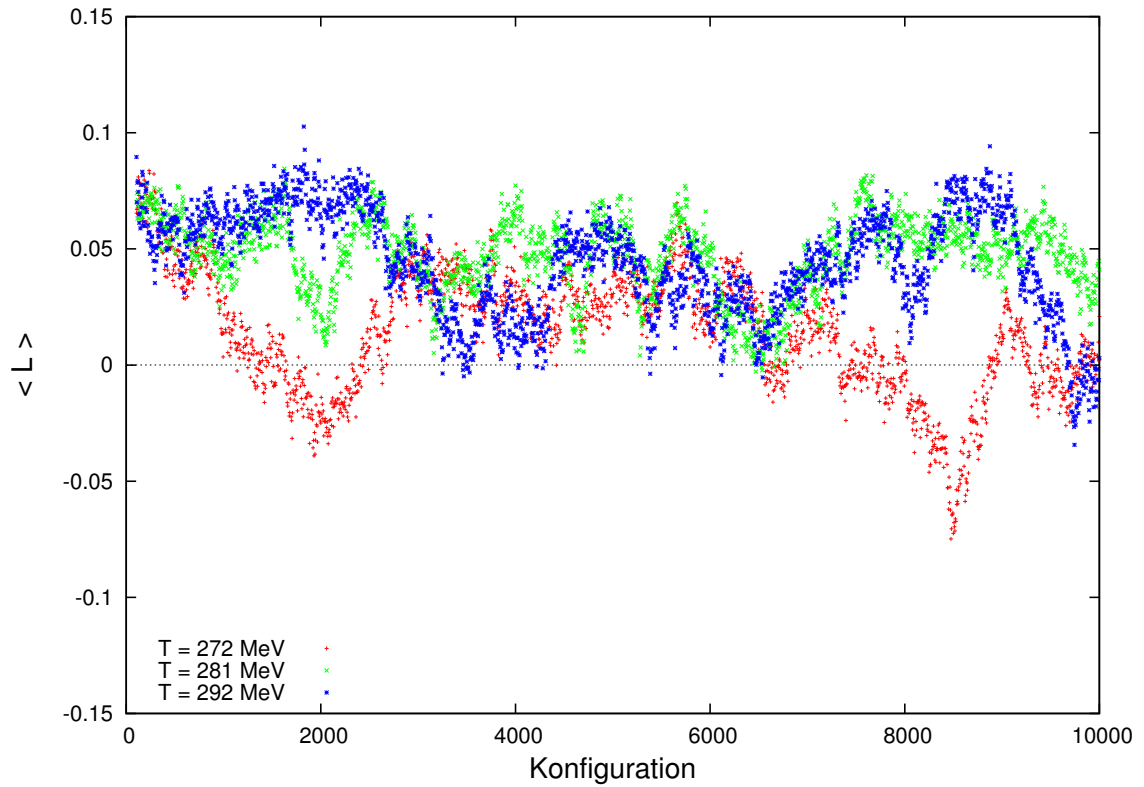


Abbildung 4.2: Der Polyakov-Loop $\langle L \rangle$ in Abhängigkeit der Konfigurationen nahe T_c (1).

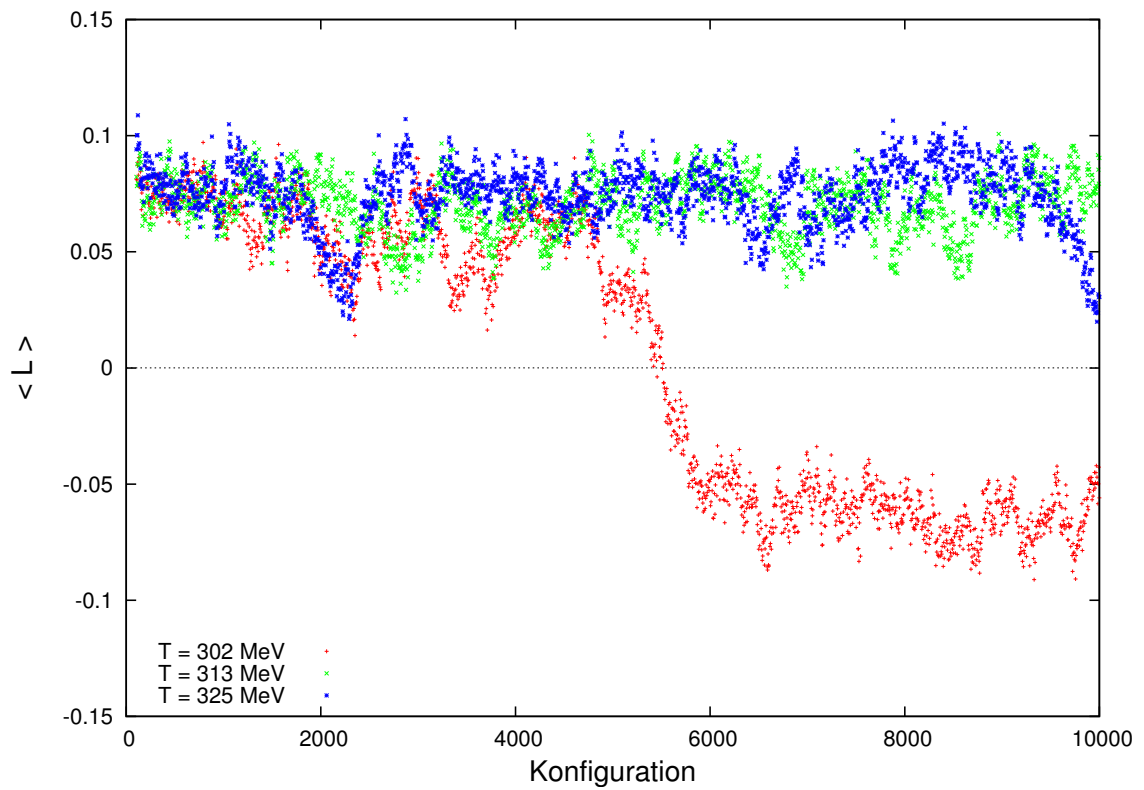


Abbildung 4.3: Der Polyakov-Loop $\langle L \rangle$ in Abhängigkeit der Konfigurationen nahe T_c (2).

Hier ist es deutlich schwieriger zu entscheiden, ob man sich im confinement- oder deconfinement-Bereich befindet.

Wie in Unterabschnitt 2.2.2 besprochen, liegt dies an den hohen Autokorrelationen nahe T_c . Beobachtet man die verschiedenen Korrelationslängen in Abbildung 4.1 im Vergleich zu Abbildung 4.2 bzw. Abbildung 4.3, so stellt man fest, dass sich diese, je näher die Temperatur dem vermeintlichen Wert von T_c kommt, vergrößern. Besonders bei $T = 302$ MeV ist dies sehr deutlich zu sehen.

