1.2

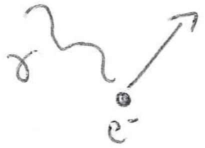
a) Die Energie, die auf die Metallplatte pro Sekunde trifft, lautet:

$$= I \cdot A$$

Die Anzahl der Photonen, die pro Sekunde die Platte erreichen, ist

$$N_\gamma = \frac{I A}{\hbar \omega}$$

b)



$$\hbar\omega = \underbrace{T_e}_{\text{kinetische Energie des Elektrons}} + W_A$$

Ergo, die minimale Kreisfrequenz lautet

$$\hbar\omega_g = W_A \quad , \quad \boxed{\omega_g = \frac{W_A}{\hbar}}$$

(In diesem Fall ist $T_e = 0$; das Elektron wird mit Geschwindigkeit $v = 0$ freigesetzt.)

c) Ganz einfach:

$$N_{e^-} = N_\gamma . \quad (*)$$

Die kinetische Energie eines Elektrons lautet $T_e = \hbar\omega - W_A$.

(*) Jedes Photon "befreit" ein Elektron.

d) $\omega = 2\omega_g$

$$2\hbar\omega_g = T_e + W_A$$

$$\Downarrow$$

$$\hbar\omega_g = T_e = \sqrt{p^2c^2 + m_e^2c^4} - m_e c^2$$

Ergo:

$$\hbar\omega_g + m_e c^2 = \sqrt{p^2c^2 + m_e^2 c^4}$$

$$\hbar^2\omega_g^2 + \cancel{m_e^2 c^4} + 2(\hbar\omega_g)(m_e c^2) = p^2c^2 + \cancel{m_e^2 c^4}$$

$$\boxed{p^2 = \frac{\hbar^2\omega_g^2}{c^2} + 2\hbar\omega_g m_e}$$

2.2

$$\psi(0,x) = A\,\varphi_0(x) + B\,\varphi_1(x)$$

a) (i) bedeutet: $|A|^2 = |B|^2$.

Da $|A|^2 + |B|^2 = 1 \implies |A| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad |B| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(ii) impliziert: $\boxed{A = \frac{1}{\sqrt{2}}}$

B lautet: $\boxed{B = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi}}$ → unbestimmbare Phase

b) $$\boxed{\psi(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{E_0}{\hbar}t}\,\varphi_0(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}\,\varphi_1(x)}$$

c) $$\langle E\rangle = |A|^2 E_0 + |B|^2 E_1 = \frac{E_0 + E_1}{2}$$

$\langle E\rangle$ ist zeitunabhängig.

Check:

$$\langle E\rangle = \langle\psi|H|\psi\rangle = |A|^2\langle\varphi_0|H|\varphi_0\rangle + |B|^2\langle\varphi_1|H|\varphi_1\rangle = \frac{E_0+E_1}{2}$$

ok

d)

$$\langle X \rangle = \langle \psi | x | \psi \rangle$$

$$|\psi\rangle = A e^{-i\frac{E_0}{\hbar}t} |\psi_0\rangle + B e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} |\psi_1\rangle$$

$$\langle \psi | = \langle \psi_0 | A^* e^{i\frac{E_0}{\hbar}t} + \langle \psi_1 | B^* e^{i\frac{E_1}{\hbar}t}.$$

$$\langle \psi | x | \psi \rangle = |A|^2 \langle \psi_0 | x | \psi_0 \rangle + A B^* e^{\frac{i}{\hbar}(E_1 - E_0)t} \langle \psi_1 | x | \psi_0 \rangle$$
$$+ A^* B e^{-\frac{i}{\hbar}(E_1 - E_0)t} \langle \psi_0 | x | \psi_1 \rangle + |B|^2 \langle \psi_1 | x | \psi_1 \rangle.$$

$$\langle \psi_0 | x | \psi_0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\psi_0|^2 x = 0$$

$$\langle \psi_1 | x | \psi_1 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\psi_1|^2 dx = 0$$

$$\langle \psi_1 | x | \psi_0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi_1^* \psi_0 x = c$$ is not necessarily zero.

