a) $\lambda_D = 2\pi \frac{\hbar}{p}$, wobei $p = mv$, ist die De Broglie Wellenlänge.

Diese Länge setzt die Skala für das Wellen-Verhalten eines Teilchens (wobei man nicht vergessen soll, dass es sich um eine Wahrscheinlichkeitswelle handelt.

b) Die Wellenfunktion ψ kann, z.B., als Summe zwei Wellenfunktionen hingeschrieben werden:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 \,,$$

wobei ψ_1 und ψ_2 unterschiedliche Möglichkeiten beschreiben.

z.B: Doppelspalt! $\psi_1 \mapsto$ Wahrscheinlichkeitswelle, dass das Teilchen durch den ersten Spalt geht.

$\psi_2 \mapsto$ . . . . . .

. . . .

den zweiten Spalt geht.

Letztendlich muss man $|\Psi|^2$ betrachten, um physikalischen Größen zu rechnen.

Man bekommt:

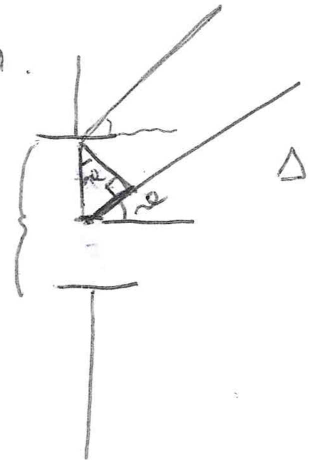
$$|\Psi|^2 = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + \underbrace{\Psi_1^*\Psi_2 + \Psi_1\Psi_2^*}_{\text{Interferenzterme}}$$

Diese Diskussion ist allgemein, sobald wir $\Psi = \sum_{i=1}^{N} \Psi_i$ hinschreiben.

a) $\lambda_D = 2\pi \frac{\hbar}{p_e}$, $p_e = mv$.

Minima; man spaltet den Spalt in n-geraden Unterteilen.

Beispiel; n=2



$\Delta: \frac{d}{2} \cdot \sin\vartheta = \frac{\lambda_D}{2}$ → MINIMUM

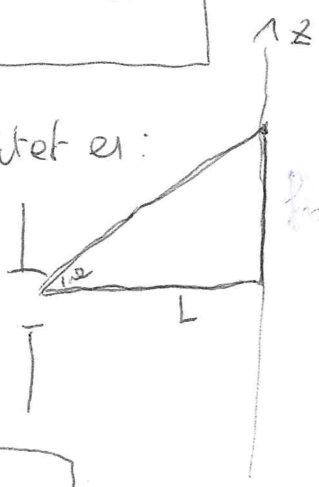
Allgemein:

$\Delta_n: \frac{d}{2n} \sin\vartheta = \frac{\lambda_D}{2}$ → MINIMA

$$\boxed{\sin\vartheta_n = \lambda_D \cdot \frac{n}{d}}$$

INTERFERENZ-MINIMA ; erstes Minimum für $\sin\vartheta_1 = \frac{\lambda_D}{d}$

Am Schirm bedeutet es:



$$\boxed{z_n^{MIN} = L \cdot \tan\vartheta_n}$$

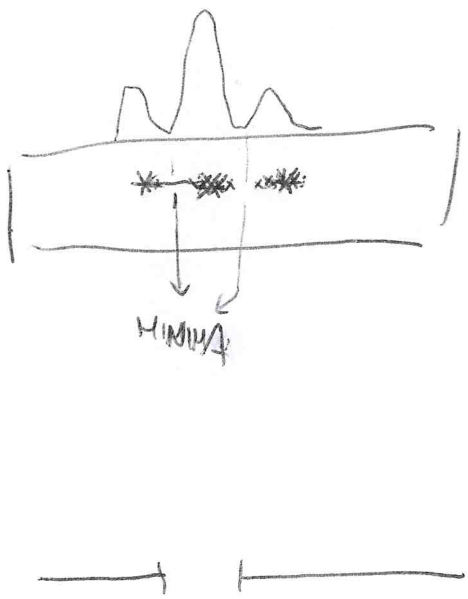
Für die Maxima genau wie vorher; der einzige Unterschied ist die Unterteilung in eine ungerade Anzahl.

$$\Delta = \frac{d}{2m+1} \sin\varphi = \frac{\lambda_D}{2}$$

$$\boxed{\sin\varphi_m = \frac{2m+1}{2}\frac{\lambda_D}{d}}$$ MAXIMA

$$\boxed{z_m^{MAX} = L \cdot tg(\varphi_m)}$$

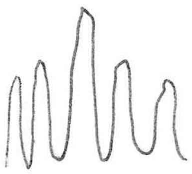
BILD:



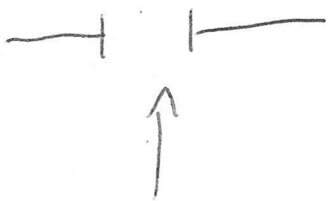
b) $\lambda_D << d$ (Die Wellenlänge ist sehr klein)

$\sin\alpha_1 = \frac{\lambda_D}{d} \approx 0 \rightarrow \alpha_1 = 0$

Die Minima (und auch die Maxima) sind sehr nah beieinander.