Würde man hier weitere Konfigurationen verwenden, so ist nicht zu sagen, ob der Wert von $\langle L \rangle$ weiter um etwa -0.07 fluktuiert oder wieder ins Positive übergeht, also ob der Erwartungswert von $\langle L \rangle$ den Wert 0 oder einen endlichen Wert ungleich 0 annimmt, was direkt damit zusammenhängt, ob man sich im confinement- oder deconfinement-Bereich befindet.

Dies unterstreicht die Tatsache, dass „echte“ Phasenübergänge nur im Kontinuum auftreten. In einem endlichen Volumen ist somit immer auch eine endliche Wahrscheinlichkeit für ein Springen des Wertes von $\langle L \rangle$ gegeben.

Da für die hier verwendeten $10\,000$ Konfigurationen jedoch schon ein recht großer Rechenaufwand zu tätigen war, würde ein Erhöhen der Anzahl der Eichfeld-Konfigurationen aller aufgeführten Temperaturen den zeitlichen Rahmen deutlich sprengen.

4 Ergebnisse und Auswertung

4.1.2 $\langle\langle|L|\rangle\rangle$

Mittelt man den Betrag der eben berechneten Polyakov-Loops nun über alle Konfiguration und trägt den neuen Mittelwert $\langle\langle|L|\rangle\rangle$ gegen die Temperatur auf, führt dies zu Abbildung 4.4.

Die Fehlerbalken sind auf den in der höchsten Bin-Größe errechneten Wert gesetzt, was für die Temperaturen deutlich ober- bzw. unterhalb der kritischen Temperatur T_c eine realistische Angabe sein sollte.

Für die Temperaturen nahe T_c ist dies jedoch nicht ausreichend (vgl. Abbildung 2.2 bzw. Abbildung 2.3). Deshalb wurden für die vier Temperaturen, bei denen der Fehler noch deutlich anzusteigen schien, zusätzlich gestrichelte Fehlerbalken eingefügt.

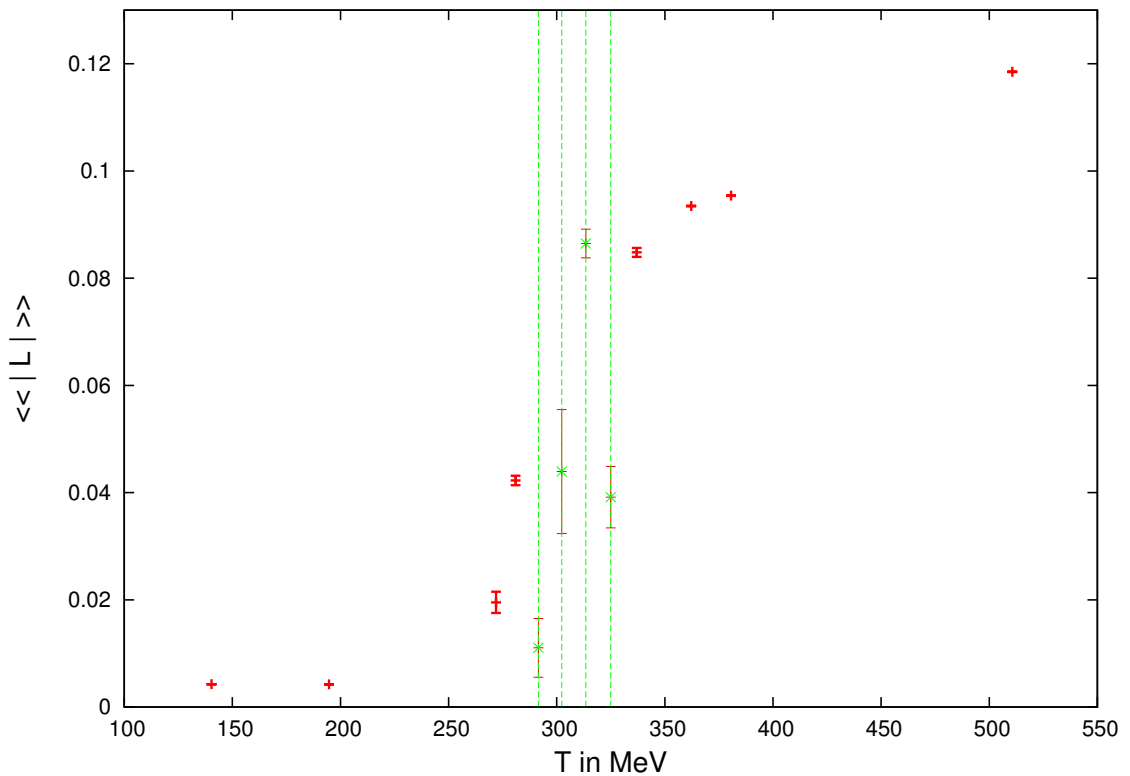


Abbildung 4.4: Der Polyakov-Loop $\langle\langle|L|\rangle\rangle$ in Abhängigkeit der Temperatur T .

Nach den jetzigen Ergebnissen, auch wenn diese zum Teil mit hohen Autokorrelationen im Bereich um T_c verbunden sind, lässt sich die kritische Temperatur auf den Bereich zwischen 280 und 320 MeV eingrenzen.

4.2 Suszeptibilität χ

Die Suszeptibilität χ bietet eine weitere Möglichkeit T_c zu bestimmen. Sie entspricht, bis auf den Vorfaktor N_s^3 , gerade der Varianz des Betrags des Polyakov-Loops [6, 7]:

$$\chi = N_s^3 \text{Var}[|L|] = N_s^3 \left(\mathbb{E} \left[(\mathbb{E}[|L|] - |L|)^2 \right] \right) = N_s^3 \left(\mathbb{E}[|L|^2] - \mathbb{E}[|L|]^2 \right) . \quad (4.3)$$

Da die Autokorrelationen nahe T_c bei der Betrachtung des Polyakov-Loops immens waren, ist bei der Suszeptibilität χ ebenfalls mit solchen zu rechnen. Aufgrund dessen wurde auch hier eine Binning-Analyse durchgeführt.

In Abbildung 4.5 sind die Ergebnisse ohne Fehlerbalken aufgetragen, da diese, wie in Abbildung 4.6 angedeutet ist, bei steigender Bin-Größe enorm zunehmen und somit nicht sinnvoll darzustellen sind. Selbst bei den niedrigen Temperaturen von 140 bzw. 195 MeV steigt der Fehler auf 10 bzw. 15 Prozent an. Bei den höheren Temperaturen liegt der Fehler bei 25 bis über 60 Prozent, weshalb die physikalische Aussage von Abbildung 4.5 in Frage zu stellen ist.

