

Institut für Theoretische Physik

Johann Wolfgang Goethe-Universität
Frankfurt am Main

BACHELORARBEIT

Zerfälle des (Pseudo-)Tensor-Glueballs im 'erweiterten Linearen Sigma-Modell'

30. September 2014

Nils Saß

Erstgutachter

Priv. Doz. Dr. Francesco Giacosa
Institut für theoretische Physik
Johann Wolfgang Goethe-Universität
Frankfurt am Main

Zweitgutachter

Prof. Dr. Dirk H. Rischke
Institut für theoretische Physik
Johann Wolfgang Goethe-Universität
Frankfurt am Main

Danksagung

Mit diesen Zeilen möchte ich mich herzlich bei Dr. Francesco Giacosa bedanken, der mich bei der vorliegenden Arbeit ausgesprochen gut betreut und sich stets die Zeit genommen hat, mir bei Fragen und Problemen mit Rat und Tat zur Seite zu stehen.

Ein weiterer Dank gilt neben Dr. Francesco Giacosa auch Prof. Dr. Dirk H. Rischke für die Möglichkeit einen ausführlichen Einblick in dieses spannende Gebiet zu bekommen, was nicht zuletzt seiner hervorragenden Vorlesung zur Quantenfeldtheorie mit ihrem ausführlichen Skript zu verdanken ist, die mein Grundverständnis in diesem Bereich gelegt hat.

Ich möchte zuletzt meine Wertschätzung gegenüber der Unterstützung durch meine Familie und der Hilfe bei der Korrektur durch Dominik Kaufhold und Fiona Byrne zum Ausdruck bringen.

„Gelobt sei, was hart macht“

Friedrich Nietzsche, 1883-1885,
in memoriam Peter O. G. Saß

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Notationen und Konventionen	3
3	Klassische Feldtheorie massiver Tensor-Felder	4
3.1	Euler-Lagrange-Gleichungen für Felder	4
3.2	Die Hamilton-Formulierung für Felder	6
3.3	Freie Lagrangedichte für massive Tensor-Felder	7
4	Kanonische Quantisierung	9
4.1	Fourier-Darstellung des Glueball-Feldes	9
4.2	Polarisationstensoren	10
4.3	Quantisierung	12
5	Dynamik von Quantensystemen	13
5.1	Schrödinger-Bild	13
5.2	Heisenberg-Bild	15
5.3	Wechselwirkungsbild	15
5.4	Zeitentwicklungs-Operator im Wechselwirkungsbild	16
5.5	Die Streumatrix	18
6	Effektives Modell	19
6.1	Konstruktion der Meson-Nonets	19
6.2	Wechselwirkungs-Lagrangedichten	22
6.2.1	Lagrangedichte für den 2^{++} -Tensor-Glueball	23
6.2.2	Lagrangedichte für den 2^{-+} -Pseudotensor-Glueball	24
6.3	Symmetrien des Modells	25
6.3.1	$SU(N_c)_c$ -Farbsymmetrie	25
6.3.2	Lorentz-Symmetrie	27
6.3.3	Chirale Symmetrie	28
6.3.3.1	$U(1)_V$ -Symmetrie	29
6.3.3.2	$SU(N_f)$ -Symmetrie	30
6.3.4	Chirale- und $U(N_f)_A$ -Symmetrie	31
6.3.5	CP-Symmetrie	32
6.3.5.1	Parität	32
6.3.5.2	Ladungskonjugation	34
6.4	Berechnung der Zerfallsbreiten	36
6.4.1	Zerfallsbreite für den Tensor-Glueball $\Gamma_{G \rightarrow V_1 V_2}$	38
6.4.2	Zerfallsbreite für den Pseudotensor-Glueball $\Gamma_{\partial\Theta \rightarrow (\partial V_1) V_2}$	41
6.5	Mischung der Kaon-Felder	43
6.6	Resultate	46
6.6.1	Tensor-Glueball	46
6.6.2	Pseudotensor-Glueball	48
7	Zusammenfassung	49

1 Einleitung

Im Zuge der Entwicklung der Quantenchromodynamik (QCD) als Theorie der starken Wechselwirkung, Anfang der 70er Jahre, gewann ein Objekt immer mehr an Interesse, das bis heute Gegenstand theoretischer und experimenteller Forschung ist, der *Glueball*. Die QCD ist eine $SU(3)_c$ -Eichtheorie, d.h. sie ist invariant unter lokalen $SU(3)_c$ -Transformationen im dreidimensionalen Farbraum, die die Physik der Quarks unter Ankopplung ihres Eichfeldes, den Gluonen, beschreibt. Der nicht-abelsche Charakter der $SU(3)_c$ sorgt für die Existenz von 3- und 4-Gluon-Vertizes im Yang-Mills-Anteil der QCD-Lagrangedichte. Gluonen wechselwirken folglich stark miteinander, was sofort die Vermutung aufkommen lässt, dass sie im Einklang mit dem berühmten Confinement gebundene, weiße Zustände bilden können sollten, die sogenannten *Glueballs*. Durch Gittersimulationen konnte einerseits die Vermutung der Existenz von Glueballs weiter untermauert werden, andererseits war es durch diese möglich ein vollständiges Glueball-Massenspektrum in verschiedenen Quantenzahlen J^{PC} vorherzusagen [13], das insbesondere für diese Arbeit bei der Berechnung von Zerfallsbreiten von ausgezeichneter Bedeutung sein werden (siehe Abb. 1).

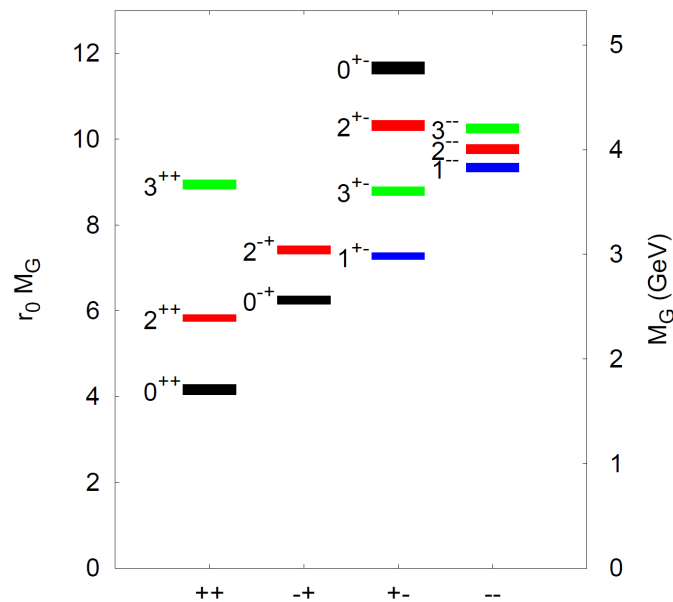


Abbildung 1: Vorhergesagtes Glueball-Massenspektrum der reinen $SU(3)$ -Eichtheorie aus Gittersimulationen. Entnommen aus [13]

Da der skalare [19] bzw. pseudoskalare Glueball [16] theoretisch gut untersucht ist, soll die folgende Arbeit diese Studien für den Spin-2-Fall weiterführen, indem der Tensor-Glueball mit $J^{PC} = 2^{++}$ und der Pseudotensor-Glueball mit $J^{PC} = 2^{-+}$ untersucht werden. Bis zum heutigen Zeitpunkt konnte kein Glueball zweifelsfrei identifiziert werden, wodurch die Ergebnisse dieser Arbeit besonders im Hinblick auf das Experiment von Interesse sind. Ein solches, das PANDA-Experiment [17], befindet sich derzeit im Bau an der Facility for Antiproton and Ion Research (FAIR) und wird, basierend auf Proton-Antiproton-Kollisionen, unter Anderem einen Fokus auf die eindeutige Identifizierung von Glueballs legen, da das Experiment erstmals in der Lage sein wird den Massenbereich oberhalb von 2.5 GeV aufzulösen. Damit sollte es in der Lage sein die folgenden Ergebnisse experimentell zu überprüfen.

Grundlage dieser Arbeit wird die Realisierung eines linearen Sigma-Modells unter Anbindung von Vektor- und Axialvektor-Mesonen mit vollständiger chiraler Symmetrie sein, das sowohl Strange- als auch Non-Strange-Quantenzahlen inkorporiert und als 'erweitertes Lineares Sigma-Modell' (eLSM) bezeichnet wird [18]. Das Modell ist ein 3-Flavor-Modell, das die drei leichtesten Quarks, also Up-, Down- und Strange-Quark, einbindet und für die Anordnung der jeweiligen Mesonen in sogenannten Nonets sorgt.

Die Gliederung der Arbeit sieht vor zunächst die fundamentalen Formalismen der Quantenfeldtheorie zu rekapitulieren, um anschließend einen kurzen Blick auf die freie Theorie massiver Tensor-Felder und deren Lösung werfen zu können, der die Glueballs als Spin-2-Teilchen genügen. Es werden die allgemeinen Grundlagen zur Beschreibung von Streuprozessen und damit auch Zerfällen gelegt werden, bevor das effektive Modell der Arbeit mit seinen Wechselwirkungs-Lagrangedichten vorgestellt werden kann, um es, im Hinblick auf die Eigenschaften der QCD, einer ausführlichen Symmetriebetrachtung zu unterziehen. Das Ziel wird die Berechnung der Zerfallsbreiten der einzelnen Zerfallskanäle sein. Da es sich herausstellen wird, dass diese stets von der jeweils unbestimmten Kopplungskonstante abhängen, werden letztendlich alle Zerfallsbreiten als Verhältnis zu einem ausgewählten Zerfall angegeben, was die Werte fixieren wird und für das Experiment verwertbar machen wird.

Da das Modell im Strange-Sektor kaonische Kanäle enthält, die durch Mischungseffekte mit unphysikalischen Feldern beschrieben werden, wird abschließend eine genaue Untersuchung der Kaon-Felder angeführt, um alle unphysikalischen Felder durch die modifizierten physikalischen Teilchen ausdrücken zu können.

2 Notationen und Konventionen

Natürliche Einheiten

Als grundlegendes Einheitensystem werden für die gesamte Arbeit die sogenannten natürlichen Einheiten gewählt, die sich durch

$$c = \hbar = \varepsilon_0 = 1 \quad (2.1)$$

auszeichnen, was beispielsweise zur Gleichheit von Energie und Masse bzw. Dimensionslosigkeit der Geschwindigkeit führt.

Metrik

Der metrische Tensor im Minkowski-Raum wird mit der Signatur $(+, -, -, -)$ verwendet, also

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) . \quad (2.2)$$

Weiterhin gilt die *Einsteinsche Summenkonvention*, nach der über doppelte Indizes summiert wird, ohne dass das Summenzeichen explizit notiert wird. Generell stehen griechische für Raum-Zeit-Indizes, während für räumliche Indizes lateinische Buchstaben verwendet werden. Vier-Vektoren werden dabei durch Großbuchstaben kenntlich gemacht. Die Metrik gibt den Zusammenhang zwischen ko- und kontravarianten Vektoren an, wobei erstere tiefgestellte und letztere hochgestellte Indizes besitzen

$$X^\mu = (t, \vec{x})^T , \quad (2.3)$$

$$X_\mu = g_{\mu\nu} X^\nu = (t, -\vec{x}) . \quad (2.4)$$

Gleiches gilt ebenso für die ko- und kontravarianten Ableitungen bzw. den Vier-Gradienten

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial X^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) , \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial X_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right)^T . \quad (2.5)$$

Durch Kontraktion erhält man den bereits aus der kovarianten Elektrodynamik bekannten *d'Alembert-Operator*

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = g_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta , \quad (2.6)$$

mit dem Laplace-Operator $\Delta \equiv \vec{\nabla}^2$.

Dirac-Matrizen

Die Dirac Matrizen werden, ebenso wie die Dirac-Algebra, insbesondere für die Symmetriebeachtungen in dieser Arbeit von zentraler Bedeutung sein. Da ihre Gestalt von der gewählten Basis abhängt, wird hier die Dirac Darstellung

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} , \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} , \quad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

verwendet, wobei σ^i mit $i = 1, 2, 3$ die Pauli-Matrizen bezeichnet:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Die Dirac-Matrizen genügen weiterhin der Dirac-Algebra in Form einer Antikommutator-Relation

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbb{1}_4 \quad (2.9)$$

3 Klassische Feldtheorie massiver Tensor-Felder

In diesem Abschnitt sollen die Prinzipien des Lagrange-Formalismus' der klassischen Mechanik rekapituliert und auf Felder, also kontinuierliche Konfigurationen mit unendlich vielen Freiheitsgraden, erweitert werden. Dies wird dazu führen, dass Euler-Lagrange-Bewegungsgleichungen für Felder abgeleitet werden können. Mit diesen Ergebnissen wird im Anschluss die Lagrangedichte für massive Tensor-Felder mit Spin 2 im wechselwirkungsfreien Fall hergeleitet.

Für den ersten Abschnitt dienten [1, 2, 5] als Quelle.

3.1 Euler-Lagrange-Gleichungen für Felder

Bei der Beschreibung von Feldern müssen die generalisierten Koordinaten $q_i(t)$, $\dot{q}_i(t)$ eines diskreten Systems, wie es aus der klassischen Mechanik bekannt ist, in ein Kontinuum überführt werden. Hierbei bezeichnet i einen Positionsindex. Wir betrachten dabei den Übergang

$$q_i(t) \longrightarrow \phi(t, \vec{x}) . \quad (3.1)$$

Aus den anfänglichen Koordinaten werden also Felder, die nun von den Orten abhängen. Die Koordinate \vec{x} nimmt dabei die Bedeutung eines kontinuierlichen Positionsindex' ein. Das bedeutet weiterhin, dass die Lagrange-Funktion zu einem *Funktional* wird, was durch eckige Klammern gekennzeichnet wird

$$L = L [\phi(t, \vec{x}), \dot{\phi}(t, \vec{x})] . \quad (3.2)$$

Allgemein bezeichnet ein Funktional eine Abbildung $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{K}$, wobei \mathcal{K} ein Körper und \mathcal{V} ein Vektorraum über den Körper \mathcal{K} ist. Im Folgenden betrachten wir Funktionale mit der Zuordnung

$$\mathcal{C}^\infty \longrightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R} , \quad (3.3)$$

wobei \mathcal{C}^∞ der Vektorraum der unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen ist. Funktionale ordnen folglich Funktionen Zahlen zu. Da wir keine nicht-lokalen-Theorien betrachten, kann das Lagrange-Funktional als Raumintegral der sogenannten *Lagrange-Dichte* über das jeweilige Systemvolumen geschrieben werden

$$L [\phi, \dot{\phi}] = \int_V d^3\vec{x} \mathcal{L} . \quad (3.4)$$

Hierbei wurden die Argumente der Felder der Kürze halber nicht mehr explizit notiert. Die Lagrange-Dichte ist selbstverständlich ebenfalls ein Funktional und kann ganz allgemein von den Feldern, ihren räumlichen bzw. zeitlichen Ableitungen, den Koordinaten selbst und der Zeit abhängen. Dies lässt sich in relativistisch kovarianter Schreibweise einfach ausdrücken:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} \left[\phi(t, \vec{x}), \frac{\partial \phi(t, \vec{x})}{\partial t}, \vec{\nabla} \phi(t, \vec{x}), t, \vec{x} \right] \equiv \mathcal{L} [\phi(X), \partial_\mu \phi(X), X] = \mathcal{L} [\phi, \partial_\mu \phi, X] . \quad (3.5)$$

