THEORETIKUM ZUR QUANTENMECHANIK SS 2011

Aufgabenblatt 1 **20.04.2011**

Aufgabe 1: Natürliche Einheiten (7 Punkte = 2 + 3 + 2)

Die Naturkonstanten c, $\hbar = h/2\pi$ ($h:$ Plancksches Wirkunsquantum) und k_B (Boltzmann-Konstante) liefern drei Relationen zwischen den Maßeinheiten der vier physikalischen Größen Energie, Länge, Zeit und Temperatur, so dass nur eine von diesen unabhängig skalierbar ist. So legt man z.B. über c mit einer Zeitskala auch immer eine charakteristische Längenskala fest. In SI-Einheiten lauten diese Relationen $c = 2.998 \cdot 10^8$ m/s, $\hbar = 1.055 \cdot 10^{-34}$ J s und $k_B = 1.381 \cdot 10^{-23}$ J/K.
In den sogenannten *natürlichen Einheiten* gibt man Längen, Zeiten und Temperaturen in Energieeinheiten bzw. in inversen Energieeinheiten an. Man tut dies gerade so, dass c, $\hbar$ und k_B dimensionslos werden und den Wert 1 annehmen, $c = \hbar = k_B = 1$.

1. Geben Sie die natürlichen Einheiten für Länge, Zeit und Temperatur in eV an.
2. Man kann zeigen, dass die spektrale Energiedichte ρ eines schwarzen Körpers nur eine Funktion der Frequenz ω und der Temperatur T ist, $\rho = \rho(\omega, T)$. Begründen Sie mit Hilfe einer Dimensionsanalyse, dass das Wiensche Strahlungsgesetz die Form
$$\rho(\omega, T) = \omega^3 \; g\left(\frac{\omega}{T}\right)$$
haben muss, wobei die Funktion $g\left(\frac{\omega}{T}\right)$ dimensionslos ist.
3. Argumentieren Sie mit Hilfe der vorigen Teilaufgabe, weshalb die Konstante σ im Stefan-Boltzmann-Gesetz, $w(T) = \sigma T^4$, in natürlichen Einheiten dimensionslos sein muss.

Aufgabe 2: Planck-Spektrum (12 Punkte = 1 + 1 + 3 + 3 + 4)

Gegeben sei ein Photonengas mit Temperatur T in einem Kasten mit Volumen V. Die spektrale Energiedichte $\rho(\omega, T)$ lautet
$$\rho(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/(k_B T)} - 1}. \tag{1}$$

Berechnen Sie:

1. die Energiedichte $w(T) = \int_0^\infty \rho(\omega, T) d\omega$. (Hinweis: $\int_0^\infty x^3 (e^x - 1)^{-1} = \frac{\pi^4}{15}$.)
2. die angenäherte Form von $\rho(\omega, T)$ (inkl. Ordnung ω^3) für $\omega \simeq 0$;
3. die gesamte Energie, die von Photonen mit Frequenz $\omega \geq \omega_1$ getragen wird, wobei $\hbar\omega_1 \gg k_B T$.
4. die Frequenz $\omega_{\max}$, die dem Maximum der Planck-Verteilung entspricht. (Hinweis: eine graphische Lösungsmethode ist notwendig.)
5. Sei p der Druck des Photonengases. Berechne p unter der Betrachtung der Fundamentalrelation der Thermodynamik,
$$w = T\frac{dp}{dT} - p \; , \tag{2}$$
wobei w aus Aufgabenteil 1. bekannt ist. Welche physikalische Bedingung muss für den Druck gefordert werden, um die Differentialgleichung zu lösen? Berechnen Sie auch das Verhältnis p/w.

Aufgabe 3: Photoelektrischer Effekt (5 Punkte = 1 + 2 + 2)

Es werden Photonen verschiedener Energien auf Aluminium gestrahlt. Die zurückgestreuten Photonen und emittierten Elektronen werden detektiert, welches eine Austrittsarbeit von $W_A = 4.28$ eV besitzt.

1. Wie groß ist die Grenzwellenlänge der Photonen, die gerade noch zur Elektronenemission führt?
2. Wie groß muß man die Wellenlänge der Photonen wählen, damit die emittierten Elektronen die Geschwindigkeit $v = 0.1\ c$ besitzen?
3. Wie groß muß man die Wellenlänge der Photonen wählen, damit die emittierten Elektronen die Geschwindigkeit $v = 0.866$ c besitzen? Wie groß ist die Energie der Photonen in diesem Fall?

Aufgabe 4: Instabilität des Rutherford'schen Atommodells (6 Punkte)

Nehmen Sie an, dass Elektronen sich auf klassischen Kreisbahnen um den positiv geladenen Kern bewegen. Berechnen Sie die Lebensdauer τ des Wasserstoffatoms.

Anmerkung: Aus der Elektrodynamik weiß man, dass eine beschleunigte Ladung elektromagnetische Strahlung emittiert und damit Energie abstrahlt. So kann man für ein Elektron auf einer Kreisbahn mit Radius R und Kreisfrequenz ω den zeitlichen Energieverlust berechnen und erhält dabei (nicht-relativistisch)

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\frac{2}{3}\frac{e^2 R^2 \omega^4}{4\pi\epsilon_0 c^3} \ .$$

Anleitung: Das Elektron befinde sich nun zunächst auf einer Kreisbahn mit Radius $R_1 = 0.5 \cdot 10^{-10}$ m. Geben Sie die Energie des Elektrons als Funktion des Radius $R(t)$ aus der Bedingung an, dass sich die Zentrifugalkraft mit der Coulombkraft die Waage halten muss, bilden Sie dann dE/dt und integrieren Sie bis τ. Die Elektronenmasse beträgt $m_e = 9.109 \cdot 10^{-31}$ kg und seine Ladung $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ C.