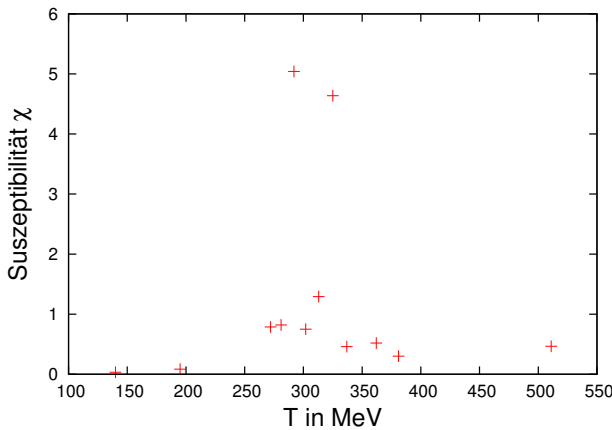


Abbildung 4.5: Die Suszeptibilität χ in Abhängigkeit der Temperatur T .

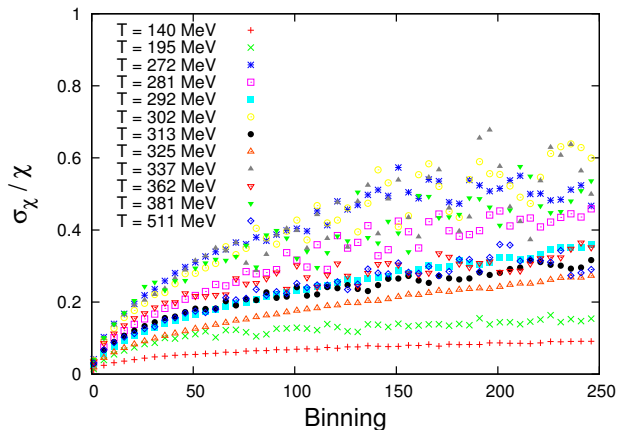


Abbildung 4.6: Der relative Fehler $\frac{\sigma_\chi}{\chi}$ der Suszeptibilität χ in Abhängigkeit Bin-Größe.

Nichtsdestotrotz liefert die Betrachtung der Suszeptibilität χ keinen Widerspruch zur bisherigen Annahme, T_c im Bereich zwischen 280 und 320 MeV zu lokalisieren, sondern bestätigt diese eher, da wie Abbildung 4.5 zeigt, der gesuchte Peak im besagten Bereich aufzutreten scheint.

4.3 Potential $V_{Q\bar{Q}}$

Aus Gleichung 3.9 folgt für ein Quark und ein Antiquark mit Abstand r :

$$E_{1,1}(r) \equiv V_{Q\bar{Q}}(r) = -T \ln \left(\text{Tr} [L(0)L(r)] \right) + \text{const.} \quad (4.4)$$

Da in den hier angestellten Berechnungen die Kopplungskonstante β und somit der Gitterabstand a variiert wurde, ist es nicht möglich, die addierte Konstante in Gleichung 4.4 zu bestimmen. Das liegt daran, dass sich mit dem Gitterabstand a auch der Raum, auf den das Quark lokalisiert wird, ändert. Dies zieht zwangsläufig eine Änderung der Impulsverteilung mit sich und somit eine Änderung der Selbstenergie. Deshalb sind die in den folgenden Abbildungen dargestellten Absolutwerte der Potentiale nicht direkt vergleichbar.

In Abbildung 4.7 ist als Beispiel für den confinement-Bereich zunächst das Potential $V_{Q\bar{Q}}(r)$ für die niedrigste hier verwendete Temperatur von 195 MeV aufgetragen. Hier ist deutlich zu sehen, dass das bei kleinen Abständen *Coulomb-artige* Potential sehr schnell in ein *lineares* Potential mit positiver Steigung übergeht.

Zum Vergleich ist in Abbildung 4.8 das Potential $V_{Q\bar{Q}}(r)$ für die höchste hier verwendete Temperatur von 381 MeV gezeigt. Man kann erkennen, dass ab etwa 0.5 fm das Potential in ein *Plateau* übergeht, was bedeutet, dass man sich im deconfinement-Bereich befindet.

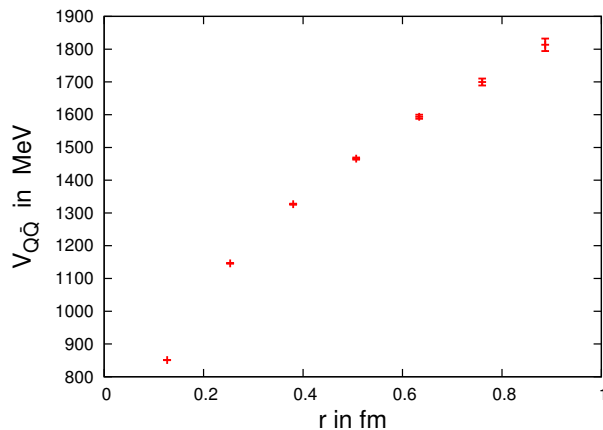


Abbildung 4.7: Quark-Antiquark-Potential $V_{Q\bar{Q}}$ in Abhängigkeit des Abstandes r für die Temperatur $T = 195$ MeV ($\approx 0.65 T_c$).

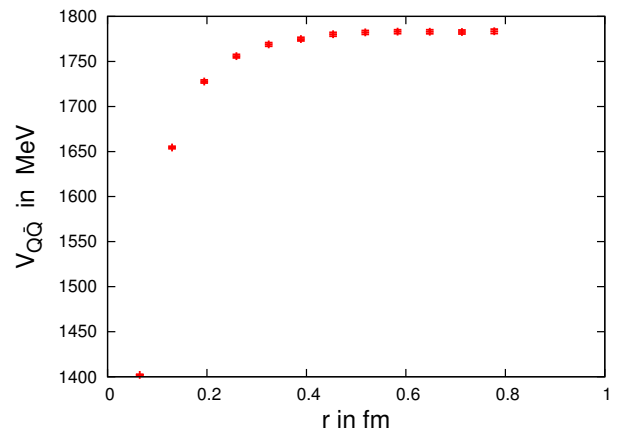


Abbildung 4.8: Quark-Antiquark-Potential $V_{Q\bar{Q}}$ in Abhängigkeit des Abstandes r für die Temperatur $T = 381$ MeV ($\approx 1.27 T_c$).

Es ist noch zu erwähnen, dass bei der Berechnung der Potentiale zusätzlich zur Mittelung über alle Gitterpunkte und alle Eichfeld-Konfigurationen auch noch über die drei Raumrichtungen x , y und z gemittelt wurde.