Die Bewegungsgleichungen für Felder können analog zur klassischen Mechanik durch Variation der Wirkung, oder in diesem Fall des Wirkungsfunktional, hergeleitet werden. Die Wirkung ergibt sich mit (3.4) zu

$$S [\phi, \dot{\phi}] = \int_{t_i}^{t_f} dt L [\phi, \dot{\phi}] = \int_{t_i}^{t_f} \int_V dt d^3\vec{x} \mathcal{L} [\phi, \partial_\mu \phi, X] \equiv \int_{V_4} d^4X \mathcal{L} [\phi, \partial_\mu \phi, X] , \quad (3.6)$$

wobei im letzten Schritt die Integration über das betrachtete Raum-Zeit-Volumen $V_4 \equiv [t_i, t_f] \times V$, mit $[t_i, t_f] \subset \mathbb{R}$, $V \subset \mathbb{R}^3$ gemeint ist. Nach dem *Hamiltonschen-Prinzip* ist die Wirkung stationär und verschwindet bei Variation der Felder

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S [\phi, \dot{\phi}] = S [\phi + \delta\phi, \dot{\phi} + \delta\dot{\phi}] - S [\phi, \dot{\phi}] \\ &= \int_{V_4} d^4 X \left[\mathcal{L} [\phi + \delta\phi, \partial_\mu \phi + \delta(\partial_\mu \phi), X] - \mathcal{L} [\phi, \partial_\mu \phi, X] \right], \end{aligned} \quad (3.7)$$

mit der Forderung, dass die Variation der Felder und damit auch ihrer Ableitungen am Rand des Raum-Zeit-Volumens verschwinden

$$\delta\phi(X) \Big|_{\partial V_4} = 0. \quad (3.8)$$

Für den Fall hinreichend kleiner bzw. infinitesimaler Variationen lässt sich (3.7) in erster Ordnung in eine Taylor-Reihe entwickeln

$$0 = \int_{V_4} d^4 X \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) + \mathcal{O}((\delta\phi)^2, (\delta(\partial_\mu \phi))^2) \right], \quad (3.9)$$

mit

$$\delta(\partial_\mu \phi) = \partial_\mu(\phi + \delta\phi) - \partial_\mu \phi = \partial_\mu \delta\phi. \quad (3.10)$$

Dieser Ausdruck lässt sich mit Hilfe von (3.10) weiter auswerten, indem der zweite Summand des Integranden partiell integriert wird:

$$\begin{aligned} \int_{V_4} d^4 X \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) &= \int_{V_4} d^4 X \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu \delta\phi \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \Big|_{\partial V_4} - \int_{V_4} d^4 X \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \\ &= - \int_{V_4} d^4 X \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi, \end{aligned} \quad (3.11)$$

wobei in der zweiten Zeile (3.8) verwendet wurde. Wird dieses Ergebnis nun wieder in (3.9) eingesetzt, so ergibt sich

$$0 = \int_{V_4} d^4 X \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] \delta\phi. \quad (3.12)$$

Da es keine Einschränkungen an die Variation $\delta\phi(X)$ gab und diese i.A. nicht verschwindet, ist der Term allgemein genau dann erfüllt, wenn der Integrand verschwindet. Dies führt direkt zu den *Euler-Lagrange-Bewegungsgleichungen* für Felder

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0. \quad (3.13)$$

Falls ein System nicht nur durch ein einzelnes, sondern n unabhängige Felder $\phi_k(X)$ beschrieben wird, so erfüllt jedes einzelne Feld separat die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_k)} = 0, \quad \forall k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.14)$$

3.2 Die Hamilton-Formulierung für Felder

Wie bereits aus der analytischen Mechanik bekannt, wird ein System nicht nur durch die Lagrange-Funktion, sondern auch durch die Hamilton-Funktion vollständig charakterisiert. Diese hängt allerdings nicht mehr von den generalisierten Koordinaten und deren Ableitung ab, sondern von den Koordinaten und Impulsen. Der Übergang zwischen zwei vollständigen Sätzen von Koordinaten wird allgemein durch eine sogenannte *Legendre-Transformation* bewerkstelligt

$$H(\vec{q}, \vec{p}, t) = \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) , \quad (3.15)$$

wobei

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (3.16)$$

den generalisierten Impuls bezeichnet. Beim Übergang zu Feldern, kann die Hamilton-Funktion, wie bereits im vorherigen Abschnitt gesehen, als Volumen-Integral über die *Hamilton-Dichte* $\mathcal{H}(\vec{x}, t) = \mathcal{H}(X)$ geschrieben werden, wobei erneut die kovariante Notation verwendet wird

$$H(t) = \int_V d^3 \vec{x} \mathcal{H}(X) . \quad (3.17)$$

Nun kann in Analogie zu (3.1) über (3.16) die Impulsdichte $\pi(X)$ definiert werden:

$$\pi(X) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\phi}(X)} . \quad (3.18)$$

Hierbei bezeichnet $\delta/\delta\dot{\phi}$ die Funktionalableitung nach der zeitlichen Änderung des Feldes. Damit ergibt sich die Hamiltondichte

$$\mathcal{H}(X) = \pi(X) \dot{\phi}(X) - \mathcal{L}(X) . \quad (3.19)$$

Durch Einsetzen in (3.17) lässt sich letztendlich auch die Hamiltonfunktion für Felder angeben

$$\begin{aligned} H(t) &= \int_V d^3 \vec{x} \left[\pi(X) \dot{\phi}(X) - \mathcal{L}(X) \right] \\ &= \int_V d^3 \vec{x} \left[\pi(X) \dot{\phi}(X) \right] - L(t) . \end{aligned} \quad (3.20)$$

Die aus der Mechanik bekannten Bewegungsgleichungen zum Hamilton-Formalismus (siehe [1]) nehmen somit folgende Form an

$$\dot{\phi} = \frac{\delta H}{\delta \pi} , \quad \dot{\pi} = - \frac{\delta H}{\delta \phi} . \quad (3.21)$$

Zuletzt soll noch eine weitere Größe betrachtet werden, die weitreichende Folgen für die Konstruktion physikalischer Theorien in Anlehnung an die klassische Mechanik hat. Die *Poisson-Klammer*

$$\{A, B\} = \int_V d^3 \vec{x} \left[\frac{\delta A}{\delta \phi} \frac{\delta B}{\delta \pi} - \frac{\delta A}{\delta \pi} \frac{\delta B}{\delta \phi} \right] \quad (3.22)$$

für zwei beliebige Funktionale $A[\phi, \pi]$, $B[\phi, \pi]$, führt im Falle von $\phi(X)$ und $\pi(X)$ zu den Relationen

$$\{\phi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{x}')\} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \quad (3.23)$$

$$, \{\phi(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{x}')\} = \{\pi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{x}')\} = 0 . \quad (3.24)$$

Diese Relationen haben eine besondere Bedeutung bei der kanonischen Quantisierung von Feldern, da sie in gleicher Form als Kommutator-Relationen gefordert werden.

3.3 Freie Lagrangedichte für massive Tensor-Felder

Bei der Herleitung einer freien Lagrangedichte für die Glueball-Felder $G^{\mu\nu}$ soll im Nachfolgenden in Analogie zu einem Ansatz gearbeitet werden, den bereits Markus Fierz und Wolfgang Pauli 1939 gewählt haben [6]. Fierz und Pauli haben im Rahmen ihres Ansatzes zur Beschreibung eines massiven Gravitons abgeleitet, dass ein allgemeines Tensorfeld $T^{\mu\nu}$ bestimmte Eigenschaften erfüllt, die sogenannten *Fierz-Pauli-Bedingungen*:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 , \quad (3.25)$$

$$g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = 0 , \quad (3.26)$$

$$T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu} = 0 , \quad (3.27)$$

$$(\square + m^2)T^{\mu\nu} = 0 . \quad (3.28)$$

Ein Spin-2-Feld wird demnach durch einen symmetrischen, spurfreien Tensor beschrieben, der die Klein-Gordon-Gleichung erfüllt.

Rein formal stammen die Fierz-Pauli-Bedingungen aus der irreduziblen Darstellung der Poincaré-Gruppe und können heuristisch über die Fierz-Pauli-Wirkung durch Variation des Wirkungsfunktionals motiviert werden [7]. Im Rahmen dieser Bachelor-Arbeit werden wir (3.25)-(3.28) allerdings ohne Beweis als gegeben voraussetzen

Bei der Betrachtung der Bewegungsgleichung (3.28) drängt sich bereits hier der Verdacht auf, dass die gesuchte Lagrangedichte gerade der Klein-Gordon-Lagrangedichte mit der Substitution $\phi(X) \rightarrow T^{\mu\nu}$ entspricht. Da die Lagrangedichte ein Lorentz-Skalar ist, der wegen der Euler-Lagrange-Gleichungen linear in den Glueball-Feldern und ihren Ableitungen sein soll, kann der allgemeine Ansatz

$$\mathcal{L}_0 = a \partial_\mu G_{\alpha\beta} \partial^\mu G^{\alpha\beta} + b G_{\alpha\beta} G^{\alpha\beta} + c \partial_\mu G_{\alpha\beta} \partial^\alpha G^{\mu\beta} \quad (3.29)$$

gemacht werden wobei a, b reelle Konstanten sind und Terme, die wegen (3.25)-(3.27) keinen Beitrag geben (z.B. $d \partial_\mu G^{\mu\nu} \partial^\rho G_{\rho\nu}$), vernachlässigt wurden. Es kann durch partielle Integration gezeigt werden, dass der letzte Summand der Lagrangedichte keinen Beitrag zur Wirkung liefert und somit o.B.d.A. $c = 0$ gewählt werden kann:

$$\begin{aligned} \int_{V_4} d^4 X c \partial_\mu G_{\alpha\beta} \partial^\alpha G^{\mu\beta} &= c \int_{V_4} d^4 X \left[\partial^\alpha (\partial_\mu G_{\alpha\beta} G^{\mu\beta}) - \partial^\alpha \partial_\mu G_{\alpha\beta} G^{\mu\beta} \right] \\ &= c \oint_{\partial V_4} d\sigma^\alpha \partial_\mu G_{\alpha\beta} G^{\mu\beta} - \int_{V_4} d^4 X \partial_\mu \underbrace{\partial^\alpha G_{\alpha\beta}}_{=0} G^{\mu\beta} \\ &= 0 . \end{aligned} \quad (3.30)$$

Hierbei wurde der Integrand in der ersten Zeile mit Hilfe der Produktregel umgeschrieben. Der erste Summand der zweiten Zeile kommt durch den verallgemeinerten Gaußschen Integralsatz zustande, der einen Oberflächenterm ergibt und nach (3.8) verschwindet. Durch das Vertauschen der partiellen Ableitungen nach dem Satz von Schwarz ergibt sich im zweiten Summanden Bedingung (3.25), die ebenfalls verschwindet. Die übrigen Konstanten können durch Bestimmung der Euler-Lagrange-Bewegungsgleichungen ermittelt werden. Es gilt

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial G_{\alpha\beta}} - \partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (\partial^\mu G_{\alpha\beta})} = 0 , \quad (3.31)$$

wobei die jeweiligen Ableitungen wie folgt lauten:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial G_{\alpha\beta}} &= \frac{\partial}{\partial G_{\alpha\beta}} [a \partial_\nu G_{\rho\sigma} \partial^\nu G^{\rho\sigma} + b G_{\rho\sigma} G^{\rho\sigma}] \\
 &= b \left[\left(\frac{\partial}{\partial G_{\alpha\beta}} g_\rho^\alpha g_\sigma^\beta G_{\alpha\beta} \right) G^{\rho\sigma} + G_{\rho\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial G_{\alpha\beta}} g^{\rho\alpha} g^{\sigma\beta} G_{\alpha\beta} \right) \right] \\
 &= b [g_\rho^\alpha g_\sigma^\beta G^{\rho\sigma} + g^{\rho\alpha} g^{\sigma\beta} G_{\rho\sigma}] \\
 &= 2b G^{\alpha\beta} , \tag{3.32}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (\partial^\mu G_{\alpha\beta})} &= \partial^\mu \frac{\partial}{\partial (\partial^\mu G_{\alpha\beta})} [a \partial_\nu G_{\rho\sigma} \partial^\nu G^{\rho\sigma}] \\
 &= a \partial^\mu \left[\left(\frac{\partial}{\partial (\partial^\mu G_{\alpha\beta})} g_{\nu\mu} g_\rho^\alpha g_\sigma^\beta \partial^\nu G_{\alpha\beta} \right) \partial^\nu G^{\rho\sigma} \right. \\
 &\quad \left. + \partial_\nu G_{\rho\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial (\partial^\mu G_{\alpha\beta})} g^\nu_\mu g^{\rho\alpha} g^{\sigma\beta} \partial_\mu G_{\alpha\beta} \right) \right] \\
 &= a \partial^\mu [g_{\nu\mu} g_\rho^\alpha g_\sigma^\beta \partial^\nu G^{\rho\sigma} + g^\nu_\mu g^{\rho\alpha} g^{\sigma\beta} \partial_\nu G_{\rho\sigma}] \\
 &= 2a \square G^{\alpha\beta} . \tag{3.33}
 \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $\partial^\mu \partial_\mu \equiv \square$ den d'Alembert-Operator. Durch Einsetzen dieser beiden Ergebnisse in (3.31) ergeben sich die entsprechenden Bewegungsgleichungen

$$2b G^{\alpha\beta} - 2a \square G^{\alpha\beta} = -2(a \square - b) G^{\alpha\beta} = 0 . \tag{3.34}$$

Durch Vergleich mit (3.28), lassen sich die Konstanten direkt ablesen

$$a = \frac{1}{2} , \quad b = -\frac{m^2}{2} \tag{3.35}$$

Hierbei wurde ausgenutzt, dass die Bewegungsgleichungen nur bis auf eine beliebige, globale komplexe Konstante $c \in \mathbb{C}$ eindeutig sind, die so gewählt werden kann, dass \mathcal{L} , wie bereits vermutet, die Form der Klein-Gordon-Lagrangedichte annimmt (kanonische Normierung)

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} (\partial_\mu G_{\alpha\beta} \partial^\mu G^{\alpha\beta} - m^2 G_{\alpha\beta} G^{\alpha\beta}) . \tag{3.36}$$

Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass die Bedingungen (3.25) - (3.27) im Lagrangian selbst nicht inkorporiert sind und zusätzlich an die Felder gestellt werden müssen.

4 Kanonische Quantisierung

Da im weiteren Verlauf dieser Bachelor-Arbeit Zerfälle, also Vielteilchen-Prozesse, betrachtet werden, ist es unerlässlich das Glueball-Feld zu quantisieren, um Feldanregungen aus dem Vakuum beschreiben zu können. Dies wird dazu führen, dass das Glueball-Feld durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ausgedrückt werden kann, da im Anschluss, analog zur Quantisierung des Photon-Feldes, entsprechende Vertauschungsrelationen der Erzeuger und Vernichter bestimmt werden sollen.

Die primäre Quelle für diesen Abschnitt war [2].

