THEORETIKUM ZUR QUANTENMECHANIK SS 2011

Aufgabenblatt 4 **13.05.2011**

Aufgabe 1: Zur Kontinuitätsgleichung (10 Punkte = 3 + 2 + 5)

Sei ψ eine Lösung der Schrödinger-Gleichung. Dann gilt die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t |\psi|^2 + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \ , \tag{1}$$

wobei

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi} \left[\psi^* \, \vec{\nabla}\psi - (\vec{\nabla}\psi^*)\psi \right] \ . \tag{2}$$

1. Zeigen Sie, dass $\vec{j}$ wie folgt ausgedrückt werden kann:

$$\vec{j} = \frac{\hbar \, |\psi|^2}{m} \, \vec{\nabla}\phi \ , \tag{3}$$

   wobei $\psi = |\psi| \, e^{i\phi}$. (Zeigen Sie auch, dass die Funktion ϕ reell sein muss.)

2. Wie lautet die Kontinuitätsgleichung, wenn $\psi(t, \vec{r}) = \psi(t, x)$, also nicht von den Variablen y und z abhängt?

3. Gegeben sei die Wellenfunktion

$$\psi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} \frac{\sin[(x - ut)\alpha]}{x - ut} e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \tag{4}$$

   wobei α und u reelle und positive Konstanten sind und $\omega_0 = \hbar k_0^2/2m$. Ist diese Wellenfunktion zu jeder Zeit t normiert? (Hinweis: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \pi$). Berechnen Sie die explizite Form von $\vec{j}$. Unter welcher Bedingung ist die Kontinuitätsgleichung erfüllt?

Aufgabe 2: Potential gesucht (5 Punkte)

Betrachten Sie die eindimensionale Wellenfunktion ($x > 0$)

$$\psi(x) = A \left(\frac{x}{x_0} \right)^n \exp\left(-\frac{x}{x_0} \right) \ ,$$

wobei A, n und x_0 Konstanten sind. Bestimmen Sie mit Hilfe der Schrödinger-Gleichung das Potential $V(x)$ und die Energie E, für die $\psi(x)$ Eigenfunktion ist. Nehmen Sie dafür $\lim_{x\to\infty} V(x) = 0$ an.

Aufgabe 3: Wahrscheinlichkeit (6 Punkte = 3 + 3)

Gegeben sei die folgende Wahrscheinlichkeitsdichte zur Zeit $t = 0$:

$$|\psi(0, x)|^2 = Ae^{-|x|} + Be^{-|x-3|}. \tag{5}$$

1. Wie müssen A und B aussehen, damit die Funktion normiert ist und damit die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen für $x > 3$ bei einer Ortsmessung zu finden, $1/3$ beträgt?

2. Zeichnen Sie die Funktion $|\psi(0, x)|^2$ und bestimmen Sie den Mittelwert der Position des Teilchens.

Aufgabe 4: Erwartungswerte (9 Punkte = 3 + 3 +3)

Berechnen Sie die Erwartungswerte

(i) der kinetischen Energie $\hat{T} = \hat{p}^2/(2m)$,

(ii) des Potentials $\hat{V} = -e^2/r$,

(iii) der Gesamtenergie $\hat{T} + \hat{V}$

in einem Zustand, der durch die Wellenfunktion

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a} \ , \qquad a \equiv \frac{\hbar^2}{me^2} \ ,$$

gegeben ist.