Mit Abbildung 4.9, Abbildung 4.10, Abbildung 4.11 und Abbildung 4.12 folgen dann die Potentiale $V_{Q\bar{Q}}$ für Temperaturen nahe der bis jetzt festgelegten kritischen Temperatur T_c .

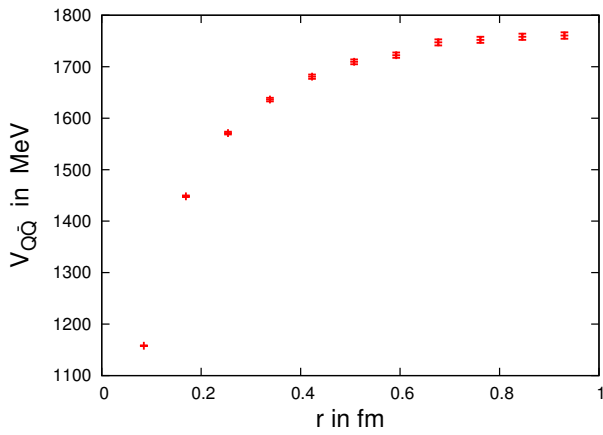


Abbildung 4.9: Quark-Antiquark-Potential $V_{Q\bar{Q}}$ in Abhängigkeit des Abstandes r für $T = 292$ MeV.

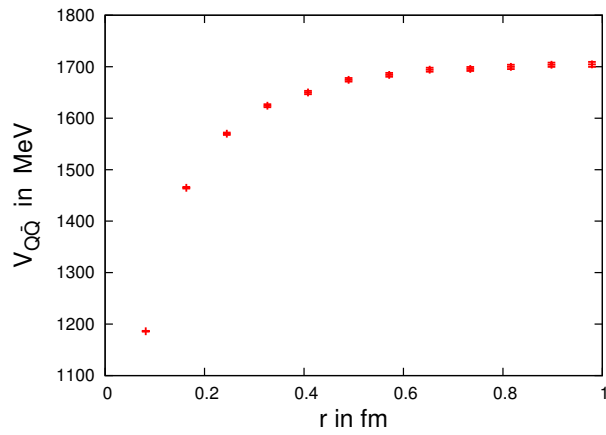


Abbildung 4.10: Quark-Antiquark-Potential $V_{Q\bar{Q}}$ in Abhängigkeit des Abstandes r für $T = 302$ MeV.

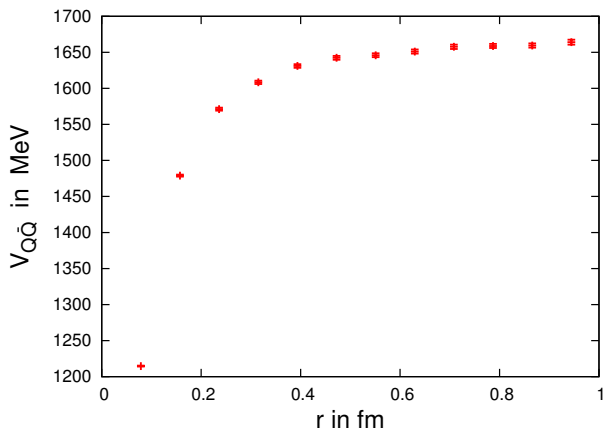


Abbildung 4.11: Quark-Antiquark-Potential $V_{Q\bar{Q}}$ in Abhängigkeit des Abstandes r für $T = 313$ MeV.

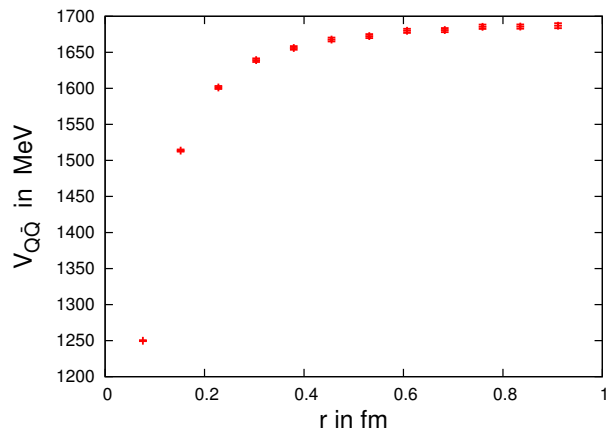


Abbildung 4.12: Quark-Antiquark-Potential $V_{Q\bar{Q}}$ in Abhängigkeit des Abstandes r für $T = 325$ MeV.

4 Ergebnisse und Auswertung

Auch wenn die Fehler recht gering sind, lässt sich nicht genau festlegen, ab welcher Temperatur das Potential $V_{Q\bar{Q}}$ für große Abstände r in ein Plateau übergeht.

Gewisse Tendenzen sind dennoch zu sehen: Für $T = 292$ MeV lässt sich ein lineares Verhalten für größere Abstände erkennen, wohingegen bei einer Temperatur von 325 MeV eher von einem Plateau auszugehen ist.

Bei den Temperaturen 302 MeV und 313 MeV ist es hingegen deutlich schwerer eine Aussage darüber zu machen, ob eine positive Steigung oder eine Steigung von 0 für $r \rightarrow \infty$ zu erwarten ist.

Die Ergebnisse für die Potentiale $V_{Q\bar{Q}}(r)$ bei verschiedenen Temperaturen stimmen also gut mit denen aus Abschnitt 4.1 und Abschnitt 4.2 überein.

4.4 Kraft $F_{Q\bar{Q}}$

Da die Kraft zwischen einem Quark und einem Antiquark durch

$$F_{Q\bar{Q}} = -\nabla V_{Q\bar{Q}} \quad (4.5)$$

bzw. im eindimensionalen Fall durch

$$F_{Q\bar{Q}} = -\frac{\partial}{\partial r} V_{Q\bar{Q}} \quad (4.6)$$

gegeben ist, fällt die oben diskutierte Konstante des Potentials $V_{Q\bar{Q}}$ weg.

$F_{Q\bar{Q}}$ wurde für die hier berechneten Abstände r_i wie folgt berechnet:

$$F_{Q\bar{Q}}(r_i) = -\frac{V_{Q\bar{Q}}(r_{i+1}) - V_{Q\bar{Q}}(r_{i-1})}{|r_{i+1} - r_{i-1}|}, \quad (4.7)$$

mit $|r_{i+1} - r_{i-1}| = 2a$, da die Abstände r_i jeweils Vielfache des Gitterabstandes a sind.

Die Fehler der Kraft $F_{Q\bar{Q}}$ im Abstand r_i wurden aus den Fehlern der Potentiale $V_{Q\bar{Q}}(r_i - 1)$ und $V_{Q\bar{Q}}(r_i + 1)$ gemäß der Fehlerfortpflanzung unabhängiger Zufallsvariablen berechnet.