4.1 Fourier-Darstellung des Glueball-Feldes

Wie bereits angedeutet, wird sich dieser Abschnitt an der Quantisierung des Photon-Feldes orientieren, wie sie beispielsweise in [2] oder [1] gefunden werden kann. Der entscheidende Unterschied zum Photon-Feld ist, dass das Glueball-Feld massiv ist und Spin 2 besitzt. Dadurch ergeben sich $2s + 1 = 5$ Polarisationsfreiheitsgrade. Wir betrachten den folgenden Fourier-Ansatz:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}(X) &= \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \sum_{\lambda} \tilde{G}_{\mu\nu}(K, \lambda) e^{-iK \cdot X} \\ &= \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \sum_{\lambda} \varepsilon_{\mu\nu}^{(\lambda)}(\vec{k}) \tilde{G}(K, \lambda) e^{-iK \cdot X} . \end{aligned} \quad (4.1)$$

Hierbei bezeichnet $\varepsilon_{\mu\nu}^{(\lambda)}$, mit $\lambda = 1, 2, 3, 4, 5$, die Polarisationsensoren, die sich, wie üblich, aus der Richtungsquantisierung des Spins ergeben. Weiterhin ist zu bemerken, dass der tensorielle Charakter des Feldes allein durch die $\varepsilon_{\mu\nu}^{(\lambda)}$ getragen wird. Mit (3.28) ergibt sich

$$(\square + m^2) G^{\mu\nu}(X) = \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \sum_{\lambda} \varepsilon_{\mu\nu}^{(\lambda)}(\vec{k}) \tilde{G}(K, \lambda) (-K^2 + m^2) e^{-iK \cdot X} = 0 . \quad (4.2)$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der Polarisationsensoren bzw. wegen $e^{-iK \cdot X} \neq 0, \forall K, X \in \mathbb{R}^4$ und der Tatsache, dass das Verschwinden der Fourier-Amplituden $\tilde{G}(K)$ i.A. lediglich lokal erfüllt sein kann und der trivialen Lösung entspricht, kann diese Gleichung nur dann allgemein erfüllt sein, wenn

$$(-K^2 + m^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k_0^2 - \vec{k}^2 = m^2 \quad \Leftrightarrow \quad k_0 = \pm \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \equiv \pm E_k . \quad (4.3)$$

Es folgt also auch in diesem Fall eine Massenschalen-Bedingung, die als *relativistische Energie-Impuls-Beziehung* bezeichnet wird. Die Existenz der Lösungen zu positiver bzw. negativer Energie lassen sich in die Fourier-Amplituden einarbeiten:

$$\tilde{G}(K, \lambda) = \frac{2\pi}{2E_k} a_+^{(\lambda)}(\vec{k}) \delta(k_0 - E_k) + \frac{2\pi}{2E_k} a_-^{(\lambda)}(\vec{k}) \delta(k_0 + E_k) , \quad (4.4)$$

wobei die Delta-Distributionen jeweils für die richtige Bedingung nach (4.3) sorgen. Daraus folgt

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}(X) &= \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{2\pi}{2E_k} \sum_{\lambda} \varepsilon_{\mu\nu}^{(\lambda)}(\vec{k}) \left[a_+^{(\lambda)}(\vec{k}) \delta(k_0 - E_k) + a_-^{(\lambda)}(\vec{k}) \delta(k_0 + E_k) \right] e^{-iK \cdot X} \\ &= \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k} \sum_{\lambda} \varepsilon_{\mu\nu}^{(\lambda)}(\vec{k}) \left[a_+^{(\lambda)}(\vec{k}) e^{-i(E_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})} + a_-^{(\lambda)}(\vec{k}) e^{i(E_k t + \vec{k} \cdot \vec{x})} \right] . \end{aligned} \quad (4.5)$$

Im zweiten Schritt wurde die Integration über die δ -Funktion ausgewertet. Da die verbleibende Integration über den gesamten Impulsraum ausgeführt wird, lässt sich für eine einheitliche Schreibweise im zweiten Summanden, ohne Einschränkung, die Substitution $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ vornehmen. Mit der Konvention $K \cdot X \equiv E_k t - \vec{k} \cdot \vec{x}$, also der fixierten Massenschalen-Bedingung, lässt sich letztendlich schreiben:

$$G_{\mu\nu}(X) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k} \sum_{\lambda} \varepsilon_{\mu\nu}^{(\lambda)}(\vec{k}) \left[a_+^{(\lambda)}(\vec{k}) e^{-iK \cdot X} + a_-^{(\lambda)}(-\vec{k}) e^{iK \cdot X} \right]. \quad (4.6)$$

$G_{\mu\nu}(X)$ beschreibt ein reelles Feld, das bedeutet es gilt $G_{\mu\nu}(X) = G_{\mu\nu}^\dagger(X)$. Durch Koeffizienten-Vergleich ergeben sich folgende Eigenschaften:

$$a_+^{*(\lambda)}(\vec{k}) = a_-^{(\lambda)}(-\vec{k}) \quad \Leftrightarrow \quad a_-^{*(\lambda)}(-\vec{k}) = a_+^{(\lambda)}(\vec{k}); \quad (4.7)$$

$a_+^{(\lambda)}(\vec{k})$ und $a_-^{(\lambda)}(-\vec{k})$ sind offensichtlich keine unabhängige Größen. Das bedeutet, dass das Glueball-Feld eindeutig durch $a_+^{(\lambda)}(\vec{k}) \equiv a^{(\lambda)}(\vec{k})$ und seinem komplex Konjugierten charakterisiert wird

$$G_{\mu\nu}(X) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k} \sum_{\lambda} \varepsilon_{\mu\nu}^{(\lambda)}(\vec{k}) \left[a^{(\lambda)}(\vec{k}) e^{-iK \cdot X} + a^{*(\lambda)}(\vec{k}) e^{iK \cdot X} \right]. \quad (4.8)$$

4.2 Polarisationsensoren

Wie bereits in Abschnitt 3.3 angemerkt müssen wir uns nun überlegen, welche Form die Polarisationsensoren annehmen. Da in der vorangegangenen Diskussion lediglich die Klein-Gordon-Gleichung verwendet wurde, müssen nun noch die Bedingungen (3.25)-(3.27) eingearbeitet werden, die die Gestalt der $\varepsilon_{\mu\nu}^{(\lambda)}(\vec{k})$ bestimmen werden. Eigenschaft (3.25) ergibt

$$0 = \partial^\mu G_{\mu\nu} = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k} \sum_{\lambda} \varepsilon_{\mu\nu}^{(\lambda)}(\vec{k}) (-iK^\mu) \left[a(\vec{k}) e^{-iK \cdot X} - a^*(\vec{k}) e^{iK \cdot X} \right]. \quad (4.9)$$

Diese Gleichung kann ganz allgemein nur dann erfüllt sein, wenn

$$\varepsilon_{\mu\nu}^{(\lambda)}(\vec{k}) K^\mu = 0. \quad (4.10)$$

Für ein Teilchen mit gegebenem Impuls kann jederzeit in sein entsprechendes Ruhesystem transformiert werden, in dem das Teilchen ruht und somit auch der Wellenvektor verschwindet $\vec{k} = 0$. Der 4-Wellenvektor nimmt in diesem Fall die Form

$$K_\mu = (k_0 = m, 0, 0, 0)$$

an. Durch Einsetzen und explizites Ausrechnen wird ersichtlich, dass Gleichung (4.10) erfüllt ist, falls die erste Zeile der Polarisationsensoren verschwindet

$$\varepsilon_{\mu\nu}^{(\lambda)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{10}^{(\lambda)} & & & \\ \varepsilon_{20}^{(\lambda)} & \begin{pmatrix} \varepsilon_{ij}^{(\lambda)} \end{pmatrix} & & \\ \varepsilon_{30}^{(\lambda)} & & & \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Durch diese Bedingung werden offensichtlich 4 Polarisationsfreiheitsgrade eliminiert. Die Symmetrie des Feldes (3.27) sorgt dafür, dass nicht nur die erste Zeile, sondern auch die erste Spalte

der Polarisationsensoren verschwindet. Weiterhin existieren demnach in $\varepsilon_{ij}^{(\lambda)}$ nur noch 6 unabhängige Elemente auf den Nebendiagonalen. Insgesamt reduziert sich die Zahl der Freiheitsgrade hierdurch um weitere 6

$$\varepsilon_{\mu\nu}^{(\lambda)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\begin{array}{c} \varepsilon_{ij}^{(\lambda)} \end{array} \right) \\ 0 & \\ 0 & \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Zuletzt bleibt noch Bedingung (3.26), die dafür sorgt, dass in $\varepsilon_{ij}^{(\lambda)}$ ein Diagonalelement in Abhängigkeit der anderen ausgedrückt werden kann, also noch einen weiteren Freiheitsgrad eliminiert. Somit verbleiben durch die Fierz-Pauli-Bed. gerade $16 - 4 - 6 - 1 = 5$ Polarisationsfreiheitsgrade, was konsistent mit (4.8) ist. Die Summe beinhaltet tatsächlich, wie bereits durch die Spineinstellungen motiviert, 5 Terme. Gesucht sind nun 5 linear unabhängige, symmetrische, spurfreie 3×3 -Matrizen. Im Rahmen der Gruppentheorie hat Murray Gell-Mann bereits acht linear unabhängige, spurfreie, orthogonale Matrizen als eine Darstellung der Generatoren der $SU(3)$ aufgestellt, von denen gerade fünf symmetrisch sind. Diese symmetrischen Gell-Mann-Matrizen sind eine mögliche Wahl für die Darstellung der $\varepsilon_{ij}^{(\lambda)}$. Somit ergeben sich folgende Polarisationsensoren im Ruhesystem des Glueballs:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mu\nu}^{(1)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \varepsilon_{\mu\nu}^{(2)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \varepsilon_{\mu\nu}^{(3)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \varepsilon_{\mu\nu}^{(4)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \varepsilon_{\mu\nu}^{(5)} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Die Polarisationsensoren in einem beliebigen, mit Geschwindigkeit v bewegten Inertialsystem erhält man durch einen sogenannten Lorentz-Boost in die entsprechende Richtung gemäß

$$\varepsilon'_{\mu\nu}{}^{(\lambda)} = \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu \varepsilon_{\rho\sigma}^{(\lambda)} \Leftrightarrow \varepsilon'^{(\lambda)} = \Lambda^T \varepsilon^{(\lambda)} \Lambda. \quad (4.14)$$

Die Lorentz-Matrix Λ lautet beispielsweise für einen Boost in x -Richtung

$$\Lambda_x = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

mit dem Lorentz-Faktor (in natürlichen Einheiten)

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = v \quad (4.16)$$

Eine für die Berechnung von Zerfallsbreiten fundamentale Eigenschaft der Polarisationsensoren ist deren sogenannte *Vollständigkeitsrelation*. Wie in [10] hergeleitet wird, nimmt diese die Form

$$\sum_{\lambda=1}^5 \varepsilon_{\mu\nu}^{(\lambda)}(\vec{k}) \varepsilon_{\alpha\beta}^{(\lambda)}(\vec{k}) = \frac{1}{2} \left(G_{\mu\alpha} G_{\nu\beta} + G_{\mu\beta} G_{\nu\alpha} - \frac{2}{3} G_{\mu\nu} G_{\alpha\beta} \right) \quad (4.17)$$

an, wobei $G_{\mu\nu}$, nicht zu Verwechseln mit dem Glueball-Feld, die Größe

$$G_{\mu\nu} = \left(g_{\mu\nu} - \frac{K_\mu K_\nu}{m^2} \right) \quad (4.18)$$

kennzeichnet und im Ruhesystem des Glueballs gerade dem Projektor auf den zweidimensionalen Unterraum transversal zu K entspricht.

4.3 Quantisierung

Im Rahmen der kanonischen Quantisierung wird das Glueball-Feld zum Feldoperator

$$\hat{G}_{\mu\nu}(X) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k} \sum_{\lambda=1}^5 \varepsilon_{\mu\nu}^{(\lambda)}(\vec{k}) \left[\hat{a}^{(\lambda)}(\vec{k}) e^{-iK \cdot X} + \hat{a}^{(\lambda)\dagger}(\vec{k}) e^{iK \cdot X} \right] \quad (4.19)$$

erhoben, was dazu führt, dass die Fourier-Amplituden $\hat{a}^{(\lambda)\dagger}(\vec{k})$ bzw. $\hat{a}^{(\lambda)}(\vec{k})$ die Bedeutung des Erzeugungs- und Vernichtungsoperators für Quanten mit Impuls \vec{k} und Polarisation λ erhalten. Für das weitere Vorgehen stoßen wir auf dem vorgestellten Niveau allerdings auf einige Probleme, da das kanonisch konjugierte Feld bzw. dessen Feldoperator

$$\hat{\pi}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 G_{\mu\nu})} \quad (4.20)$$

benötigt wird und die Lagrangedichte (3.36) nicht auf die Fierz-Pauli-Bedingungen führt, also nicht den vollen Informationsgehalt des Systems beinhaltet. Dies wird zur Folge haben, dass das kanonisch konjugierte Feld nicht die richtige Form besitzt. Für die Quantisierung wird damit ein Lagrangian benötigt, dessen Bewegungsgleichungen neben der Klein-Gordon-Gleichung ohne zusätzliche Forderungen auch die Fierz-Pauli-Bedingungen liefern. Eine ausführliche Behandlung, der die nachfolgenden Ergebnisse entnommen sind, findet sich in [10]. Dort wurde die vollständige freie Lagrangedichte zu

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{4} (\partial_\mu G_{\alpha\beta} \partial^\mu G^{\alpha\beta} + \partial_\mu G_{\alpha\beta} \partial^\mu G^{\beta\alpha}) - \frac{1}{2} \partial_\mu G \partial^\mu G \\ & - \frac{1}{4} (\partial_\alpha G^{\alpha\beta} \partial^\mu G_{\mu\beta} + \partial_\alpha G^{\alpha\beta} \partial^\mu G_{\beta\mu} + \partial_\alpha G^{\beta\alpha} \partial^\mu G_{\mu\beta} + \partial_\alpha G^{\beta\alpha} \partial^\mu G_{\beta\mu}) \\ & + \frac{1}{2} (\partial_\mu G^{\mu\nu} \partial_\nu G + \partial_\mu G^{\nu\mu} \partial_\nu G) - \frac{m^2}{4} (G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + G_{\mu\nu} G^{\nu\mu}) + \frac{m^2}{2} G^2 \end{aligned} \quad (4.21)$$

bestimmt. Dabei bezeichnet G die Spur des Glueball-Feldes $G = G^\mu{}_\mu$. Wie sich bereits vermuten lässt, erfüllen die Erzeuger und Vernichter Vertauschungsrelationen der üblichen Form

$$\begin{aligned} \left[\hat{a}^{(\lambda)}(\vec{k}), \hat{a}^{(\lambda')\dagger}(\vec{k}') \right] &= 2E_k (2\pi)^3 \delta_{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') , \\ \left[\hat{a}^{(\lambda)}(\vec{k}), \hat{a}^{(\lambda')}(\vec{k}') \right] &= \left[\hat{a}^{(\lambda)\dagger}(\vec{k}), \hat{a}^{(\lambda')\dagger}(\vec{k}') \right] = 0 . \end{aligned} \quad (4.22)$$

Mit diesen lässt dich der Teilchenzahloperator $\hat{N}^{(\lambda)}(\vec{k})$ definieren, dessen Eigenwerte gerade die Anzahl der Teilchen mit Impuls \vec{k} und Polarisation λ zum entsprechenden Fockraum-Zustand sind. Er ist definiert durch

$$\hat{a}^{(\lambda)\dagger}(\vec{k}) \hat{a}^{(\lambda)}(\vec{k}) = 2E_k (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) \hat{N}^{(\lambda)}(\vec{k}) . \quad (4.23)$$

5 Dynamik von Quantensystemen

In diesem Kapitel sollen einige Eigenschaften der Zeitentwicklung allgemeiner Quantensysteme rekapituliert werden, um die Grundlagen für die Beschreibung von Streu- bzw. Zerfallsprozessen zu legen. Bekanntermaßen existieren in der Quantenmechanik mehrere äquivalente Darstellungen, die sich darin unterscheiden welche Größe zeitabhängig ist. Dies wird dazu führen, dass eine explizite Form des Zeitentwicklungsoperators hergeleitet werden kann, mit dessen Hilfe sich die sogenannte Streumatrix darstellen lässt. Die Streumatrix ist eine zentrale Größe, da sie die Beschreibung von Zerfällen ermöglicht.