Ich sehe nur viele Teilchen in der Mitte.



c) $\lambda_D >> d$

$\sin\alpha_1 = \frac{\lambda_D}{d} >> 1$, Ich sehe die Minima nicht mehr.

Schon für $\lambda_D = d$ sind die ersten Minima für $\alpha_1 = \pm\frac{\pi}{2}$!

Man hat nach dem Spalt eine Kugelwelle.

a) Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi$$

$$\psi = N e^{-i(\omega(\vec{k})t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$$

$$i\hbar(-i\omega(\vec{k}))\left(N e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}(i\vec{k})^2 \left(N e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r}}\right.$$

$$\hbar\omega(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m}$$

$$\boxed{\omega(\vec{k}) = \frac{\hbar \vec{k}^2}{2m}}$$

b) $$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V\psi$$

$$\psi = \alpha \psi_1 + \beta \psi_2$$

$$i\hbar\left(\alpha \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \beta \frac{\partial \psi_2}{\partial t}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\alpha \Delta \psi_1 + \beta \Delta \psi_2\right) +$$

$$+ V(\psi_1 + \psi_2);$$

Da $i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi_1 + V\psi_1$ und $i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi_2 + V\psi_2$ gelten,

folgt, dass auch ψ eine Lösung ist.

Das ist der berühmte Superposiaionsprinzip.

c)

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, x \, |\psi|^2$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot x^2 \, |\psi|^2$$

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \psi^* \hat{p} \, \psi$$

$$\langle p^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \psi^* \hat{p}^2 \psi$$

wobei

$$p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$$

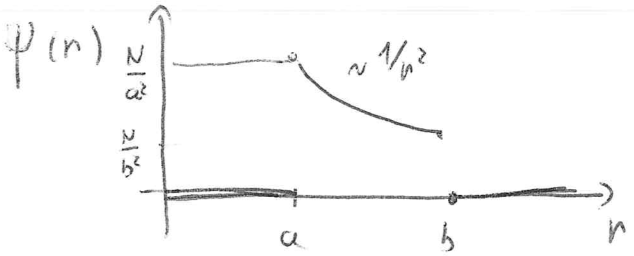
Wg Heisenberg:

$$\boxed{\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \forall t.}$$

Es ist unmöglich, eine $\psi(x)$ zu bilden, die beliebig kleine Varianzen für x und p liefert.

Das ist so, weil die Operatoren x und p nicht kommutieren.

a)



Normierung

b) $$\int d^3r\, |\psi|^2 = \int_a^b 4\pi r^2 dr \cdot \frac{|N|^2}{r^4} = 4\pi \int_a^b \frac{|N|^2}{r^2} dr =$$

$$= |N|^2 \cdot 4\pi \left(-r^{-1}\right)\Big|_a^b = |N|^2 \cdot 4\pi \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = 1$$

$$\to |N|^2 \cdot 4\pi \,\frac{b-a}{ab} = 1$$

$$\to |N|^2 = \frac{1}{4\pi}\,\frac{ab}{(b-a)} \Rightarrow \boxed{N = \sqrt{\frac{1}{4\pi}\,\frac{ab}{b-a}}\; e^{i\varphi}}.$$

c) Messung zwischen $\alpha < r < \beta$:

$$W(\alpha<r<\beta) = 4\pi \int_\alpha^\beta \frac{|N|^2}{r^2} dr = |N|^2 4\pi \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right) =$$

$$= 4\pi \left(\frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}\right) \cdot \frac{1}{4\pi}\,\frac{ab}{b-a}$$

$$= \boxed{\frac{\beta-\alpha}{\alpha\cdot\beta}\cdot\frac{ab}{b-a}}$$

d)

$$\langle r \rangle = \int_a^b 4\pi r \frac{|N|^2}{r^2} dr = 4\pi |N|^2 \left(\ln \frac{b}{a} \right) = \frac{ab}{b-a} \ln \frac{b}{a}$$

e)

$$\langle r^2 \rangle = \int_a^b 4\pi r^2 \frac{|N|^2}{r^2} dr = 4\pi (b-a) |N|^2$$

$$\Delta r = \sqrt{\langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2} =$$

$$= |N| \cdot \sqrt{4\pi} \cdot \sqrt{(b-a)^2 - \ln^2 \frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{ab}{b-a}} \sqrt{(b-a)^2 - \ln^2 \frac{b}{a}}$$

f) Fourier-Transformation:

$$\boxed{\tilde{\psi}(t, \vec{p}) = \int \frac{d^3 r}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \psi(\vec{r}) e^{-i \vec{p} \cdot \vec{r}/\hbar}}$$

$|\tilde{\psi}(t,\vec{p})|^2 d^3\vec{p}$ ist die Wahrscheinlichkeit, den Impuls zwischen $\vec{p}$ und $\vec{p} + \vec{p} d^3\vec{p}$ zu finden, wenn man eine Messung des Impulses durchführt.

a) $\boxed{U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}}$ ist der Zeitentwicklungsoperator.

