THEORETIKUM ZUR QUANTENMECHANIK SS 2011

Aufgabenblatt 11 **1.07.2011**

Aufgabe 1: Photoelektrischer Effekt (5 Punkte)

1. Theorieteil

   Erklären Sie, warum es nicht möglich ist, den photoelektrischen Effekt mit Hilfe der klassischen Elektrodynamik zu verstehen.

2. Rechenaufgabe (5 Punkte = 1 + 1 + 1 + 2)

   Ein monochromatischer Lichtstrahl mit Kreisfrequenz ω trifft auf eine Metallplatte mit Austrittsarbeit W_A. Sei A die Querschnittsfläche des Lichtstrahles und I seine Intensität (Energie pro Fläche und Sekunde).

   (a) Wie viele Photonen treffen auf die Metallplatte pro Sekunde?

   (b) Wie lautet die minimale Frequenz ω_g, damit der Effekt zustande kommt?

   (c) Wie viele Elektronen werden pro Sekunde emittiert (die Auslösezeit sei vernachlässigbar) und welche kinetische Energie tragen sie?

   (d) Sei $\omega = 2\omega_g$. Bestimmen Sie den Betrag des Impulses p eines auslaufenden Elektrons.

Aufgabe 2: Schrödinger-Gleichung (12 Punkte)

1. Theorieteil

   (a) Geben Sie die eindimensionale zeitabhängige Schrödinger-Gleichung für ein Teilchen mit Masse m im Potential $V(x)$ an.

   (b) Machen Sie den Separationsansatz $\psi(t, x) = \varphi(t)\phi(x)$. Zeigen Sie, dass die Funktion $\phi(x)$ die eindimensionale zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung (mit Energie E) für ein Teilchen mit Masse m im Potential $V(x)$ erfüllt.

   (c) Erklären Sie das Superpositionsprinzip.

   (d) Gegeben sei die Wellenfunktion $\psi(t, \vec{r})$. Wie lautet die entsprechende Wellenfunktion $\tilde{\psi}(t, \vec{p})$ im Impulsraum?

2. Rechenaufgabe (12 Punkte = 2 + 2 + 2 + 3 + 3)

   Gegeben sei ein attraktives Potential $V(x)$, das unendlich viele gebundene Zustände habe. Zur Zeit $t = 0$ sei die Wellenfunktion gegeben durch

   $$\psi(0, x) = A\,\psi_0(x) + B\,\psi_1(x)\ , \tag{1}$$

   wobei $\psi_0(x)$ den Grundzustand mit Energie E_0 und $\psi_1(x)$ den ersten angeregten Zustand mit Energie E_1 beschreibt. Es wird angenommen, dass die Funktion $\psi_0(x)$ reell und gerade ist und die Funktion $\psi_1(x)$ reell und ungerade ist.

   (a) Bestimmen Sie die möglichen Werte für A und B unter der Voraussetzung, dass (i) die Wahrscheinlichkeiten, E_0 und E_1 bei einer Energiemessung zu finden, gleich sind und (ii) A reell und positiv ist.

   (b) Geben Sie $\psi(t, x)$ für eine beliebige Zeit t an.

   (c) Bestimmen Sie $\langle E \rangle$ für eine beliebige Zeit t.

   (d) Bestimmen Sie $\langle x \rangle$ für eine beliebige Zeit t.

(e) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte für $x = 0$ als Funktion der Zeit.

Aufgabe 3: Hilbert-Raum (13 Punkte)

1. Theorieteil

   (a) Gegeben sei die Menge von Zustandsvektoren $\{|n\rangle, n = 0, 1, 2, ...\}$. Welche Eigenschaften müssen die Vektoren $|n\rangle$ erfüllen, um eine orthonormale Basis zu bilden?

   (b) Erklären Sie das Schrödinger-Bild.

   (c) Erklären Sie das Heisenberg-Bild und die Beziehung zum Schrödinger-Bild.

2. Rechenaufgabe (13 Punkte = 1+ 2 + 2 + 2 + 4 + 2)

   Gegeben sei den Hamilton-Operator des harmonischen Oszillators

$$H = \hbar\omega \left(\frac{1}{2} + a^\dagger a \right) \tag{2}$$

   wobei $[a, a^\dagger] = 1$, $a|0\rangle = 0$.

   (a) Zeigen, dass der Zustand $a^\dagger |0\rangle$ normiert ist.

   (b) Bestimmen Sie c so, dass der Zustand $c\left(a^\dagger\right)^2 |0\rangle$ normiert ist.

   (c) Gegeben sei der Zustand

$$|s\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle + \alpha\, a^\dagger |0\rangle \quad . \tag{3}$$

   Bestimmen Sie α unter der Annahme, dass α reell und negativ ist.

   (d) Berechnen Sie

$$\langle s | H | s \rangle \quad . \tag{4}$$

   (e) Berechnen Sie mit Hilfe der Heisenberg-Gleichung die folgenden Operatoren:

$$\frac{\mathrm{d}a}{dt} \text{ und } \frac{\mathrm{d}a^\dagger}{dt} \quad . \tag{5}$$

   Lösen Sie dann die entsprechenden Bewegungsgleichungen. (Sei $a(0) = a$ und $a^\dagger(0) = a^\dagger$).

   (f) Die Operatoren q und p lauten

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a^\dagger + a\right),\ p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(a^\dagger - a\right) \quad . \tag{6}$$

   Berechnen Sie $q(t)$ und $p(t)$ unter der Benutzung der Resultate von Aufgabenteil (e) für die Anfangsbedingungen $q(t) = q$ und $p(t) = p$.