Als Quelle für dieses Kapitel dienen [1, 3, 4].

5.1 Schrödinger-Bild

Das Schrödinger-Bild zeichnet sich dadurch aus, dass die gesamte Information über die zeitliche Entwicklung eines quantenmechanischen Systems in den jeweiligen Zuständen beinhaltet ist, während Operatoren stationär sind. Ein beliebiger reiner Zustand $|\psi\rangle = |\psi(t_0)\rangle$ wird durch Anwendung des Zeitentwicklungsoperators $\hat{U}(t, t_0)$ auf den entsprechenden, zeitentwickelten Zustand abgebildet

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad (5.1)$$

und entsprechend

$$\langle\psi(t)| = \left[\hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \right]^\dagger = \langle\psi(t_0)| \hat{U}^\dagger(t, t_0) . \quad (5.2)$$

Aufgrund der Wahrscheinlichkeitserhaltung wird gefordert, dass die Norm des Zustands unter Zeitentwicklung erhalten bleibt

$$1 = \langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \langle\psi(t_0)| \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle . \quad (5.3)$$

Aus dieser Eigenschaft lässt sich direkt die Unitarität des Zeitentwicklungsoperators ablesen. Die Forderung ist gerade dann erfüllt, wenn

$$\hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{U}(t, t_0) = \mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad \hat{U}^\dagger(t, t_0) = \hat{U}^{-1}(t, t_0) . \quad (5.4)$$

Weiterhin soll der Zeitentwickler ein System natürlich unverändert lassen, falls keine Zeitentwicklung vorliegt, oder anders ausgedrückt, falls eine Entwicklung vom Zeitpunkt t_0 nach t_0 betrachtet wird. Für diesen Fall muss der Zeitentwickler offensichtlich die Form der Einheitsmatrix annehmen

$$\hat{U}(t_0, t_0) \equiv \mathbb{1} . \quad (5.5)$$

Die Entwicklung eines Systems zwischen zwei Zeitpunkten ist nach der sogenannten *Konvolutionseigenschaft* in beliebig viele Teilentwicklungen partitionierbar. Das bedeutet, dass nach

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{U}(t, t_1) \hat{U}(t_1, t_2) \hat{U}(t_2, t_3) \dots \hat{U}(t_{N-1}, t_N) \hat{U}(t_N, t_0) \quad (5.6)$$

beliebig viele Zwischenschritte eingefügt werden können. Mit (5.5) und (5.6) lässt sich zuletzt noch eine weitere Eigenschaft festhalten. Es gilt:

$$\hat{U}(t_0, t) \hat{U}(t, t_0) = \hat{U}(t_0, t_0) \equiv \mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad \hat{U}(t, t_0) = \hat{U}^{-1}(t_0, t) = \hat{U}^\dagger(t_0, t) , \quad (5.7)$$

wobei verwendet wurde, dass die Zeitentwicklung eine unitäre Operation ist. Um die Form des Zeitentwicklers zu bestimmen, genügt es wegen (5.6) infinitesimale Zeitschritte zu betrachten,

da sich jede finite Zeitentwicklung durch Mehrfachanwendung bzw. Integration infinitesimaler Zeitentwicklungsoperatoren erreichen lässt. Dies ermöglicht die Entwicklung in eine Taylor-Reihe

$$\begin{aligned}\hat{U}(t+dt, t) &= \hat{U}(t, t) + \frac{\partial}{\partial t'} \hat{U}(t', t) \Big|_{t'=t} dt + O(dt^2) \\ &\stackrel{(5.5)}{=} \mathbb{1} + \frac{\partial}{\partial t'} \hat{U}(t', t) \Big|_{t'=t} dt + O(dt^2) .\end{aligned}\quad (5.8)$$

Andererseits nehmen infinitesimale unitäre Transformationen allgemein die Gestalt

$$\hat{U}_{inf} = \mathbb{1} + \lambda \hat{A} + O(\lambda^2) \quad (5.9)$$

an, wobei gezeigt werden kann, dass der Hamilton-Operator der Generator der Zeitentwicklung ist (siehe z.B. [4]), also die Identifikation $\hat{A} = -\hat{H}(t)$, $\lambda = dt$ gemacht werden kann¹. Mit

$$\frac{\partial}{\partial t'} \hat{U}(t', t) \Big|_{t'=t} = -\hat{H}(t) \quad (5.10)$$

lässt sich die Form von $\hat{U}(t+dt, t)$ angeben:

$$\hat{U}(t+dt, t) = \mathbb{1} - i\hat{H}(t)dt + O(dt^2) . \quad (5.11)$$

Dieses Ergebnis führt mit der Konvolutionseigenschaft (5.6), unter Vernachlässigung von Termen der Ordnung $O(\lambda^2)$, zu einer Operator-Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\hat{U}(t+dt, t_0) = \hat{U}(t+dt, t) \hat{U}(t, t_0) = \left(\mathbb{1} - i\hat{H}(t)dt \right) \hat{U}(t, t_0) . \quad (5.12)$$

Die Umformung dieses Ausdrucks führt zu

$$i \frac{\hat{U}(t+dt, t_0) - \hat{U}(t, t_0)}{dt} = \hat{H}(t) \hat{U}(t, t_0) , \quad (5.13)$$

was gerade dem Differenzenquotient, also der Ableitung des Zeitentwicklungsoperators, entspricht

$$i \frac{d}{dt} \hat{U}(t, t_0) = \hat{H}(t) \hat{U}(t, t_0) . \quad (5.14)$$

Da, wie am Anfang erwähnt, lediglich stationäre Operatoren betrachtet werden $\hat{H}(t) = \hat{H}$, lässt sich die Differentialgleichung mit der Randbedingung (5.5) offensichtlich durch einen Exponentialansatz lösen und wir erhalten

$$\hat{U}(t, t_0) = e^{-i\hat{H}(t-t_0)} . \quad (5.15)$$

Zuletzt lässt sich durch Anwenden dieses Resultats auf (5.1) die *zeitabhängige Schrödingergleichung* für Hilbertraum-Zustände ableiten

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle . \quad (5.16)$$

¹Diese Identifikation ist ein hochgradig nicht-trivialer Aspekt, da hierfür die Gültigkeit der Schrödinger-Gleichung angenommen wird, wie gleich demonstriert wird.

5.2 Heisenberg-Bild

Im Heisenberg-Bild steckt die Zeitabhängigkeit eines Systems in den Operatoren, während die Zustände stationär sind

$$|\psi(t)\rangle_H = |\psi(t_0)\rangle_H \equiv |\psi\rangle_H . \quad (5.17)$$

Ein Heisenberg-Zustand ist dann identisch mit dem entsprechenden Zustand im Schrödinger-Bild zum Zeitpunkt $t = t_0$. Um zu sehen, welche Form eine physikalische Observable im Heisenberg-Bild annimmt, betrachten wir ihren Schrödinger-Bild-Erwartungswert

$$\langle \hat{O} \rangle_S(t) = \langle \psi(t) | \hat{O} | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t_0) | \hat{U}(t_0, t) \hat{O} \hat{U}^\dagger(t, t_0) | \psi(t_0) \rangle = \langle \psi |_H \hat{O}_H(t) | \psi \rangle_H , \quad (5.18)$$

mit dem Heisenberg-Operator

$$\hat{O}_H(t) = \hat{U}(t_0, t) \hat{O} \hat{U}^\dagger(t, t_0) = \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{O} \hat{U}(t, t_0) . \quad (5.19)$$

Operatoren erfüllen im Heisenberg-Bild eine Bewegungsgleichung, die die zeitliche Änderung eines Operators beschreibt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{O}_H(t) &= \left(\frac{d}{dt} \hat{U}^\dagger \right) \hat{O}_S \hat{U} + \hat{U}^\dagger \left(\frac{d}{dt} \hat{O}_S \right) \hat{U} + \hat{U}^\dagger \hat{O}_S \left(\frac{d}{dt} \hat{U} \right) \\ &\stackrel{(5.14)}{=} i \hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{O}_S \hat{U} + \hat{U}^\dagger \frac{\partial \hat{O}_S}{\partial t} \hat{U} - i \hat{U}^\dagger \hat{O}_S \hat{H} \hat{U} \\ &= i \hat{U}^\dagger \left([\hat{H}, \hat{O}_S] + \frac{\partial \hat{O}_S}{\partial t} \right) \hat{U} \equiv i [\hat{H}_H, \hat{O}_H] + \frac{\partial \hat{O}_H}{\partial t} . \end{aligned} \quad (5.20)$$

Dies ist die sogenannte *Heisenberg-Bewegungsgleichung*

$$i \frac{d}{dt} \hat{O}_H(t) = [\hat{O}_H, \hat{H}_H] + i \frac{\partial \hat{O}_H}{\partial t} . \quad (5.21)$$

5.3 Wechselwirkungsbild

Das Wechselwirkungsbild ist eine Kombination aus Schrödinger- und Heisenberg-Bild, in dem sowohl Zustände als auch Operatoren zeitabhängig sind. Hierfür wird ein System betrachtet, dessen Hamilton-Operator in einen wechselwirkungsfreien, stationären Teil und eine zeitabhängige Störung separiert

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{H}_{Int}(t) , \quad (5.22)$$

wobei die Störung für $t \rightarrow \pm\infty$ verschwinden soll und $\hat{H}(t \rightarrow \pm\infty) = \hat{H}_0$. Im Wechselwirkungsbild entwickeln sich Operatoren, entsprechend dem Heisenberg-Bild, unter dem freien Teil \hat{H}_0^2 , während sich Zustände gemäß Schrödinger-Bild, allerdings unter $\hat{H}_{Int}(t)$, entwickeln. Allgemein gilt

$$|\psi_W(t)\rangle = \hat{U}_W(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle . \quad (5.23)$$

Hierbei ist $\hat{U}_W(t, t_0)$ der Zeitentwicklungs-Operator im Wechselwirkungsbild. Unter der Forderung, dass die Physik invariant unter Wechsel der Darstellungsbilder sein muss und somit z.B. Erwartungswerte physikalischer Observablen in allen Bildern identisch sein sollen, findet man

$$|\psi_W(t)\rangle = \hat{U}_0(t_0, t) |\psi(t)\rangle = \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) |\psi(t)\rangle , \quad (5.24)$$

²Hierin ist letztlich unser Interesse an dem Wechselwirkungsbild begründet. Da in ihm die Operatoren, wie auch der Feldoperator, der freien Theorie genügen, bleibt die bekannte Form des Glueball-Feldes (4.19) weiterhin gültig

$$\hat{O}_W = \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \hat{O} \hat{U}_0(t, t_0) . \quad (5.25)$$

Dabei bezeichnet $\hat{U}_0(t, t_0)$ den Zeitentwicklungsoperator in Abhängigkeit von \hat{H}_0 , wie er durch (5.15) bestimmt wurde

$$\hat{U}(t, t_0) = e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)} . \quad (5.26)$$

Durch explizite Differentiation von (5.25), lässt sich eine zum Heisenberg-Bild äquivalente Form der Bewegungsgleichung von Operatoren im Wechselwirkungsbild ableiten

$$i \frac{d}{dt} \hat{O}_W(t) = [\hat{O}_W, \hat{H}_0] + i \frac{\partial \hat{O}_W}{\partial t} , \quad (5.27)$$

in der lediglich der ungestörte Anteil des Hamiltonians auftaucht. Um die zeitabhängige Schrödingergleichung für Hilbertraum-Zustände im Wechselwirkungsbild zu erhalten, wird die zeitliche Änderung eines Zustands betrachtet:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\psi_W(t)\rangle &= \left(\frac{d}{dt} \hat{U}_0(t_0, t) \right) |\psi(t)\rangle + \hat{U}_0(t_0, t) \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle \\ &\stackrel{(5.16)}{=} \left(\frac{d}{dt} \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \right) |\psi(t)\rangle - i \hat{U}_0(t_0, t) \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle \\ &\stackrel{(5.14)}{=} \left[-i \hat{H}_0 \hat{U}_0(t, t_0) \right]^\dagger |\psi(t)\rangle - i \hat{U}_0(t_0, t) \left(\hat{H}_0 + \hat{H}_{Int}(t) \right) |\psi(t)\rangle \\ &\stackrel{(5.24)}{=} -i \hat{U}_0(t_0, t) \hat{H}_{Int}(t) \hat{U}_0^\dagger(t_0, t) |\psi_W(t)\rangle \stackrel{(5.25)}{=} -i \hat{H}_{Int,W}(t) |\psi_W(t)\rangle , \end{aligned} \quad (5.28)$$

wobei in der dritten Zeile die Hermitizität des Hamilton-Operators verwendet wurde. Mit Hilfe der so gewonnenen zeitabhängigen Schrödingergleichung

$$i \frac{d}{dt} |\psi_W(t)\rangle = \hat{H}_{Int,W}(t) |\psi_W(t)\rangle \quad (5.29)$$

lässt sich durch Verwendung von (5.23) eine Operator-Differentialgleichung für $\hat{U}_W(t, t_0)$ erhalten

$$i \frac{d}{dt} \hat{U}_W(t, t_0) = \hat{H}_{Int,W}(t) \hat{U}_W(t, t_0) , \quad (5.30)$$

mit deren formaler Lösung wir uns im folgenden Kapitel beschäftigen möchten.