Da zu erwarten ist, dass $V_{Q\bar{Q}}(r_i - 1)$ und $V_{Q\bar{Q}}(r_i + 1)$ nicht unabhängig voneinander sind (weicht einer der Werte stark nach oben ab, so wird dies mit hoher Wahrscheinlichkeit auch der andere tun), ist dies eine recht konservative Abschätzung des Fehlers.

In Abbildung 4.13 sind zunächst wieder zwei Extremfälle (confinement/deconfinement) dargestellt.

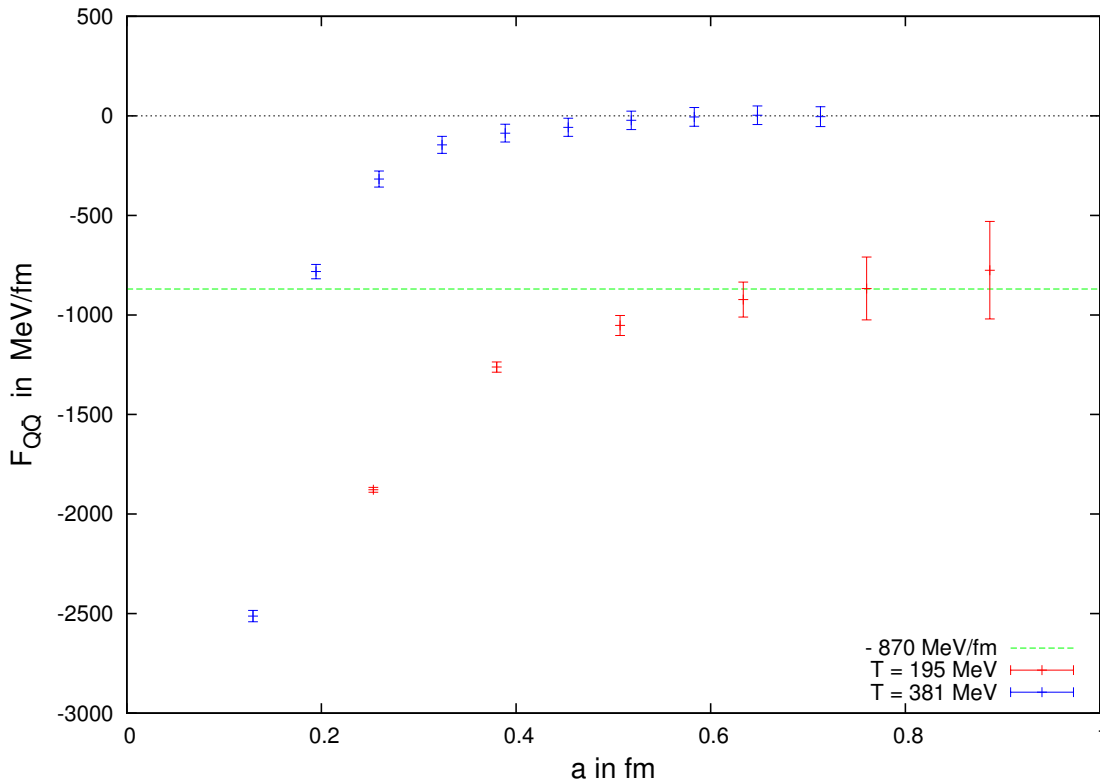


Abbildung 4.13: Die Kraft $F_{Q\bar{Q}}$ zwischen einem Quark und einem Anti-quark in Abhängigkeit des Abstandes r für $T \approx 0.65 T_c$ und $T \approx 1.27 T_c$.

Bei der Temperatur von 381 MeV verschwindet die Kraft $F_{Q\bar{Q}}$ schon nach einer relativ kurzen Distanz, was den Aufenthalt im deconfinement-Bereich verdeutlicht.

Es wurde zum Vergleich die String-Spannung σ (Näheres dazu in Abschnitt 4.5) bei $T = 0$ von $870 \frac{\text{MeV}}{\text{fm}}$ aus [5] hinzugefügt. Die Kraft $F_{Q\bar{Q}}$ scheint sich diesem Wert bei der niedrigen Temperatur von 195 MeV anzunähern.

Ein Übergang in ein Plateau etwas oberhalb der $870 \frac{\text{MeV}}{\text{fm}}$ ist hier zu erwarten, da das Potential $V_{Q\bar{Q}}$ für große Abstände, wie in Abschnitt 4.3 besprochen, eine lineare Gestalt annimmt und die Steigung, also demnach der Wert der Kraft $F_{Q\bar{Q}}$, zu niedriger Temperatur hin größer wird (vgl. Abschnitt 4.5).

4 Ergebnisse und Auswertung

Abbildung 4.14 zeigt die Kraft $F_{Q\bar{Q}}$ für Temperaturen Nahe T_c . Aufgrund der hohen Fehler ist hier jedoch keine genaue Festlegung der kritischen Temperatur möglich.