Wenn man den Anfangszustand $|S, t=0\rangle$ hat, kann man den Zustand zur Zeit $t>0$ wie folgt rechnen:

$$\boxed{|S, t>0\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|S, t=0\rangle}$$

b) $\hat{A}_H(t) \equiv$ operator $\hat{A}$ im Heisenberg-Bild

$\hat{A}_S(t) \equiv$ " " " " $\hat{A}$ im Schrödinger-Bild

↳ 'eventuelle' explizite t-Abhängigkeit

$$\hat{A}_H(t) = e^{\frac{i}{\hbar}Ht}\hat{A}_S(t)e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$$

Zur Erinnerung:

$$\langle\psi_S(t)|\hat{A}_S(t)|\psi_S(t)\rangle = \langle\psi_S(0)|e^{\frac{i}{\hbar}Ht}\hat{A}_S(t)e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi_S(0)\rangle$$

$|\psi_H\rangle = |\psi_S(0)\rangle$, $\hat{A}_H(t) = e^{\frac{i}{\hbar}Ht}\hat{A}_S(t)e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$

$$\hat{A}_H^{(t)} = e^{\frac{i}{\hbar}Ht} \hat{A}_s(t) e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$$

$$\frac{d\hat{A}_H}{dt} = \frac{i}{\hbar} H e^{\frac{i}{\hbar}Ht} \hat{A}_s e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} + e^{\frac{i}{\hbar}Ht} \hat{A}_s e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \left(-\frac{i}{\hbar} H\right)$$

$$+ e^{\frac{i}{\hbar}Ht} \frac{\partial \hat{A}_s}{\partial t} e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$$

$$\boxed{\frac{d\hat{A}_H}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, \hat{A}_H] + \frac{\partial \hat{A}_H}{\partial t}}$$

Bewegungsgl. des Operators $\hat{A}_H$.

c) $A = H^n$

$$\frac{dA}{dt} = n H^{n-1} \frac{dH}{dt} = 0 \quad \text{, weil} \quad \frac{dH}{dt} = \underbrace{\frac{i}{\hbar}[H,H]}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial t}}_{0 \text{ wg Annahme}}$$

a)

$$\langle 2|2\rangle = \frac{1}{2}\langle 0|a\underset{\sim}{a\,a^\dagger}a^\dagger|0\rangle = \frac{1}{2}\langle 0|a(a^\dagger a+1)a^\dagger|0\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\langle 0|\underset{\sim}{a\,a^\dagger}a\,a^\dagger|0\rangle + \frac{1}{2}\langle 0|a\,a^\dagger|0\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\langle 0|(a^\dagger a+1)a\,a^\dagger|0\rangle + \frac{1}{2}\underbrace{\langle 0|a^\dagger a+1|0\rangle}_{=\langle 0|1|0\rangle = 1}$$

$$= \frac{1}{2}\langle 0|a\,a^\dagger|0\rangle + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \;!\;\text{OK}$$

b)

$$|s,t\rangle = e^{-iHt} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,e^{-iE_0t}|0\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,e^{-iE_2t}|2\rangle$$

wobei

$$E_0 = \hbar\omega/2\,,\quad E_2 = \frac{5}{2}\hbar\omega$$

c)

$$\langle s,t|H|s,t\rangle = \frac{1}{2}E_0 + \frac{1}{2}E_2 = \frac{1}{2}\hbar\omega\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\hbar\omega$$

Es hängt nicht von t ab, weil $dH/dt = 0$ (*)

d)

$$\langle s,t|H^2|s,t\rangle = \frac{1}{2}E_0^2 + \frac{1}{2}E_2^2 = \frac{1}{2}\hbar^2\omega^2\left(\frac{1}{4}+\frac{25}{4}\right) = \frac{13}{4}\hbar^2\omega^2$$

$$\Delta H = \sqrt{\langle H^2\rangle - \langle H\rangle^2} = \sqrt{\frac{13}{4}\hbar^2\omega^2 - \frac{9}{4}\hbar^2\omega^2} = \hbar\omega \quad (**)$$

(*) und (**) Auch wenn man die Phasen explizit berücksichtigt, ist es leicht zu sehen, dass sie sich aufheben.

e)

$$[H,P] = \hbar\omega\,[a^+a, P] =$$

$$= \hbar\omega\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\,[a^+a, a + a^+]$$

$$= \hbar\omega\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left([a^+,a]a + a^+[a,a^+]\right)$$

$$\boxed{[H,P] = \hbar\omega\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(a^+ - a\right)}$$

Der Impuls ist keine Bewegungskonstante, weil $[H,P] \neq 0$.