5.4 Zeitentwicklungs-Operator im Wechselwirkungsbild

Um eine geschlossene Lösung für den Zeitentwicklungs-Operator im Wechselwirkungsbild zu generieren, muss zunächst die Bewegungsgleichung (5.30) durch Integration in eine äquivalente Integral-Gleichung unter der Randbedingung (5.5) umgeformt werden

$$\hat{U}_W(t, t_0) = \mathbb{1} + (-i) \int_{t_0}^t dt' \hat{H}_{Int,W}(t') \hat{U}_W(t', t_0) . \quad (5.31)$$

Dies ergibt eine sogenannte *Voltterrasche Integralgleichung*, bei der die unabhängige Variable als Obergrenze des Integrals auftaucht. Da die Lösung des Zeitentwicklers selbst wieder von sich abhängt, kann der gleiche Lösungsansatz

$$\hat{U}_W(t', t_0) = \mathbb{1} + (-i) \int_{t_0}^{t'} dt'' \hat{H}_{Int,W}(t'') \hat{U}_W(t'', t_0) \quad (5.32)$$

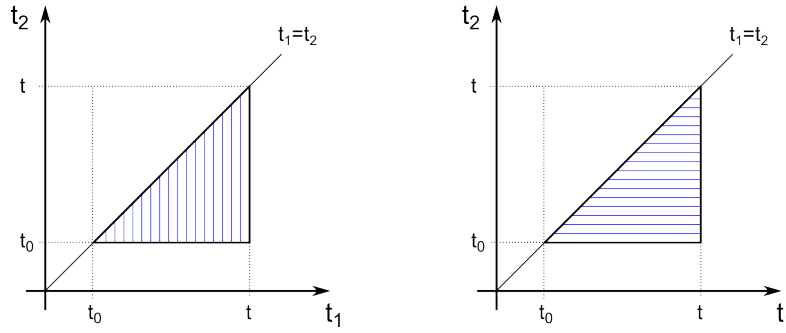


Abbildung 2: Darstellung der Integrationsmöglichkeiten in der Neumannschen Reihe

ebenso für $\hat{U}_W(t', t_0)$ eingesetzt werden usw. Die Gleichung ist also durch Iteration lösbar und ergibt eine *Neumannsche Reihe*³

$$\begin{aligned}
 \hat{U}(t, t_0) &= \mathbb{1} + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 \hat{H}_{Int}(t_1) \\
 &+ (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{H}_{Int}(t_1) \hat{H}_{Int}(t_2) \\
 &+ \dots \\
 &+ (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \hat{H}_{Int}(t_1) \hat{H}_{Int}(t_2) \dots \hat{H}_{Int}(t_n) \\
 &= \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \hat{H}_{Int}(t_1) \hat{H}_{Int}(t_2) \dots \hat{H}_{Int}(t_n) . \quad (5.33)
 \end{aligned}$$

Es fällt auf, dass die Hamilton-Operatoren zeitgeordnet sind, mit $t \geq t_1 \geq \dots \geq t_n$. Das heißt, dass der Hamilton-Operator, der zur jeweils früheren Zeit gehört, entsprechend früher auf den rechts von ihm stehenden Zustand wirkt. Da die Behandlung dieses Ausdrucks wegen der uneinheitlichen Integralgrenzen schwierig zu handhaben ist, wird das erste Ziel sein die Integrale derart umzuschreiben, dass sie alle im Intervall $[t_0, t]$ auszuwerten sind. Zunächst muss jedoch die Zeitordnung in (5.33) sichergestellt werden. Hierzu wird der *Zeitordnungsoperator*

$$\hat{T} \left(\hat{A}(t_1) \hat{A}(t_2) \dots \hat{A}(t_n) \right) = \hat{A}(t_{i_1}) \hat{A}(t_{i_2}) \dots \hat{A}(t_{i_n}) , \quad t_{i_1} \geq t_{i_2} \geq \dots \geq t_{i_n} \quad (5.34)$$

eingeführt, der das Produkt beliebiger zeitabhängiger Operatoren nach ihren Zeitargumenten ordnet. Betrachten wir zunächst das Doppelintegral in der Neumann-Reihe für $n = 2$. Wie in Abb. 2 dargestellt, wird über eine Dreiecksfläche mit $t_1 \geq t_2$ integriert, wobei das linke Bild die ursprüngliche Konfiguration darstellt. Hierbei wird zuerst über $t_2 \in [t_0, t_1]$ und anschließend über $t_1 \in [t_0, t]$, also entlang der vertikalen Streifen integriert. Offensichtlich wird aber dasselbe Integrationsvolumen abgedeckt, indem zunächst über $t_1 \in [t_2, t]$ und dann über $t_2 \in [t_0, t]$, also über alle horizontalen Streifen in der rechten Darstellung von Abb.2, integriert wird. Es gilt somit

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{H}_{Int}(t_1) \hat{H}_{Int}(t_2) = \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_2}^t dt_1 \hat{H}_{Int}(t_1) \hat{H}_{Int}(t_2) . \quad (5.35)$$

³Da klar ist, dass die folgende Rechnung im Wechselwirkungsbild vorgenommen wird, wird für diesen Abschnitt auf den Index 'W' verzichtet

Nimmt man anschließend eine Umbenennung der Variablen $t_1 \leftrightarrow t_2$ vor

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{H}_{Int}(t_1) \hat{H}_{Int}(t_2) = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{H}_{Int}(t_2) \hat{H}_{Int}(t_1) , \quad (5.36)$$

so zeigt sich, dass sich das Doppelintegral aus (5.33) wie folgt umschreiben lässt:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{H}_{Int}(t_1) \hat{H}_{Int}(t_2) &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{H}_{Int}(t_1) \hat{H}_{Int}(t_2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{H}_{Int}(t_2) \hat{H}_{Int}(t_1) \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t dt_1 dt_2 \left[\hat{H}_{Int}(t_1) \hat{H}_{Int}(t_2) \theta(t_1 - t_2) + \hat{H}_{Int}(t_2) \hat{H}_{Int}(t_1) \theta(t_2 - t_1) \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t dt_1 dt_2 \hat{T} \left(\hat{H}_{Int}(t_1) \hat{H}_{Int}(t_2) \right) . \end{aligned} \quad (5.37)$$

Hierbei wurde im zweiten Schritt die Eigenschaft verwendet, dass die θ -Funktion die Integrale auf die jeweils richtigen Grenzen beschränkt, und im letzten Schritt die Definition des Zeitordnungsoperators (5.34). Der Vorfaktor $\frac{1}{2}$ verhindert Doppelzählung und entspricht gerade dem Kehrwert der Zahl aller möglichen Permutationen bzw. aller Zeitordnungen der Hamilton-Operatoren. Die obige Rechnung kann völlig analog für jeden Term der Neumann-Reihe sukzessive durchgeführt werden und führt zu einem kompakten Ausdruck für den Zeitentwicklungsoperator

$$\begin{aligned} \hat{U}(t, t_0) &= \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \hat{H}_{Int}(t_1) \hat{H}_{Int}(t_2) \dots \hat{H}_{Int}(t_n) \\ &= \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^t dt_n \hat{T} \left(\hat{H}_{Int}(t_1) \dots \hat{H}_{Int}(t_n) \right) \\ &= \mathbb{1} + \hat{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^t dt_n \hat{H}_{Int}(t_1) \dots \hat{H}_{Int}(t_n) \\ &= \mathbb{1} + \hat{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \left[\int_{t_0}^t dt' \hat{H}_{Int}(t') \right]^n \\ &\equiv \hat{T} \exp \left[-i \int_{t_0}^t dt' \hat{H}_{Int}(t') \right] . \end{aligned} \quad (5.38)$$

5.5 Die Streumatrix

Die Streumatrix ist für die Quantenfeldtheorie und insbesondere für diese Bachelor-Arbeit eine Größe von zentraler Bedeutung, da sie die Wahrscheinlichkeitsamplitude für den Übergang zwischen zwei Fockraum-Zuständen $|n\rangle \rightarrow |m\rangle$ mit n bzw. m Teilchen unter einer gegebenen Wechselwirkung angibt; sie beschreibt folglich *Zerfalls- und Streuprozesse*. Im Folgenden seien die Anfangszustände mit $|i\rangle$ und Endzustände durch $|f\rangle$ gekennzeichnet. Für die Konstruktion der Streumatrix wird zunächst vereinbart, dass die jeweiligen Zustände im Grenzfall großer Zeiten freie Teilchen beschreiben⁴

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} |\psi(t)\rangle = |i\rangle , \quad (5.39)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\psi(t)\rangle = |f\rangle . \quad (5.40)$$

⁴Dies ist im Falle kurzreichweitiger Wechselwirkungen eine gerechtfertigte Annahme

Wir postulieren nun die Existenz eines Operators \hat{S} , der *Streumatrix*, dessen Matrixelement \hat{S}_{fi} der Übergangsamplitude zwischen festgelegten Anfangs- und Endzuständen entspricht und durch

$$\hat{S}_{fi} = \langle f | \hat{S} | i \rangle \quad (5.41)$$

definiert ist, wobei dieser die gesamte Information über die zeitliche Entwicklung der Zustände enthält. Die explizite Form von \hat{S} gilt es nun zu bestimmen. Die Übergangsamplitude lässt sich ferner durch den Überlapp des Endzustands mit dem zeitentwickelten Anfangszustand nach der Streuung darstellen⁵

$$\hat{S}_{fi} = \lim_{\substack{t_i \rightarrow -\infty \\ t_f \rightarrow +\infty}} \langle f | \hat{U}(t_f, t_i) | i \rangle . \quad (5.42)$$

Die Streumatrix kann durch Vergleich mit (5.41) bzw. mit Hilfe von (5.38) direkt identifiziert

$$\hat{S} = \hat{U}(\infty, -\infty) = \hat{T} \exp \left[-i \int_{t_0}^t dt' \hat{H}_{Int}(t') \right] \quad (5.43)$$

und im Rahmen der Quantenfeldtheorie durch die Hamilton-Dichte ausgedrückt werden, wie sie in Kapitel 3.2 diskutiert wurde

$$\hat{S} = \hat{T} \exp \left[-i \int d^4X \hat{\mathcal{H}}_{Int}(t') \right] . \quad (5.44)$$

6 Effektives Modell

In diesem Kapitel wird im Rahmen der Quantenchromodynamik ein effektives Modell zur Beschreibung von Mesonen, d.h. gebundenen $q\bar{q}$ -Zuständen, im linearen Sigma-Modell mit drei Quark-Flavors (u, d, s) vorgestellt, das es uns erlauben wird die Zerfallskanäle des Tensor- bzw. Pseudoscalar-Glueballs in verschiedene Vektormesonen und Axialvektormesonen zu beschreiben. Hierzu werden wir zwei Wechselwirkungs-Lagrangedichten konstruieren, die sogenannte Nonets einbinden. Da hier ein effektives Modell der QCD konstruiert wird, muss sichergestellt sein, dass dieser Zugang ihre grundlegenden Symmetrien nicht bricht. Daher sollen die QCD-Symmetrien rekapituliert und das Modell auf diese überprüft werden, bevor die Zerfallsbreiten der jeweiligen Glueballs bestimmt werden können.

Als Quellen für dieses Kapitel wurden [5, 8] verwendet.

6.1 Konstruktion der Meson-Nonets

Die Meson-Nonets sind bereits aus [8] bekannt sind, weshalb hier auf die folgenden Symmetriebetrachtungen vorgegriffen wird, um die betrachteten Größen in Anlehnung an die Symmetrien der QCD konstruieren zu können. Zunächst definieren wir eine Meson-Matrix

$$\Phi_{ij} \equiv \sqrt{2} \bar{q}_{j,R} q_{i,L} , \quad (6.1)$$

die rechtshändige Antiquarks und linkshändige Quarks verknüpft, wobei die Indizes $i, j \in \{u, d, s\}$ die Quark-Flavor kennzeichnen. Unter Rechts- bzw. Linkshändigkeit ist dabei das Verhalten unter

⁵Es sollte stets im Hinterkopf behalten werden, dass die eingehenden und ausgehenden Zustände per se keine Sätze von Zuständen desselben Fock-Raumes sind. Allgemein übernimmt der Operator \hat{S} die Rolle eines invertierbaren, unitären Operators, der die Basen ineinander transformiert. Für den vorliegenden Fall ist dieser subtile Punkt jedoch vernachlässigbar.

chiralen Transformationen gemeint. Die chirale Symmetrie der QCD bezieht sich auf die Tatsache, dass sich die Quarkfelder zu einem Flavor q_f über die chiralen Projektionsoperatoren

$$\mathcal{P}_{R,L} = \frac{\mathbb{1} \pm \gamma^5}{2} \quad (6.2)$$

in zwei Anteile zerlegen lassen und getrennt voneinander Symmetrien erfüllen. Um dies zu sehen, müssen zunächst die Eigenschaften des Projektors deutlich gemacht werden. Es gilt

$$\mathcal{P}_R + \mathcal{P}_L = \frac{(\mathbb{1} + \gamma^5) + (\mathbb{1} - \gamma^5)}{2} = \mathbb{1} . \quad (6.3)$$

Und aufgrund der Tatsache, dass es sich bei $\mathcal{P}_{R,L}$ um einen Projektor handelt

$$\mathcal{P}_{R,L}^2 = \frac{(\mathbb{1} \pm \gamma^5)^2}{4} = \frac{\mathbb{1} \pm \gamma^5}{2} = \mathcal{P}_{R,L} , \quad (6.4)$$

wobei die Eigenschaft $\gamma_5^2 = \mathbb{1}$ der fünften Dirac-Matrix verwendet wurde. Und letztendlich

$$\mathcal{P}_R \mathcal{P}_L = 0 . \quad (6.5)$$

Durch die Antivertauschungsrelation der Dirac-Matrizen

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0 \quad (6.6)$$

lässt sich die Wirkung der Projektoren auf die Quark-Felder definieren

$$q_f \stackrel{(6.3)}{=} (\mathcal{P}_R + \mathcal{P}_L) q_f = q_{f,R} + q_{f,L} , \quad (6.7)$$

$$\bar{q}_f \stackrel{(6.3)}{=} \bar{q}_f (\mathcal{P}_L + \mathcal{P}_R) = \bar{q}_{f,R} + \bar{q}_{f,L} . \quad (6.8)$$

Mit diesen Ergebnissen lässt sich die Meson-Matrix (6.1) umschreiben

$$\begin{aligned} \Phi_{ij} &= \sqrt{2} \bar{q}_{j,R} q_{i,L} = \sqrt{2} \bar{q}_j \mathcal{P}_L \mathcal{P}_L q_i \stackrel{(6.4)}{=} \sqrt{2} \bar{q}_j \mathcal{P}_L q_i \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{q}_j q_i - \bar{q}_j \gamma^5 q_i) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{q}_j q_i + i \bar{q}_j i \gamma^5 q_i) \\ &= S_{ij} + i P_{ij} , \end{aligned} \quad (6.9)$$

wobei wir den sogenannten Skalar-Strom S_{ij} und den Pseudoskalar-Strom P_{ij} eingeführt haben

$$S_{ij} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j q_i , \quad P_{ij} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j i \gamma^5 q_i . \quad (6.10)$$

Die Nomenklatur beruht einerseits auf den physikalischen Freiheitsgraden, die die Objekte besitzen (Skalar-), andererseits auf dem Transformationsverhalten unter Parität (Pseudo-), was im weiteren Verlauf noch klar werden wird. Auf die gleiche Weise lassen sich weiterhin Vektor- und Axialvektor-Ströme konstruieren. Dafür wird eine rechtshändige bzw. linkshändige Matrix definiert

$$\begin{aligned} R_{ij}^\mu &\equiv \sqrt{2} \bar{q}_{j,R} \gamma^\mu q_{i,R} \stackrel{(6.6)}{=} \sqrt{2} q_j^\dagger \mathcal{P}_R \gamma^0 \gamma^\mu \mathcal{P}_R q_i \\ &\stackrel{(6.2)}{=} \frac{\sqrt{2}}{4} \left(q_j^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu q_i + q_j^\dagger \gamma^5 \gamma^0 \gamma^\mu q_i + q_j^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^5 q_i + q_j^\dagger \gamma^5 \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^5 q_i \right) \\ &\stackrel{(6.6)}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{q}_j \gamma^\mu q_i - \bar{q}_j \gamma^5 \gamma^\mu q_i) = V_{ij}^\mu - A_{ij}^\mu . \end{aligned} \quad (6.11)$$