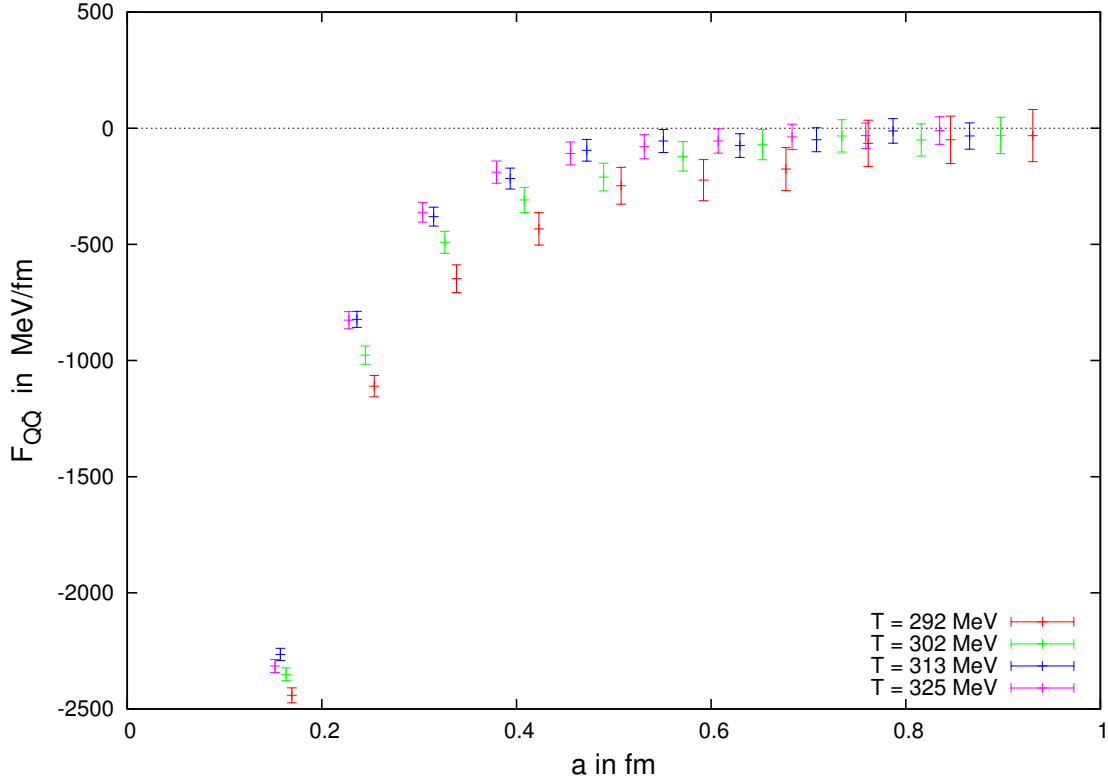


Abbildung 4.14: Die Kraft $F_{Q\bar{Q}}$ zwischen einem Quark und einem Anti-quark in Abhängigkeit des Abstandes r für Temperaturen nahe T_c .

4.5 String-Spannung σ

Die String-Spannung σ ist eine weitere Größe, die sich aus dem Potential $V_{Q\bar{Q}}$ ableiten lässt. Sie entspricht der Steigung des Potentials für $r \rightarrow \infty$ und gibt somit den Wert des Plateaus, dem sich die Kraft für große Abstände r nähert, an.

Um eine angemessene Skala angeben zu können, wurde zunächst das Potential für $T = 0$ berechnet. Dazu wurden sogenannte *Wilson-Loops* W verwendet. Diese haben folgende Gestalt:

$$W(\rho, \tau) = U(\vec{r}_1, t; \vec{r}_2, t) U(\vec{r}_1, t; \vec{r}_2, 0) U(\vec{r}_2, 0; \vec{r}_1, 0) U(\vec{r}_1, 0; \vec{r}_1, t) . \quad (4.8)$$

ρ und τ geben hierbei die Größe der Ausdehnung des Wilson-Loops W in die jeweilige räumliche bzw. zeitliche Richtung an und $U(\vec{r}_i, t_i; \vec{r}_j, t_j)$ die Linkvariablen zwischen den Raumzeitpunkten (\vec{r}_i, t_i) und (\vec{r}_j, t_j) .

Der Wilson-Loop W entspricht somit einer geschlossenen Schleife mit Anteilen in zeitlicher sowie räumlicher Richtung.

Das Potential $V_{Q\bar{Q},T=0}$ berechnet sich schließlich durch (Details in [1]):

$$V_{Q\bar{Q},T=0}(\rho) = \frac{1}{a} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\langle W(\rho, \tau) \rangle}{\langle W(\rho, \tau + 1) \rangle} . \quad (4.9)$$

Wie bei den Potentialen endlicher Temperatur, sollten hier ebenfalls Werte bis zum Abstand 1 fm erzeugt werden. Um dies zu gewährleisten und gleichzeitig die selbe räumliche Gitterausdehnung von 24 zu verwenden, wurde ein β -Wert von 2.40, was einem Gitterabstand von 0.1267 fm entspricht, gewählt. Zusätzlich ist zu beachten, dass durch die Periodizität des Gitters die Größe der Wilson-Loops in räumlicher Richtung nur bis maximal $\frac{N_s}{2}$ gehen darf. Für mehr Sicherheit, wurden nur $\frac{N_s}{3} = 8$ Werte verwendet. Dadurch beträgt der maximale Abstand 1.0136 fm.

Um statistische Fehler gering zu halten und vor allem eine niedrige Temperatur zu erzielen, wurde das Potential $V_{Q\bar{Q},T=0}$ auf einem 48×24^3 - Gitter, also einer 6-fach höheren zeitliche Ausdehnung als bei den Potentialen endlicher Temperatur, berechnet.

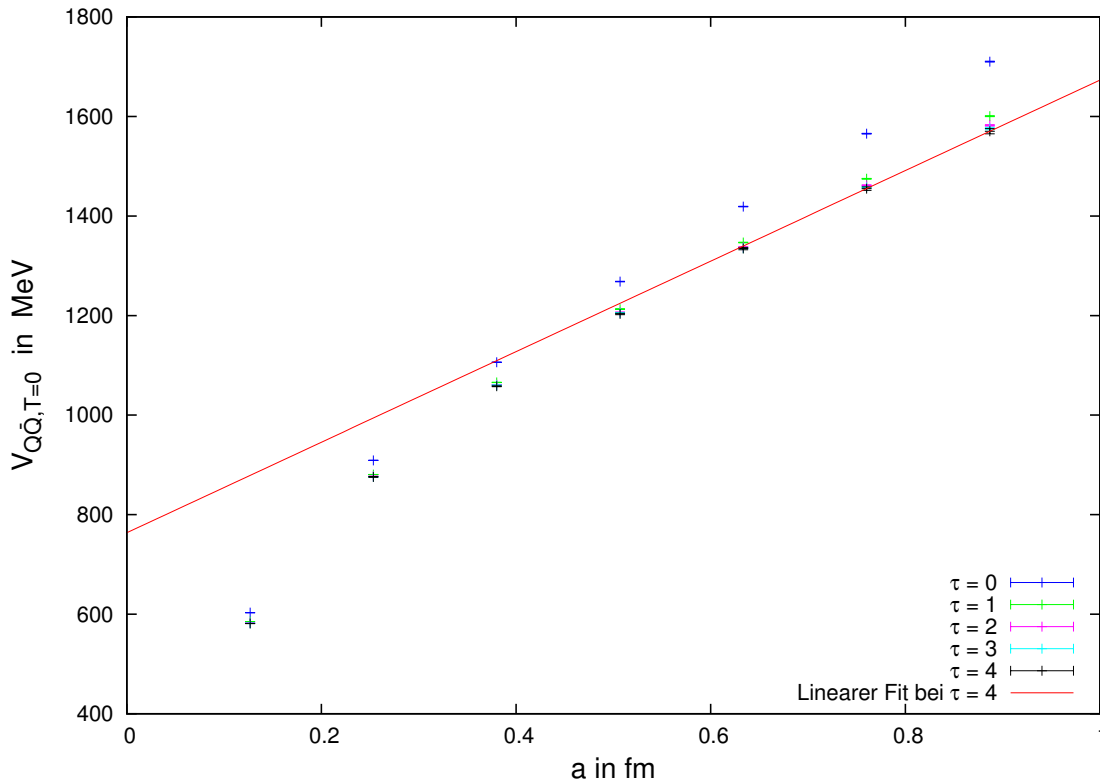


Abbildung 4.15: Das Quark-Antiquark-Potential für $T = 0$ für verschiedene zeitliche Gitterausdehnungen τ in Abhängigkeit des Abstandes r .

