THEORETIKUM ZUR QUANTENMECHANIK SS 2011

Aufgabenblatt 10 **21.06.2011**

Aufgabe 1: Loch (12 Punkte = 3 + 2 + 5 + 2)

Gegeben sei das eindimensionale Potential

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } x < 0 \text{ und } x > l \;, \\ 0 & \text{für } 0 \le x \le l \;. \end{cases} \tag{1}$$

1. Bestimmen Sie die Eigenfunktionen und die Eigenverte des Hamilton-Operators

$$H = T + V = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x) \;.$$

   Hinweis: Betrachten Sie getrennt den klassisch verbotenen und klassisch erlaubten Bereich. In letzterem machen Sie den Ansatz $\varphi_n(x) = N_n \sin(k_n x)$, $n = 1, 2, ...$, und bestimmen k_n so, dass die stationäre Schrödinger-Gleichung $H\varphi_n(x) = E_n\varphi_n(x)$ erfüllt ist, wobei E_n die Energie-Eigenwerte sind. Beachten Sie außerdem die Stetigkeitsbedingung der Lösungen zwischen klassisch erlaubtem und klassisch verbotenem Bereich.

2. Zur Zeit $t = 0$ sei die Wellenfunktion eines Teilchens mit Masse m gegeben durch

$$\psi(0, x) = N\, l^{-5/2} x\,(l - x)\,\theta(l - x)\,\theta(x) \;. \tag{2}$$

   Bestimmen Sie N so, dass die Wellenfunktion normiert ist.

3. Zur Zeit $t = 0$ wird die Energie des Zustandes von Gl. (2) gemessen. Wie lautet die Wahrscheinlichkeit, die Energie E_n zu finden? Insbesondere, wie lautet die Wahrscheinlichkeit für den Grundzustand? Warum ist dieses Resultat zu erwarten?

   Hinweis: Entwickeln Sie $\psi(0, x)$ nach Energie-Eigenfunktionen:

$$\psi(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \;. \tag{3}$$

   Folgende Integrale sind auch nützlich:

$$\int_0^{n\pi} \mathrm{d}z z \sin z = -(-1)^n n\pi \;, \tag{4}$$

$$\int_0^{n\pi} \mathrm{d}z z^2 \sin z = -(-1)^n \left(n^2\pi^2 - 2\right) - 2 \;. \tag{5}$$

4. Bestimmen Sie die Wellenfunktion $\psi(t, x)$.

Aufgabe 2: Operator für den Radialimpuls (9 Punkte = 3 + 3 + 3)

Der Operator für den Radialimpuls p_r sei definiert durch

$$p_r \equiv \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \;.$$

Dabei ist $\hat{\mathbf{r}} \equiv r^{-1}\mathbf{r} = \mathbf{r}r^{-1}$ der Operator des Einheitsvektors $\mathbf{r}/r$ (wobei $r = |\mathbf{r}|$). Beachten Sie, dass das Symbol $\hat{\mathbf{r}}$ hier für den Einheitsvektor(operator) reserviert ist, deshalb wird es bei den anderen Operatoren weggelassen.

1. Beweisen Sie:
$$[\mathbf{p}, r] = \frac{\hbar}{i}\hat{\mathbf{r}}\ , \qquad [p_r, r] = \frac{\hbar}{i}\ , \qquad r p_r = \mathbf{r}\cdot\mathbf{p} + \frac{\hbar}{i}\ .$$
2. Zeigen Sie, dass
$$\langle \mathbf{r}|p_r|\psi\rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[r\psi(\mathbf{r})]\ .$$
3. Unter welcher Voraussetzung ist p_r hermitesch?

Aufgabe 3: Halber harmonischer Oszillator (5 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m befindet sich im Potential

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0\ , \\ \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 & x \geq 0\ . \end{cases} \tag{6}$$

Bestimmen Sie die Eigenfunktionen und die Eigenwerte.
Hinweis: Benutzen Sie die vom harmonischen Oszillator bekannten Resultate.

Aufgabe 4: Gebundene Zustände? (4 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m befindet sich im attraktiven Potential

$$V(x) = \frac{g}{x^2},\ g < 0. \tag{7}$$

Diskutieren Sie, ohne Rechnungen durchzuführen, die Existenz von gebundenen Zuständen.
Hinweis: Machen Sie eine Dimensionsanalyse.