Im vierten Schritt wurde verwendet, dass das Quadrat der fünften Dirac-Matrix gerade der Einheitsmatrix im Spinor-Raum entspricht. Für die linkshändige Matrix ergibt sich völlig analog

$$L_{ij}^\mu \equiv \sqrt{2} \bar{q}_{j,L} \gamma^\mu q_{i,L} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{q}_j \gamma^\mu q_i + \bar{q}_j \gamma^5 \gamma^\mu q_i) = V_{ij}^\mu + A_{ij}^\mu . \quad (6.12)$$

In den jeweils letzten Schritten der beiden Rechnungen wurden die Vektor- und Axialvektor-Ströme identifiziert

$$V_{ij}^\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j \gamma^\mu q_i , \quad A_{ij}^\mu \equiv -\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j \gamma^\mu \gamma^5 q_i . \quad (6.13)$$

Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, dass neben den bereits betrachteten Strömen auch ein Pseudovektor-Strom

$$B_{ij}^\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{q}_j \gamma^5 \partial^\mu q_i - (\partial^\mu \bar{q}_j) \gamma^5 q_i) \quad (6.14)$$

definiert werden kann, indem Ableitungen der Quark-Spinoren eingebunden werden. Für die Betrachtung von drei Quark-Flavors können die Ströme aus (6.10), (6.13) und (6.14) offensichtlich als 3×3 -Matrizen im Flavor-Raum dargestellt werden und wir erhalten:

$$S \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{\sigma_N + a_0^0}{\sqrt{2}} & a_0^+ & K_S^+ \\ a_0^- & \frac{\sigma_N - a_0^0}{\sqrt{2}} & K_S^0 \\ K_S^- & \bar{K}_S^0 & \sigma_S \end{pmatrix} , \quad P \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{\eta_N + \pi^0}{\sqrt{2}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & \frac{\eta_N - \pi^0}{\sqrt{2}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & \eta_S \end{pmatrix} , \quad (6.15)$$

$$V^\mu \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{\omega_N^\mu + \rho^{\mu 0}}{\sqrt{2}} & \rho^{\mu+} & K^{\mu*+} \\ \rho^{\mu-} & \frac{\omega_N^\mu - \rho^{\mu 0}}{\sqrt{2}} & K^{\mu*0} \\ K^{\mu*-} & \bar{K}^{\mu*0} & \omega_S^\mu \end{pmatrix} , \quad A^\mu \doteq -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{f_{1N}^\mu + a_1^{\mu 0}}{\sqrt{2}} & a_1^{\mu+} & K_{1,A}^{\mu+} \\ a_1^{\mu-} & \frac{f_{1N}^\mu - a_1^{\mu 0}}{\sqrt{2}} & K_{1,A}^{\mu 0} \\ K_{1,A}^{\mu-} & \bar{K}_{1,A}^{\mu 0} & f_{1S}^\mu \end{pmatrix} , \quad (6.16)$$

$$B_{ij}^\mu \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{f_{1N,B}^\mu + b_1^{\mu 0}}{\sqrt{2}} & b_1^{\mu+} & K_{1,B}^{\mu+} \\ b_1^{\mu-} & \frac{f_{1N,B}^\mu - b_1^{\mu 0}}{\sqrt{2}} & K_{1,B}^{\mu 0} \\ K_{1,B}^{\mu-} & \bar{K}_{1,B}^{\mu 0} & f_{1S,B}^\mu \end{pmatrix} . \quad (6.17)$$

Es können noch einige Zuordnungen zwischen den jeweiligen Mesonen der Nonets und physikalischen Resonanzen bzw. unphysikalischen Feldern vorgenommen werden. So ist im **Skalar-Nonet** $a_0 = a_0(1450)$. Das **Pseudoskalar-Nonet** enthält hingegen die unphysikalischen Felder η_N und η_S , die erst durch eine Mischung mit einem Winkel von etwa $\varphi_\eta \approx -36^\circ$ die physikalischen Teilchen η und η' beschreiben

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_\eta & \sin \varphi_\eta \\ -\sin \varphi_\eta & \cos \varphi_\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_N \\ \eta_S \end{pmatrix} . \quad (6.18)$$

Im Falle des **Vektor-Nonets** ordnen wir einerseits $K^* = K^*(892)$ zu, andererseits tauchen auch hier unphysikalische Felder ω_N und ω_S auf, deren Mischungswinkel allerdings klein genug ist, sodass die Mischung vernachlässigt und direkt $\omega_N \equiv \omega$ bzw. $\omega_S \equiv \Phi$ gewählt werden kann. Für das **Axialvektor-Nonet** machen wir die Zuordnung $a_1 = a_1(1260)$, $f_{1N} = f_1(1285)$ bzw. $f_{1S} = f_1(1420)$. Letztendlich bleibt noch das **Pseudovektor-Nonet**, in dem $b_1 = b_1(1235)$, $f_{1N,B} = h_1(1170)$ und $f_{1S,B} = h_1(1380)$ gewählt werden.

Es sei darauf hingewiesen, dass die Felder $K_{1,A}$ und $K_{1,B}$ keiner Zuordnung unterzogen wurden und somit zunächst unbestimmt bleiben. Es lässt sich zeigen, dass diese Felder erneut unphysikalisch sind und durch Mischung die physikalischen Kaon-Felder $K_1(1270)$ und $K_1(1400)$ beschreiben. Für eine explizite Betrachtung der Mischungseffekte in Kaon-Feldern sei an dieser Stelle auf Kapitel 6.5 verwiesen.

Obwohl die einzelnen Wechselwirkungs-Lagrangedichten im Anschluss untersucht werden, soll zunächst noch das erweiterte Lineare Sigma-Modell für drei Quark-Flavor vorgestellt werden, das die Grundlage dieser Arbeit bildet. Die volle Lagrangedichte des Modells enthält einen vollständig hadronischen Sektor, wobei wir uns hier auf den mesonischen Anteil konzentrieren wollen

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{mes}} = & \text{Tr} [(D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi)] - m_0^2 \text{Tr} [\Phi^\dagger \Phi] - \lambda_1 (\text{Tr} [\Phi^\dagger \Phi])^2 - \lambda_2 \text{Tr} [(\Phi^\dagger \Phi)^2] \\
& - \frac{1}{4} \text{Tr} [(L^{\mu\nu})^2 + (R^{\mu\nu})^2] + \text{Tr} \left[\left(\frac{m_1^2}{2} + \Delta \right) (L^\mu)^2 + (R^\mu)^2 \right] + \text{Tr} [H(\Phi + \Phi^\dagger)] \\
& + c_1 (\det \Phi - \det \Phi^\dagger)^2 + i \frac{g_2}{2} (\text{Tr} \{L_{\mu\nu} [L^\mu, L^\nu]\} + \text{Tr} \{R_{\mu\nu} [R^\mu, R^\nu]\}) \\
& + \frac{h_1}{2} \text{Tr} (\Phi^\dagger \Phi) \text{Tr} [(L^\mu)^2 + (R^\mu)^2] + h_2 \text{Tr} [\Phi^\dagger L_\mu L^\mu \Phi + \Phi R_\mu R^\mu \Phi^\dagger] \\
& + 2 h_3 \text{Tr} [\Phi R_\mu \Phi^\dagger L^\mu] .
\end{aligned} \tag{6.19}$$

Wie bereits eingeführt, bezeichnen Φ , R^μ und L^μ die Meson-Matrix bzw. die rechts- und links-händigen Ströme. Weiterhin wird durch die Größen

$$\begin{aligned}
D^\mu \Phi & \equiv \partial^\mu \Phi - ig_1 (L^\mu \Phi - \Phi R^\mu) - ieA^\mu [T_3, \Phi] , \\
L^{\mu\nu} & \equiv \partial^\mu L^\nu - ieA^\mu [T_3, L^\nu] - (\partial^\nu L^\mu - ieA^\nu [T_3, L^\mu]) , \\
R^{\mu\nu} & \equiv \partial^\mu R^\nu - ieA^\mu [T_3, R^\nu] - (\partial^\nu R^\mu - ieA^\nu [T_3, R^\mu])
\end{aligned}$$

das elektromagnetische Feld A^μ angekoppelt, wobei $T_3 = \lambda_3/2$ den dritten Generator der $SU(3)$, also die entsprechende halbe Gell-Mann-Matrix, bezeichnet. Bei diesen handelt es sich um die kovariante Ableitung und die zu den rechts- bzw. linkshändigen Strömen korrespondierenden Feldstärketensoren. Die Matrix $\Delta = \text{diag}(\delta_N, \delta_N, \delta_S)$, mit $\delta_N \sim m_{u,d}^2$ und $\delta_S \sim m_s^2$, beschreibt die explizite Brechung der chiralen Symmetrie durch die nicht verschwindenden Quarkmassen im Vektor- bzw. Axialvektor-Kanal⁶, während die Brechung im skalaren und pseudoskalaren Sektor ganz analog durch $H = 1/2 \text{diag}(h_{0N}, h_{0N}, \sqrt{2} h_{0S})$ realisiert wird. Die Gleichheit der jeweils ersten beiden Diagonalelemente rührt von der als perfekt angenommenen Isospin-Symmetrie für Up- und Down-Quarks her. Ebenso bemerkenswert ist der Term proportional zu c_1 , der garantiert, dass das Modell die sogenannte $U(1)_A$ -Anomalie, öfter auch als chirale Anomalie bezeichnet, erfüllt, auf die im weiteren Verlauf ebenfalls eingegangen werden wird. Bis auf diese drei Terme besitzt die Lagrangedichte eine vollständige chirale $U(3)_R \times U(3)_L$ -Symmetrie.

6.2 Wechselwirkungs-Lagrangedichten

Bisher wurde lediglich die freie Lagrangedichte des (Pseudo-)Tensor-Glueballs betrachtet. Da allerdings Zerfälle, also Prozesse, die auf einer Wechselwirkung beruhen, studiert werden sollen, müssen wir uns nun damit beschäftigen, wie die freie Lagrangedichte um einen Wechselwirkungsterm erweitert werden kann, der die jeweiligen Zerfälle beschreibt. Bei diesem wird es

⁶An dieser Stelle wird auf die Symmetriebetrachtungen der QCD vorgegriffen, um dem Leser einen Eindruck des Modells zu vermitteln. Die erwähnten Aspekte werden in Kapitel 6.3 ausführlich behandelt.

sich um einen additiven Term handeln, wodurch zu beachten ist, dass die Wechselwirkungs-Lagrangedichte ein vollständig kontrahiertes Objekt sein muss, was sicherstellt, dass die gesamte Lagrangedichte weiterhin wie ein Lorentz-Skalar transformiert. Außerdem soll der Wechselwirkungsterm die wichtigsten Symmetrien der Quantenchromodynamik beinhalten. Wir werden damit beginnen die Wechselwirkungsterme zu beleuchten, um sie in den folgenden Abschnitten ausführlich auf ihre Symmetrieeigenschaften hin zu untersuchen. Um die jeweiligen Glueballs zu unterscheiden, werden sie nach der Notation J^{PC} durch ihren Gesamtdrehimpuls J , Parität P und Ladungskonjugation C charakterisiert. Diese Angaben definieren die Teilchen vollständig, da sie einen direkten Zugang zur Bahndrehimpuls- bzw. Spin-Quantenzahl geben, mit $P = (-1)^{L+S}$, $C = (-1)^{L+S}$

6.2.1 Lagrangedichte für den 2^{++} -Tensor-Glueball

Ein möglicher Wechselwirkungsterm, mit dem wir im Folgenden arbeiten werden, beinhaltet die Kopplung des Tensor-Glueballs $G_{\mu\nu}$ an die rechts- und linkshändigen Matrizen und hat die folgende Form:

$$\mathcal{L}_{int}^{2^{++}} = c_G G_{\mu\nu} \text{Tr} \left[R^\mu R^\nu + L^\mu L^\nu \right], \quad (6.20)$$

wobei c_G die Kopplungskonstante der Lagrangedichte ist, die die Stärke der Wechselwirkung angibt. Dieser Ausdruck ist, wie in Kapitel 6.3 bewiesen wird, einerseits chiral invariant und erfüllt andererseits die CP -Symmetrie. Mit den Definitionen (6.11) bzw. (6.12) lässt sich die Spur in Abhängigkeit der Vektor- und Axialvektor-Ströme ausdrücken

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int}^{2^{++}} &= c_G G_{\mu\nu} \text{Tr} \left[(V^\mu + A^\mu)(V^\nu + A^\nu) + (V^\mu - A^\mu)(V^\nu - A^\nu) \right] \\ &= 2 c_G G_{\mu\nu} \text{Tr} \left[V^\mu V^\nu + A^\mu A^\nu \right]. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Um explizit zu sehen welche Zerfälle dieser Lagrangian beschreibt, muss die Spur ausgewertet werden. Mit (6.16) ergibt sich die Lagrangedichte zu

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int}^{2^{++}} &= c_G G_{\mu\nu} \left[a_1^{\mu 0} a_1^{\nu 0} + a_1^{\mu+} a_1^{\nu-} + a_1^{\mu-} a_1^{\nu+} + f_{1N,A}^\mu f_{1N,A}^\nu + f_{1S,A}^\mu f_{1S,A}^\nu + K_{1,A}^{\mu+} K_{1,A}^{\nu-} + K_{1,A}^{\mu-} K_{1,A}^{\nu+} \right. \\ &\quad + \bar{K}_{1,A}^{\mu 0} K_{1,A}^{\nu 0} + K_{1,A}^{\mu 0} \bar{K}_{1,A}^{\nu 0} + \bar{K}^{\mu*0} K^{\nu*0} + K^{\mu*0} \bar{K}^{\nu*0} + K^{\mu*+} K^{\nu*-} + K^{\mu*-} K^{\nu*+} \\ &\quad \left. + \rho^{\mu 0} \rho^{\nu 0} + \rho^{\mu+} \rho^{\nu-} + \rho^{\mu-} \rho^{\nu+} + \omega_N^\mu \omega_N^\nu + \omega_S^\mu \omega_S^\nu \right]. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Für die spätere Berechnung der Zerfallsbreiten wird es sich als hilfreich erweisen, äquivalente Terme zusammenzufassen. Hierfür wird die Symmetrie des Glueball-Feldes verwendet und in einigen Summanden die Umbenennung $\mu \leftrightarrow \nu$ vorgenommen

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int}^{2^{++}} &= c_G G_{\mu\nu} \left[a_1^{\mu 0} a_1^{\nu 0} + 2 a_1^{\mu+} a_1^{\nu-} + f_{1N,A}^\mu f_{1N,A}^\nu + f_{1S,A}^\mu f_{1S,A}^\nu + K_{1,A}^{\mu+} K_{1,A}^{\nu-} + K_{1,A}^{\mu-} K_{1,A}^{\nu+} \right. \\ &\quad + \bar{K}_{1,A}^{\mu 0} K_{1,A}^{\nu 0} + K_{1,A}^{\mu 0} \bar{K}_{1,A}^{\nu 0} + 2 \bar{K}^{\mu*0} K^{\nu*0} + 2 K^{\mu*+} K^{\nu*-} + \rho^{\mu 0} \rho^{\nu 0} \\ &\quad \left. + 2 \rho^{\mu+} \rho^{\nu-} + \omega_N^\mu \omega_N^\nu + \omega_S^\mu \omega_S^\nu \right]. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Der Kaon-Sektor bleibt zunächst unverändert, da wir uns ihm im weiteren Verlauf getrennt widmen werden.