Ergo:

$$\langle \psi | x | \psi \rangle = \frac{1}{2} e^{-i\phi} e^{\frac{i}{\hbar}\Delta E t} c + \frac{1}{2} e^{i\phi} e^{-\frac{i}{\hbar}\Delta E t} c$$

$$\boxed{\langle \psi | x | \psi \rangle = \frac{c}{2} \cdot \cos\left(\frac{\Delta E t}{\hbar} - \phi\right)}$$

e) $\rho(t,x) = |\psi|^2 = \langle\psi|\psi\rangle = |A|^2 \psi_0^2(x) + |B|^2 \psi_1^2(x) +$

$+ AB^* e^{\frac{i}{\hbar}\Delta E t} \psi_1^*(x)\psi_0(x) + A^* B e^{-\frac{i}{\hbar}\Delta E t} \psi_1 \psi_0^*$

Für $x=0$ ist $\psi_1(0) = 0$ (ψ_1 ist ungerade).

Ergo:

$\rho(t, x=0) = \rho(t) = \frac{1}{2}\psi_0^2(0) = \text{const} \ \forall t$!

($\psi_0(0) \neq 0$, da $\psi_0(x)$ gerade ist und $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^2(x)dx$ =

a) $|S\rangle = a^\dagger|0\rangle$

$\langle S| = \langle 0|a$

$\langle S|S\rangle = \langle 0|aa^\dagger|0\rangle = \langle 0|\underbrace{[a,a^\dagger]} + a^\dagger a|0\rangle$

$= \langle 0|1|0\rangle + \langle 0|a^\dagger a|0\rangle =$

$= 1 + 0$

(da $a|0\rangle = 0$, $\langle 0|a^\dagger = 0$).

$\langle S|S\rangle = 1$!

b) $|S\rangle = c(a^\dagger)^2|0\rangle$

$\langle S| = \langle 0|a \cdot a\, c^*$.

$\langle S|S\rangle = \langle 0||c|^2(aa\,a^\dagger a^\dagger)|0\rangle =$

$= |c|^2\langle 0|a\underbrace{aa^\dagger}a^\dagger|0\rangle = |c|^2\langle 0|a(\underbrace{[a,a^\dagger]}_{1} + a^\dagger a)a^\dagger|0\rangle$

$= |c|^2\underbrace{\langle 0|aa^\dagger|0\rangle}_{1} + |c|^2\langle 0|aa^\dagger\underbrace{aa^\dagger}|0\rangle$

$= |c|^2 + |c|^2\langle 0|aa^\dagger(\underbrace{[a,a^\dagger]}_{1} + a^\dagger a)|0\rangle$

$= 2|c|^2 = 1$

Ergo:

$2|c|^2 = 1 \rightarrow \boxed{c = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi}}$

7

c)

$$|S\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle + \alpha a^{+}|0\rangle$$

$$\langle S|S\rangle = \frac{1}{4} + |\alpha|^{2} = 1 \quad \rightarrow \quad \boxed{\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

d)

$$\langle S|H|S\rangle = \left(\langle 0|\frac{1}{2} + \langle 0|a\,\alpha\right) H \left(\frac{1}{2}|0\rangle + \alpha a^{+}|0\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{\hbar\omega}{2}+1\right)$$

$$= \hbar\omega\left(\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{4}\right) = \hbar\omega\,\frac{1+3+6}{8}$$

$$= \frac{7}{8}\hbar\omega .$$

e)

$$i\hbar\frac{da}{dt} = [H,a],$$

$$[H,a] = \hbar\omega\left[\frac{1}{2} + a^{+}a, a\right] = \hbar\omega\,[a^{+}a, a] =$$

$$= \hbar\omega\Big(a^{+}\underbrace{[a,a]}_{=0} + \underbrace{[a^{+},a]}_{1}a\Big) = \hbar\omega a$$

Wir haben dann:

$$\boxed{i\hbar \frac{da}{dt} = \hbar\omega a} \longrightarrow \boxed{a(t) = a \cdot e^{-i\omega t}}$$

Gleichung $\longrightarrow$ Lösung

Genau so:

$$\boxed{i\hbar \frac{da^\dagger}{dt} = -\hbar\omega a^\dagger} \longrightarrow a^\dagger(t) = a^\dagger e^{+i\omega t}$$

f)

$$q(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a(t) + a^\dagger(t)\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a e^{-i\omega t} + a^\dagger e^{i\omega t}\right)$$

$$p(t) = -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(a e^{-i\omega t} - a^\dagger e^{i\omega t}\right)$$

Durch

$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$ und $e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i\sin(\omega t)$

bekommt man:

$$\begin{cases} q(t) = q\cos(\omega t) + \frac{p}{m\omega}\sin(\omega t) \\ p(t) = -m\omega q\sin(\omega t) + p\cos(\omega t) \end{cases}$$

$q(0) = q$, $p(0) = p$.