4 Ergebnisse und Auswertung

In Abbildung 4.15 ist das Potential $V_{Q\bar{Q},T=0}$ gegen den Abstand r für verschiedene zeitliche Ausdehnungen τ der Wilson-Loops W aufgetragen. Je größer τ wird, desto mehr sinkt die Kurve ab. Eine Konvergenz lässt sich jedoch deutlich erkennen, weshalb höhere Ausdehnungen, welche auch mit höheren Berechnungsdauern einhergehen, nicht bestimmt wurden.

Die Werte zwischen 0.6 und 1 fm wurden einem linearen Fit unterzogen, um die die Steigung bei großen Abständen¹, welche der String-Spannung bei $T = 0$ entspricht, zu bestimmen.

Die daraus berechnete Steigung $\sigma(T=0)$ hat den Wert² $909 \frac{\text{MeV}}{\text{fm}}$, der um weniger als 5% über dem zu erwartenden, da für alle Umrechnungen verwendeten Wert von $870 \frac{\text{MeV}}{\text{fm}}$ aus [5] liegt. Für höhere Ausdehnungen τ würde sich die Funktion etwas mehr absenken und somit $870 \frac{\text{MeV}}{\text{fm}}$ noch näher kommen bzw. für $\tau \rightarrow \infty$ im Idealfall gegen diesen Wert konvergieren.

Der Wert aus [5] von $870 \frac{\text{MeV}}{\text{fm}}$ liegt dennoch innerhalb des Fehlerbereichs des hier berechneten Wertes von $909 \frac{\text{MeV}}{\text{fm}}$, was in Abbildung 4.16 zu sehen ist.

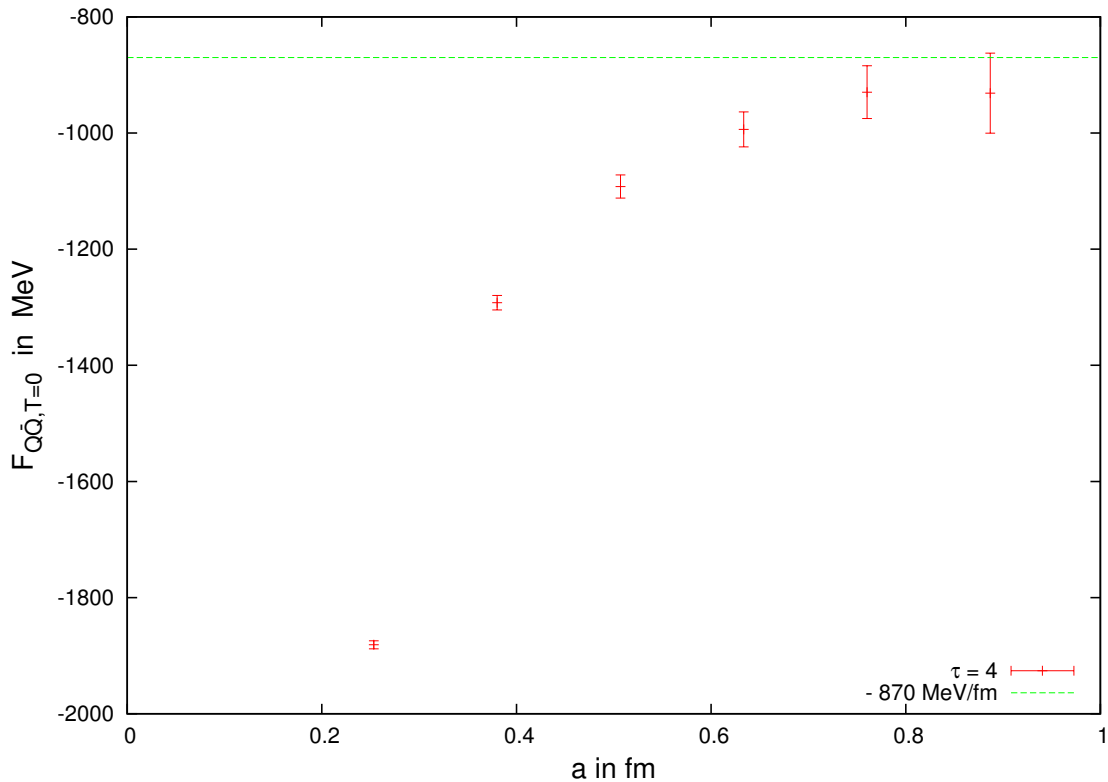


Abbildung 4.16: Die Kraft $F_{Q\bar{Q}}$ in Abhängigkeit des Abstandes r im Vergleich zur String-Spannung aus [5] jeweils für $T = 0$.

¹ Da eigentlich die Steigung für $r \rightarrow \infty$ gesucht ist, stellt dies ein gute und vor allem hier mögliche Näherung dar.

² In Gittereinheiten: $\sigma a^2(0) \approx 4.61$ (in [5]: ≈ 4.41)

Damit lässt sich nun die String-Spannung σ in Abhängigkeit der Temperatur T relativ zur String-Spannung σ bei $T = 0$ angeben. Dieses Verhältnis $\frac{\sigma(T)}{\sigma(0)}$ ist in Abbildung 4.17 dargestellt.

