Rechenaufgabe 1.2

a) Die Frequenz ν des Photons ist durch die Gl.

$$\underbrace{h\nu}_{\text{Energie des Photons}} = E_2 - E_1 = -\frac{E_R}{4} + E_R = E_R\left(-\frac{1}{4}+1\right)$$

$$= \frac{3}{4}E_R$$

gegeben.

Dann:

$$\boxed{\nu = \frac{3E_R}{4h}}$$

b) Die minimale Frequenz ν_{min} lautet:

$$h\nu_{min} = |E_1| = E_R$$

$$\boxed{\nu_{min} = \frac{E_R}{h}}$$

c) $\nu > \nu_{min}$

Die Energie des Photons ist $h\nu$; die Energiebilanz lautet

$$h\nu = E_B + \underbrace{T_e}_{\text{Kinetische Energie}}$$

Also:

$T_e = h\nu - E_B$ (> 0, da $\nu > \nu_{min}$

$$T_e = h(\nu - \nu_{min}) = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2$$

D.h.

$$\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} = h(\nu - \nu_{min}) + mc^2$$

$$p^2c^2 = \left[h(\nu - \nu_{min}) + mc^2\right]^2 - m^2c^4$$

$$\boxed{p = \sqrt{\frac{\left[h(\nu - \nu_{min}) + mc^2\right]^2 - m^2c^4}{c^2}}}$$

a) $E_0 = 0$ ist nicht möglich.

Reductio ad Absurdum: sei $E_0 = 0$. Denn:

$$H\phi_0 = \left(\frac{p^2}{2m} + V(x)\right)\phi_0 = 0$$

$$E_0 = 0 = (\phi_0, H\phi_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \phi_0^* \left(\frac{p^2}{2m}\phi_0\right) + \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \phi_0^* V(x)\, \phi_0$$

$$= \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle + \langle V(x) \rangle .$$

Both averages are positive definite, which means

$$\left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = \langle V(x) \rangle = 0$$

$$\langle V(x) \rangle = 0 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\phi_0|^2 V(x) > 0 \quad \text{weil } V(x) \geq 0.$$

Es ist also unmöglich, dass $E_0 = 0$. Es muss $E_0 > 0$ sein.

b) Normierung:

$$|c_0|^2 + |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$$

$|c_0|^2 = 9$ bedeutet: $|c_1|^2 + |c_2|^2 = -8$. Unmöglich!

c) $c_0 = 1 \rightarrow c_1 = c_2 = 0$ weg. Normierung.

d) $c_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad |c_0|^2 = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1 & \text{Normierung} \\ |c_1|^2 = 2|c_2|^2 & \rightarrow \text{Wahrscheinlichkeit-Bedingung} \end{cases}$$

$$\begin{cases} |c_1|^2 + |c_2|^2 = \frac{1}{2} \\ |c_1|^2 = 2|c_2|^2 \end{cases}$$

$$2|c_2|^2 + |c_2|^2 = 3|c_2|^2 = \frac{1}{2}$$

$$\downarrow$$

$$|c_2|^2 = \frac{1}{6} \rightarrow c_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} e^{i\varphi_2}$$

$$\Downarrow$$

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i\varphi_1}$$

$$\boxed{\begin{cases} c_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i\varphi_1} \\ c_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} e^{i\varphi_2} \end{cases}}$$

e) c_1, c_2 reell bedeutet: $\varphi_1 = 0, \pi$ und $\varphi_2 = 0, \pi$.

D.h.

$c_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad c_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$

Die Lösungen (4 Möglichkeiten) lauten

$$\Psi(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_0(x)e^{-iE_0t/\hbar} \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\phi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar}$$

$$\pm \frac{1}{\sqrt{6}}\phi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar}$$

f) $\langle E\rangle$ ist t-unabhängig, da H erhalten ist.

D.h.

$\langle E\rangle(t) = \langle E\rangle(t=0) =$

$$\boxed{\langle E\rangle = \frac{E_0}{2} + \frac{E_1}{3} + \frac{E_2}{6}}$$

(Eine explizite Rechnung zu jeder Zeit t führt zum demselben Resultat!)

g) JA! V(x) erfüllt die Eigenschaften, weil

$\lim_{x\mapsto\pm\infty} V(x) = +\infty$, $V(0) = 0$ und $x=0$ ist das einzige Minimum!

Rechenaufgabe 3.2

a) $H|0\rangle = \left(\frac{\hbar\omega_1}{2} + \frac{\hbar\omega_2}{2}\right)|0\rangle$ (da $a|0\rangle = b|0\rangle = 0$)

$$\boxed{E_0 = \frac{\hbar\omega_1 + \hbar\omega_2}{2}}$$

b) $|s\rangle = a^\dagger b^\dagger |0\rangle$ ist normiert.

Nämlich:

$\langle s| = \langle 0| b a$

$\langle s|s\rangle = \langle 0| b a a^\dagger b^\dagger |0\rangle =$ wg. $[a, a^\dagger] = 1$.

$= \langle 0| b (a^\dagger a + 1) b^\dagger |0\rangle =$

$= \langle 0| b a^\dagger a b^\dagger |0\rangle + \langle 0| b b^\dagger |0\rangle$

$= 0$, da $a|0\rangle = 0$

$= \langle 0| b b^\dagger |0\rangle \overset{[b, b^\dagger] = 1}{=} \langle 0| b^\dagger b + 1 |0\rangle = 1$

(da $b|0\rangle = 0$).

e)

$$H a^+ b^+ |0\rangle = \hbar\omega_1 \left(\frac{1}{2} + a^+ a\right) a^+ b^+ |0\rangle$$

$$+ \hbar\omega_2 \left(\frac{1}{2} + b^+ b\right) a^+ b^+ |0\rangle =$$

$$= \frac{\hbar\omega_1}{2} a^+ b^+ |0\rangle + \hbar\omega_1 a^+ (a^+ a + 1) b^+ |0\rangle$$

$$+ \frac{\hbar\omega_2}{2} a^+ b^+ |0\rangle + \hbar\omega_2 b^+ a^+ (b^+ b + 1)$$

$a|0\rangle = b|0\rangle = 0$.

Es bleibt:

$$\left(\frac{\hbar\omega_1}{2} + \hbar\omega_1 + \frac{\hbar\omega_2}{2} + \hbar\omega_2\right)|0\rangle.$$

Die Energie lautet

$$\boxed{E = \frac{3}{2}\hbar\omega_1 + \frac{3}{2}\hbar\omega_2}$$

d) Das eindimensionale Potential lautet

$$\boxed{V(x,y) = \frac{1}{2} m \omega_1^2 x^2 + \frac{1}{2} m \omega_2^2 y^2}$$

Es ist ein 2-dim harm. Oszillator.

In einer Richtung gibt es die Frequenz ω_1 ($\mapsto \hbar\omega_1(a^\dagger a + \frac{1}{2})$),

in der anderen Richtung die Frequenz ω_2 ($\longmapsto \hbar\omega_2(b^\dagger b + \frac{1}{2})$)

$a^\dagger|0\rangle$ ist eine Vibration in der x-Richtung

$b^\dagger|0\rangle$ " " " " " y- "