6.2.2 Lagrangedichte für den 2^{-+} -Pseudotensor-Glueball

Bei der Konstruktion der Wechselwirkungs-Lagrangedichte des Pseudotensor-Glueballs $\Theta_{\mu\nu}$ ergeben sich einige technische Schwierigkeiten, da dieser mit negativer Parität transformiert. Wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, lässt sich diese Eigenschaft durch den Epsilon-Tensor inkorporieren. Die Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L}_{Int}^{2^{-+}} = c_{\Theta} \Theta_{[\mu\nu]\alpha} \text{Tr} \left[\tilde{L}^{\mu\nu} L^{\alpha} + \tilde{R}^{\mu\nu} R^{\alpha} \right], \quad (6.24)$$

wobei folgende Konventionen verwendet wurde:

$$\Theta_{[\mu\nu]\alpha} = \partial_{\mu} \Theta_{\nu\alpha} - \partial_{\nu} \Theta_{\mu\alpha}, \quad (6.25)$$

$$\tilde{L}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} L_{\rho\sigma}. \quad (6.26)$$

Entsprechendes gilt für den dualen Tensor $\tilde{R}^{\mu\nu}$. Weiterhin wurden die rechts- und linkshändigen Feldstärketensoren eingeführt

$$R_{\rho\sigma} = \partial_{\rho} R_{\sigma} - \partial_{\sigma} R_{\rho}, \quad L_{\rho\sigma} = \partial_{\rho} L_{\sigma} - \partial_{\sigma} L_{\rho}. \quad (6.27)$$

Auch diese Lagrangedichte erfüllt die chirale- bzw. CP -Symmetrie (siehe Kapitel 6.3). Mit allen Definitionen lässt sich die Spur erneut durch den Vektor- und Axialvektor-Strom ausdrücken

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Int}^{2^{-+}} &= \frac{1}{2} c_{\Theta} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Theta_{[\mu\nu]\alpha} \text{Tr} \left[(\partial_{\rho} V_{\sigma} + \partial_{\rho} A_{\sigma} - \partial_{\sigma} V_{\rho} - \partial_{\sigma} A_{\rho}) (V^{\alpha} + A^{\alpha}) \right. \\ &\quad \left. + (\partial_{\rho} V_{\sigma} - \partial_{\rho} A_{\sigma} - \partial_{\sigma} V_{\rho} + \partial_{\sigma} A_{\rho}) (V^{\alpha} - A^{\alpha}) \right] \\ &= c_{\Theta} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Theta_{[\mu\nu]\alpha} \text{Tr} \left[(\partial_{\rho} V_{\sigma}) V^{\alpha} - (\partial_{\sigma} V_{\rho}) V^{\alpha} + (\partial_{\rho} A_{\sigma}) A^{\alpha} - (\partial_{\sigma} A_{\rho}) A^{\alpha} \right] \\ &= c_{\Theta} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Theta_{[\mu\nu]\alpha} \text{Tr} \left[V_{\rho\sigma} V^{\alpha} + A_{\rho\sigma} A^{\alpha} \right], \end{aligned} \quad (6.28)$$

mit den Feldstärketensoren zum Vektor- und Axialvektor-Strom

$$V_{\rho\sigma} = \partial_{\rho} V_{\sigma} - \partial_{\sigma} V_{\rho}, \quad A_{\rho\sigma} = \partial_{\rho} A_{\sigma} - \partial_{\sigma} A_{\rho}. \quad (6.29)$$

Nun kann die vollständige Antisymmetrie des ε -Tensors genutzt und seine Wirkung auf $\Theta_{[\mu\nu]\alpha}$ untersucht werden:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Theta_{[\mu\nu]\alpha} &= \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_{\mu} \Theta_{\nu\alpha} - \partial_{\nu} \Theta_{\mu\alpha}) = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_{\mu} \Theta_{\nu\alpha} + \varepsilon^{\nu\mu\rho\sigma} \partial_{\nu} \Theta_{\mu\alpha} \\ &= \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_{\mu} \Theta_{\nu\alpha} + \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_{\mu} \Theta_{\nu\alpha} = 2 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_{\mu} \Theta_{\nu\alpha}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Beim Übergang zur zweiten Zeile darf, wegen der vollständigen Kontraktion der Summationsindizes, im zweiten Summand o.B.d.A. die Umbenennung $\mu \leftrightarrow \nu$ vorgenommen werden. Völlig analog ergibt sich die Wirkung des ε -Tensors auch auf $V_{\rho\sigma}$ bzw. $A_{\rho\sigma}$. Mit diesem Ergebnis kann die Spur ein weiteres Mal explizit ausgewertet werden, um alle möglichen Zerfallskanäle zu bestimmen, die der Lagrangian im Rahmen des Modells beschreibt. Die Lagrangedichte nimmt dann die folgende Form an

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Int}^{2^{-+}} &= 2 c_{\Theta} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_{\mu} \Theta_{\nu\alpha}) \left[(\partial_{\rho} a_{\sigma 1}^{-}) a_1^{\alpha+} + (\partial_{\rho} a_{\sigma 1}^{+}) a_1^{\alpha-} + (\partial_{\rho} a_{\sigma 1}^0) a_1^{\alpha 0} + (\partial_{\rho} f_{\sigma 1 N, A}) f_{1 N, A}^{\alpha} \right. \\ &\quad + (\partial_{\rho} f_{\sigma 1 S, A}) f_{1 S, A}^{\alpha} + (\partial_{\rho} K_{\sigma 1, A}^{-}) K_{1, A}^{\alpha+} + (\partial_{\rho} K_{\sigma 1, A}^{+}) K_{1, A}^{\alpha-} + (\partial_{\rho} K_{\sigma 1, A}^0) \bar{K}_{1, A}^{\alpha 0} \\ &\quad + (\partial_{\rho} \bar{K}_{\sigma 1, A}^0) K_{1, A}^{\alpha 0} + (\partial_{\rho} K_{\sigma}^{*0}) \bar{K}^{\alpha*0} + (\partial_{\rho} \bar{K}_{\sigma}^{*0}) K^{\alpha*0} + (\partial_{\rho} K_{\sigma}^{*-}) K^{\alpha*+} + (\partial_{\rho} K_{\sigma}^{*+}) K^{\alpha*-} \\ &\quad \left. + (\partial_{\rho} \rho_{\sigma}^0) \rho^{\alpha 0} + (\partial_{\rho} \rho_{\sigma}^{-}) \rho^{\alpha+} + (\partial_{\rho} \rho_{\sigma}^{+}) \rho^{\alpha-} + (\partial_{\rho} \omega_{\sigma N}) \omega_N^{\alpha} + (\partial_{\rho} \omega_{\sigma S}) \omega_S^{\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (6.31)$$

6.3 Symmetrien des Modells

Wie bereits angekündigt wird sich dieser Abschnitt intensiv mit den Symmetrien der QCD befassen, um letztendlich die vorgestellten Wechselwirkungs-Lagrangedichten auf diese hin zu überprüfen. Die Quantenchromodynamik ist eine lokale $SU(3)_c$ -Eichtheorie, deren Lagrangian

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_f \bar{q}_f (i\not{D} - m_f) q_f - \frac{1}{2} \text{Tr} [\mathcal{G}_{\mu\nu} \mathcal{G}^{\mu\nu}] \quad (6.32)$$

eine Vielzahl diskreter und kontinuierlicher Symmetrien erfüllt, also invariant unter spezifischen Transformationen ist, deren Form im Folgenden erläutert wird.

6.3.1 $SU(N_c)_c$ -Farbsymmetrie

Die elementare Symmetrie, in deren Hinsicht die Lagrangedichte der QCD konstruiert wurde, ist die Farbsymmetrie $SU(N_c)_c = SU(3)_c$. Wie bereits erwähnt, ist sie die lokale Eichtheorie der QCD und entspricht einer Raum-Zeit-abhängigen, internen Rotation bzw. Mischung der Quarks im Farbraum, in dem sie einen dreidimensionalen Vektor bilden

$$q_f = \begin{pmatrix} q_f^r \\ q_f^g \\ q_f^b \end{pmatrix} \quad ; f = u, d, s, c, t, b . \quad (6.33)$$

Da es sich bei $SU(3)_c$ um eine Lie-Gruppe handelt, lassen sich deren Elemente $U_c(X)$ als Exponentialfunktion darstellen, unter der die Quarkspinoen entsprechend

$$q_f \xrightarrow{SU(3)_c} q'_f = U_c(X) q_f = \exp \left(-i \sum_{j=1}^N \alpha^j(X) t^j \right) q_f , \quad (6.34)$$

$$\bar{q}_f \xrightarrow{SU(3)_c} \bar{q}'_f = \left(U_c(X) q_f \right)^\dagger \gamma^0 = q_f^\dagger U_c^\dagger(X) \gamma^0 = \bar{q}_f U_c^\dagger(X) \quad (6.35)$$

transformieren, mit $N = N_c^2 - 1 = 8$ und den halben Gell-Mann-Matrizen $t^j = \lambda^j/2$. Aufgrund des Confinements, das besagt, dass beobachtbare, physikalische Teilchen stets weiße Zustände, also entweder Farbe-Antifarbe-Zustände sind oder die Mischung aller drei Farben beinhalten, sind auch die Glueballs $G_{\mu\nu}$ bzw. $\Theta_{\mu\nu}$ weiße Zustände. Für diese gilt folglich, per Definition, Invarianz unter lokalen $SU(3)_c$ -Transformationen, weil ein weißer Zustand auch nach Mischung der Farben weiß bleibt. Dies ist ein sehr phänomenologisches Argument, das mit dem vorgestellten Modell rein mathematisch noch nicht verstanden werden kann. Dies beruht darauf, dass wir bisher keinerlei Annahmen über die Substruktur der Glueballs gemacht und damit vernachlässigt haben, dass sie gebundene Gluon-Zustände sind. Um die tiefere Struktur zu beschreiben, müssten Glueball-Ströme in Abhängigkeit der Gluon-Felder konstruiert werden, die die geforderten Eigenschaften aufweisen. So könnten beispielsweise folgende Identifikationen gemacht werden:

$$G_{\mu\nu}^{2^{++}} \hat{=} \text{Tr} [\mathcal{G}_\mu^\rho \mathcal{G}_{\rho\nu}] , \quad (6.36)$$

$$G_{\mu\nu}^{2^{-+}} \hat{=} \text{Tr} [\tilde{\mathcal{G}}_{\mu\rho} \mathcal{G}^\rho{}_\nu] = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\rho\alpha\sigma} \text{Tr} [\mathcal{G}^{\alpha\sigma} \mathcal{G}^\rho{}_\nu] , \quad (6.37)$$

wobei die Spur über den Farbraum auszuwerten ist und $\mathcal{G}^{\mu\nu}$ den aus dem Yang-Mills-Teil der QCD bekannten matrixwertigen Feldstärketensor

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}^{\mu\nu} &\equiv t_a G_a^{\mu\nu} = t_a (\partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu + g f_{abc} A_b^\mu A_c^\nu) \\
&= \partial^\mu (t_a A_a^\nu) - \partial^\nu (t_a A_a^\mu) - ig (i f_{abc} t_a) A_b^\mu A_c^\nu \\
&= \partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial^\nu \mathcal{A}^\mu - ig [t_b, t_c] A_b^\mu A_c^\nu \\
&= \partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial^\nu \mathcal{A}^\mu - ig [\mathcal{A}^\mu, \mathcal{A}^\nu]
\end{aligned} \tag{6.38}$$

bezeichnet [2]. Hierbei wurde die Lie-Algebra $[t_a, t_b] = i f_{abc} t_c$ der Generatoren der $SU(N)$ mit ihren vollständig antisymmetrischen Strukturkonstanten f_{abc} und die Definition des matrixwertigen Eichfeldes $\mathcal{A}^\mu = t_a A_a^\mu$ verwendet. Da das matrixwertige Eichfeld unter lokalen $SU(N)$ -Transformationen in der adjungierten Darstellung

$$\mathcal{A}^\mu \xrightarrow{SU(N)} \mathcal{A}'^\mu = U \mathcal{A}^\mu U^\dagger + \frac{i}{g} U \partial^\mu U^\dagger \tag{6.39}$$

transformiert, nimmt der matrixwertige Feldstärketensor die Form

$$\mathcal{G}^{\mu\nu} \xrightarrow{SU(N)} \mathcal{G}'^{\mu\nu} = U \mathcal{G}^{\mu\nu} U^\dagger \tag{6.40}$$

an. Hierdurch wird sofort ersichtlich, dass die Ströme (6.36) und (6.37) tatsächlich invariant unter $SU(N)$ und damit auch unter $SU(3)_c$ sind. Rein formal müsste selbstverständlich noch gezeigt werden, dass die Ströme die korrekte Parität und Ladungskonjugation aufweisen, jedoch soll dieser kleine Einschub lediglich der näheren Beleuchtung der physikalischen Beschreibung auf mikroskopischer Ebene dienen, während wir nun wieder zu dem Argument zurückkehren, dass die Glueballs als weiße Zustände per se invariant unter $SU(3)_c$ -Transformationen sind. Somit gilt nach (6.34) bzw. (6.35) für das Vektor-Nonet

$$V_{ij}^\mu \xrightarrow{SU(3)_c} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}'_j \gamma^\mu q'_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j U_c^\dagger(X) \gamma^\mu U_c(X) q_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j U_c^\dagger(X) U_c(X) \gamma^\mu q_i = V_{ij}^\mu . \tag{6.41}$$

Im zweiten Schritt kann die Dirac-Matrix mit der Transformationsmatrix vertauscht werden, da diese ausschließlich im Spinor-Raum und jene lediglich im Farbraum wirkt und die jeweils andere nicht beeinflusst. Weiterhin wurde die Unitarität von $U_c(X)$ benutzt. Mit den gleichen Argumenten erhält man

$$\begin{aligned}
A_{ij}^\mu &\xrightarrow{SU(3)_c} -\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}'_j \gamma^\mu \gamma^5 q'_i = -\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j U_c^\dagger(X) \gamma^\mu \gamma^5 U_c(X) q_i \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j U_c^\dagger(X) U_c(X) \gamma^\mu \gamma^5 q_i = A_{ij}^\mu .
\end{aligned} \tag{6.42}$$

Da sowohl die Nonets als auch die Glueballs invariant sind, folgt sofort auch die Invarianz der Lagrangedichten unter lokalen $SU(3)_c$ -Transformationen