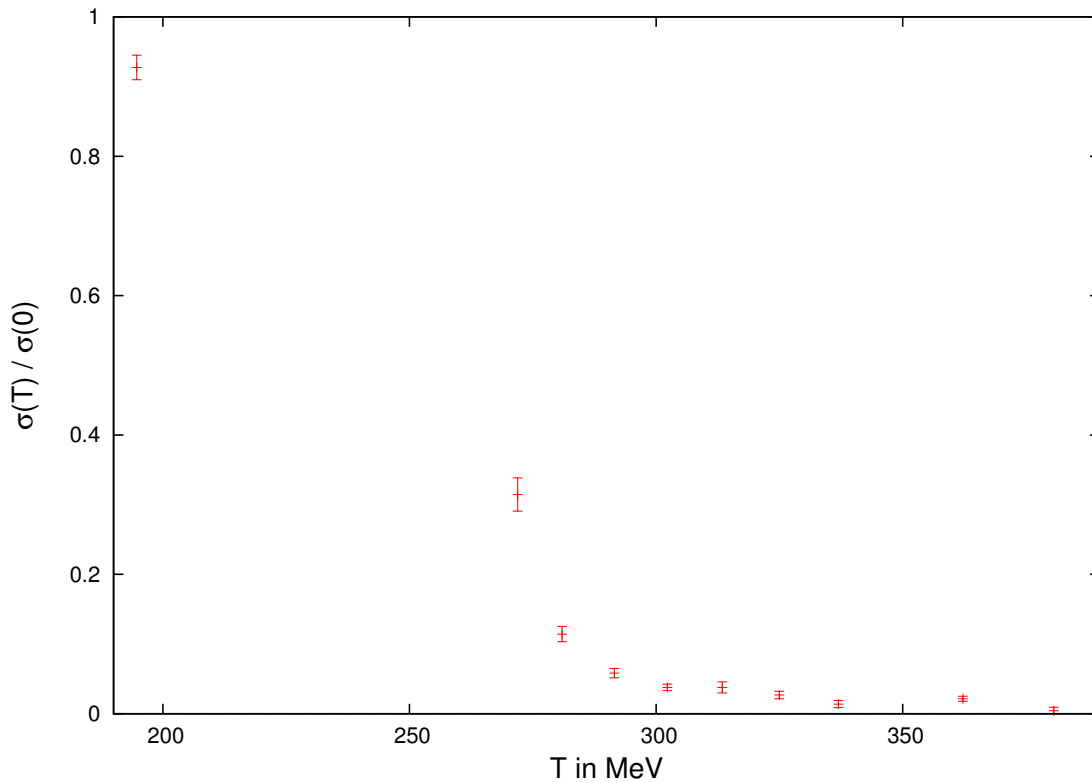


Abbildung 4.17: Die String-Spannung σ in Abhängigkeit der Temperatur T relativ zur String-Spannung σ bei $T = 0$.

Der erwartete Kurvenverlauf ist deutlich zu erkennen, auch wenn $\frac{\sigma(T)}{\sigma(0)}$ nie den Wert 0 annimmt. Der Grund dafür ist die Tatsache, dass die Steigung jeweils im Bereich zwischen 0.6 und 1 fm berechnet wurde und nicht für $r \rightarrow \infty$, wie es eigentlich der Fall sein sollte.

In jedem Fall ist Abbildung 4.17 auch wieder konsistent mit dem bisherigen Ergebnis, T_c zwischen 280 und 320 MeV anzusiedeln.

5 Zusammenfassung und Diskussion

Durch die vorher aufgeführten Berechnungen lässt sich die kritische Temperatur T_c auf den Bereich zwischen 280 und 320 MeV einschränken. Dazu tragen die Ergebnisse der Betrachtung des *Polyakov-Loops* L , der *Suszeptibilität* χ , des *Quark-Antiquark-Potentials* $V_{Q\bar{Q}}$, der *Kraft zwischen einem Quark und einem Antiquark* $F_{Q\bar{Q}}$ und schließlich der *String-Spannung* σ bei.

Der in [4] angegebene Wert für die kritische Temperatur T_c beträgt $0.69\sqrt{\sigma}$, was bei einer Umrechnung mit der hier verwendeten String-Spannung σ bei $T = 0$ aus [5] von 4.41 bzw. $870 \frac{\text{MeV}}{\text{fm}}$ einer Temperatur von etwa 286 MeV entspricht. Dieser Wert ist also mit dem hier bestimmten Intervall vereinbar.

Möchte man das Ziel dieser Arbeit weiterverfolgen und die kritische Temperatur T_c genauer lokalisieren, müsste man deutlich mehr Eichfeld-Konfigurationen berechnen, wodurch sich insbesondere das Verhalten des Polyakov-Loops L nahe des Phasenübergangs aufgrund der langen Korrelationslängen besser bestimmen ließe. Dies ist jedoch zwangsläufig mit einem höheren Rechenaufwand bzw. längeren Berechnungsdauern verbunden.

Eine weitere Möglichkeit wäre das sogenannte *HYP-Smearing*, bei dem die Selbstenergie der Observablen reduziert und somit auch der relative Fehler verringert wird. Dies geschieht durch „verschmieren“ der Links in zeitlicher Richtung.

Da der Polyakov-Loop und somit auch die restlichen daraus resultierenden Größen nur von den erwähnten zeitlichen Links abhängen, ist diese Methode besonders erfolgversprechend.

Literaturverzeichnis

- [1] H. J. Rothe: *LATTICE GAUGE THEORIES - An Introduction*, World Scientific (2005)
- [2] M. Creutz: *Monte Carlo study of quantized SU(2) gauge theory*, Physical Review, Volume 21, Number 8 (1980)
- [3] L. D. McLerran & B. Svetitsky: *Quark liberation at high temperature: A Monte Carlo study of SU(2) gauge theory*, Physical Review D, Volume 24, Number 2 (1981)
- [4] S. Digal, S. Fortunato & P. Petreczky: *Heavy Quark Free Energies and Screening in SU(2) Gauge Theory*, Physical Review D 68 (2003)
- [5] K. Amemiya & H. Suganuma: *Off-diagonal Gluon Mass Generation and Infrared Abelian Dominance in the Maximally Abelian Gauge in Lattice QCD*, Physical Review D 60 (1999)
- [6] C. Gattringer & C. B. Lang: *Quantum Chromodynamics on the Lattice*, Springer-Verlag (2010)
- [7] G. Kersting & A. Wakolbinger: *Elementare Stochastik*, Springer-Verlag (2010)
- [8] N. Metropolis et al.: *Equation of State Calculations by Fast Computing Machines*, The Journal Of Chemical Physics, Volume 21, Number 6 (1953)
- [9] I. Montvay & G. Münster: *Quantum Fields on a Lattice*, Cambridge University Press (1994)
- [10] D. H. Rischke: *Theoretische Physik IV: Quantenmechanik I*, Vorlesungsskript, http://th.physik.uni-frankfurt.de/~drischke/Skript_QM_I.pdf (2011)
- [11] D. H. Rischke: *Theoretische Physik V: Statistische Mechanik*, Vorlesungsskript, http://th.physik.uni-frankfurt.de/~drischke/Skript_SM.pdf (2012)
- [12] A. Uenver-Thiele: *Numerische Bestimmung von Glueball-Massen mit SU(2) Gittereichtheorie*, <http://th.physik.uni-frankfurt.de/~mwagner/theses.html> (2012)
- [13] P. Wolf: *Gluelump Massenberechnung in der SU(2) Yang-Mills Gittereichtheorie*, <http://th.physik.uni-frankfurt.de/~mwagner/theses.html> (2012)

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe, dass alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus anderen Quellen übernommen wurden, als solche kenntlich gemacht und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegt wurde.

Frankfurt am Main, 28.09.2012

Björn Fröhlich Wagenbach