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{int}^{2++} &\xrightarrow{SU(3)_c} \mathcal{L}'_{int}{}^{2++} = 2 c_G G'_{\mu\nu} \text{Tr} \left[V'^\mu V'^\nu + A'^\mu A'^\nu \right] \\
&= 2 c_G G_{\mu\nu} \text{Tr} \left[V^\mu V^\nu + A^\mu A^\nu \right] = \mathcal{L}_{int}^{2++} ,
\end{aligned} \tag{6.43}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{int}^{2-+} &\xrightarrow{SU(3)_c} \mathcal{L}'_{int}{}^{2-+} = c_\Theta \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Theta'_{[\mu\nu]\alpha} \text{Tr} \left[V'_{\rho\sigma} V'^\alpha + A'_{\rho\sigma} A'^\alpha \right] \\
&= c_\Theta \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Theta_{[\mu\nu]\alpha} \text{Tr} \left[V_{\rho\sigma} V^\alpha + A_{\rho\sigma} A^\alpha \right] = \mathcal{L}_{int}^{2-+} .
\end{aligned} \tag{6.44}$$

6.3.2 Lorentz-Symmetrie

Wie bereits durch Einstein postuliert, behalten Naturgesetze in allen Inertialsystemen ihre Form und sind somit im Rahmen ihrer kovarianten Formulierung invariant unter Lorentz-Transformationen, d.h. Raum-Zeit-Drehungen. Die Lorentz-Symmetrie ist eine fundamentale Forderung an eine Feldtheorie und muss in unseren effektiven Modellen berücksichtigt werden. Die Quark-Spinoren transformieren unter Lorentz-Transformationen gemäß

$$q(X) \xrightarrow{\text{LT}} q'(X') = S(\Lambda) q(\Lambda^{-1}X) \quad , \quad (6.45)$$

$$\bar{q}(X) \xrightarrow{\text{LT}} \bar{q}'(X') = \bar{q}(\Lambda^{-1}X) S^{-1}(\Lambda) \quad . \quad (6.46)$$

Da die Gruppe aller Lorentz-Transformationen, die Lorentz-Gruppe $O(3,1)$, eine Lie-Gruppe ist, kann die Transformationsmatrix $S(\Lambda)$ wie folgt dargestellt werden:

$$S(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{4} \omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}\right) \quad ; \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad , \quad (6.47)$$

wobei $\omega_{\mu\nu}$ die kontinuierlichen Parameter der Gruppe sind. Mit diesem Ergebnis können nun die Transformationseigenschaften der Nonets untersucht werden. Unter Verwendung der Bedingung $\gamma^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu = S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda)$ folgt für das Vektor-Nonet

$$\begin{aligned} V_{ij}^\mu \xrightarrow{\text{LT}} V'_{ij}{}^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}'_j \gamma^\mu q'_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}(\Lambda^{-1}X) S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda) q(\Lambda^{-1}X) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Lambda^\mu{}_\nu \bar{q}(X') \gamma^\nu q(X') = \Lambda^\mu{}_\nu V'_{ij}{}^\nu(X') \quad . \end{aligned} \quad (6.48)$$

Offensichtlich transformiert es, gemäß vorheriger Behauptung, wie ein Lorentz-Vektor. Entsprechend gilt für das Axialvektor-Nonet

$$\begin{aligned} A_{ij}^\mu \xrightarrow{\text{LT}} A'_{ij}{}^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}'_j \gamma^\mu \gamma^5 q'_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}(\Lambda^{-1}X) S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu \gamma^5 S(\Lambda) q(\Lambda^{-1}X) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}(X') S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu (-1)^2 S(\Lambda) \gamma^5 q(X') \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Lambda^\mu{}_\nu \bar{q}(X') \gamma^\nu \gamma^5 q(X') = \Lambda^\mu{}_\nu A'_{ij}{}^\nu(X') \quad . \end{aligned} \quad (6.49)$$

Der doppelte Vorzeichenwechsel in der zweiten Zeile, kommt durch die Vertauschung von $S(\Lambda)$ mit γ^5 zustande, da in (6.47) gerade zweimal die Antivertauschungsrelation der Gamma-Matrizen $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 0$ verwendet wurde. Zuletzt muss noch das Glueball-Feld berücksichtigt werden. Ein allgemeiner kovarianter Lorentz-Tensor zweiter Stufe, wie ihn $G_{\mu\nu}$ darstellt, transformiert gemäß

$$G'_{\mu\nu} = G_{\alpha\beta} (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu (\Lambda^{-1})^\beta{}_\nu \quad . \quad (6.50)$$

Mit diesen Ergebnissen können nun die Wechselwirkungs-Lagrangedichten auf ihr Transformationsverhalten untersucht werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int}^{2^{++}} \xrightarrow{\text{LT}} \mathcal{L}'_{int}{}^{2^{++}} &= 2 c'_G G'_{\mu\nu} \text{Tr} \left[V'^\mu V'^\nu + A'^\mu A'^\nu \right] \\ &= 2 c_G G_{\alpha\beta} (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu (\Lambda^{-1})^\beta{}_\nu \text{Tr} \left[\Lambda^\mu{}_\rho V^\rho \Lambda^\nu{}_\sigma V^\sigma + \Lambda^\mu{}_\rho A^\rho \Lambda^\nu{}_\sigma A^\sigma \right] \\ &= 2 c_G G_{\alpha\beta} (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu \Lambda^\mu{}_\rho (\Lambda^{-1})^\beta{}_\nu \Lambda^\nu{}_\sigma \text{Tr} \left[V^\rho V^\sigma + A^\rho A^\sigma \right] \\ &= 2 c_G G_{\alpha\beta} \delta^\alpha{}_\rho \delta^\beta{}_\sigma \text{Tr} \left[V^\rho V^\sigma + A^\rho A^\sigma \right] \\ &= 2 c_G G_{\alpha\beta} \text{Tr} \left[V^\alpha V^\beta + A^\alpha A^\beta \right] = \mathcal{L}_{int}^{2^{++}} \quad , \end{aligned} \quad (6.51)$$

wobei in der dritten Zeile $(\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu \Lambda^\mu{}_\rho = \delta^\alpha{}_\rho$ ausgenutzt wurde. Da auch die kovariante Ableitung wie ein Lorentz-Vektor transformiert, wird sofort deutlich, dass (6.25) wie ein Lorentz-Tensor dritter Stufe und die Vektor- bzw. Axialvektor-Feldstärketensoren (6.29) jeweils wie Lorentz-Tensoren zweiter Stufe transformieren. Damit folgt analog zur vorherigen Rechnung für den zweiten Lagrangian

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{int}^{2-+} &\xrightarrow{\text{LT}} \mathcal{L}'_{int}{}^{2-+} = c'_\Theta \varepsilon'^{\mu\nu\rho\sigma} \Theta'_{[\mu\nu]\alpha} \text{Tr} \left[V'_{\rho\sigma} V'^\alpha + A'_{\rho\sigma} A'^\alpha \right] \\
&= c_\Theta \Lambda^\mu{}_{\mu'} \Lambda^\nu{}_{\nu'} \Lambda^\rho{}_{\rho'} \Lambda^\sigma{}_{\sigma'} \varepsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'} \Theta_{[\mu''\nu'']\alpha'} (\Lambda^{-1})^{\mu''}{}_\mu (\Lambda^{-1})^{\nu''}{}_\nu (\Lambda^{-1})^{\alpha'}{}_\alpha \\
&\times \text{Tr} \left[V_{\rho''\sigma''} (\Lambda^{-1})^{\rho''}{}_\rho (\Lambda^{-1})^{\sigma''}{}_\sigma \Lambda^\alpha{}_{\alpha'} V^{\alpha'} + A_{\rho''\sigma''} (\Lambda^{-1})^{\rho''}{}_\rho (\Lambda^{-1})^{\sigma''}{}_\sigma \Lambda^\alpha{}_{\alpha'} A^{\alpha'} \right] \\
&= c_\Theta \delta^{\mu''}{}_{\mu'} \delta^{\nu''}{}_{\nu'} \delta^{\rho''}{}_{\rho'} \delta^{\sigma''}{}_{\sigma'} \delta^{\alpha'}{}_{\alpha''} \varepsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'} \Theta_{[\mu''\nu'']\alpha'} \text{Tr} \left[V_{\rho''\sigma''} V^{\alpha'} + A_{\rho''\sigma''} A^{\alpha'} \right] \\
&= c_\Theta \varepsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'} \Theta_{[\mu'\nu']\alpha'} \text{Tr} \left[V_{\rho'\sigma'} V^{\alpha'} + A_{\rho'\sigma'} A^{\alpha'} \right] = \mathcal{L}_{int}^{2-+} . \tag{6.52}
\end{aligned}$$

6.3.3 Chirale Symmetrie

Eine weitere sehr prominente Symmetrie der QCD-Lagrangedichte ist die sogenannte *chirale Symmetrie*. Wie bereits in Kapitel 6.1 diskutiert, können die Quark-Spinoren durch Anwendung der chiralen Projektoren auf ihren rechts- bzw. linkshändigen Anteil projiziert werden, siehe (6.7) und (6.8). Durch Einsetzen in (6.32) erkennt man, dass die chirale Symmetrie der QCD im Falle nicht verschwindender Quarkmassen durch ebendiese explizit gebrochen wird. Für verschwindende Quarkmassen separiert die Lagrangedichte gerade in je einen rechts- und linkshändigen Anteil. In diesem Fall ist der Lagrangian invariant unter einer globalen $U(N_f)_R \times U(N_f)_L$ -Transformation im Flavor-Raum der Form

$$q_{fR} \longrightarrow q'_{fR} = U_R q_{fR} = \exp \left(-i \sum_{j=0}^N \alpha_R^j t^j \right) q_{fR} , \tag{6.53}$$

$$q_{fL} \longrightarrow q'_{fL} = U_L q_{fL} = \exp \left(-i \sum_{j=0}^N \alpha_L^j t^j \right) q_{fL} , \tag{6.54}$$

wobei t_j die $N = N_f^2$ Generatoren der Gruppe $U(N_f)$ bezeichnet. Da es sich bei der unitären Gruppe ebenfalls um eine Lie-Gruppe handelt, sind die Gruppenparameter $\alpha_{R/L,j}$ kontinuierlich. Durch die chirale Symmetrie können wir nun auch die Bezeichnung der Nonets als Ströme beleuchten. Nach dem Noether-Theorem [2] korrespondiert zu jeder kontinuierlichen Symmetrie eines Systems eine entsprechende Erhaltungsgröße. Im Falle der chiralen Symmetrie lassen sich gerade die rechts- und linkshändigen Ströme (6.11) bzw. (6.12) als Erhaltungsgrößen identifizieren. Die indefinite Parität dieser Ströme lässt sich durch den Wechsel zu den Vektor- und Axialvektor-Strömen

$$V^\mu = \frac{(L^\mu + R^\mu)}{2} , \quad A^\mu = \frac{(L^\mu - R^\mu)}{2} \tag{6.55}$$

umgehen, die eine wohldefinierte Parität besitzen, wie im Folgenden gezeigt wird, und völlig konsistent mit unserer Definition aus Kapitel 6.1 sind. Folglich ist die Gruppe der chiralen Transformationen $U(N_f)_R \times U(N_f)_L$ isomorph zur Produktgruppe der unitären Vektor- und Axialvektor-Transformationen im Flavor-Raum $U(N_f)_V \times U(N_f)_A$, die nun auf den gesamten Quark-Spinor mit beiden Händigkeits-Anteilen wirken. Weiterhin ist aus der Gruppentheorie bekannt, dass die unitäre Gruppe selbst eine Produktgruppe⁷ der sogenannten Kreisgruppe $U(1)_{V/A}$, die letztlich

⁷Streng genommen handelt es sich hierbei allerdings nicht um ein direktes, sondern um ein semidirektes Produkt, da lediglich $SU(N)$ ein Normalteiler von $U(N)$ ist.

Phasentransformationen beinhaltet, und der speziellen unitären Gruppe $SU(N_f)_{V/A}$ auf dem Flavor-Raum ist, also $U(N_f)_V \times U(N_f)_A \equiv U(1)_V \times SU(N_f)_V \times U(1)_A \times SU(N_f)_A$. Die chirale Symmetrie ist jedoch nicht ohne Weiteres erfüllt, da verschiedene Mechanismen zu expliziter bzw. spontaner Symmetriebrechung führen (Eine ausführliche Behandlung der folgenden Effekte findet sich in [8]).

Es lässt sich zeigen, dass die chirale Symmetrie der QCD für nicht verschwindende, entartete Quarkmassen durch ebendiese je explizit zu $U(N_f)_V \times U(N_f)_A \rightarrow U(1)_V \times SU(N_f)_V$ und im Falle nicht verschwindender und nicht entarteter Massen zu $U(N_f)_V \times U(N_f)_A \rightarrow U(1)_V$ gebrochen wird. Die Axialvektor-Symmetrien scheinen zunächst für $m_f = 0$ erfüllt zu sein, doch müssen hierbei zwei weitere Effekte berücksichtigt werden. Die $U(1)_A$ -Symmetrie ist zwar rein klassisch für verschwindende Quarkmassen erfüllt, wird jedoch im Zuge der Quantisierung selbst für $m_f = 0$ durch Quantenfluktuationen

$$\partial_\mu J_A^\mu = \sum_f \partial_\mu (\bar{q}_f \gamma^\mu \gamma^5 q_f) = \frac{g^2 N_f}{8\pi^2} \left(\frac{1}{8} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} G^{a,\mu\nu} G^{a,\rho\sigma} \right) \neq 0 \quad (6.56)$$

gebrochen, was als *chirale Anomalie* bezeichnet wird (vgl. [12]). Weiterhin besitzt die QCD für $m_f = 0$ eine $SU(N_f)_A$ -Symmetrie, die jedoch durch deren Grundzustand spontan gebrochen wird. Die spontane Brechung der chiralen Symmetrie $U(N_f)_V \times U(N_f)_A \rightarrow U(1)_V \times SU(N_f)_V \times U(1)_A$ (für verschwindende Quarkmassen und Vernachlässigung der chiralen Anomalie) sollte nach dem Goldstone-Theorem zum Auftreten von $N_f^2 - 1$ masselosen Goldstone-Bosonen führen. Für den Fall $N_f = 3$, sind dies gerade drei Pionen, vier Kaonen und das η -Meson. Dass die auftretenden Bosonen wider Erwarten dennoch eine experimentell bestätigte Masse besitzen, liegt daran, dass es sich bei ihnen, wegen der expliziten Brechung der chiralen Symmetrie, um Pseudo-Goldstone-Bosonen handelt. Das vorgestellte effektive Modell besitzt eine vollständige chirale Symmetrie, wie nun gezeigt wird.

6.3.3.1 $U(1)_V$ -Symmetrie

Wie auch vorher, können die Elemente der Kreisgruppe durch eine Exponentialfunktion dargestellt werden und nehmen die Form

$$U_V = \exp(-i\alpha_V^0 t^0) \quad (6.57)$$

an, wobei der Generator durch $t^0 = \mathbb{1}_{N_f} / \sqrt{2N_f}$ definiert wird. Aus dieser Darstellung folgt mit (6.53) bzw. (6.54) $\alpha_R^0 = \alpha_L^0 = \alpha_V^0 / 2$ und damit gleichzeitig $U_R = U_L = U_V$. Nach dem Noether-Theorem ist die korrespondierende Erhaltungsgröße gerade die Baryonen-Zahl (vgl. [8]). Für die Untersuchung des Verhaltens der Nonets unter $U(1)_V$ -Transformationen, wird sich die komponentenweise Betrachtung als vorteilhaft erweisen. Der Quark-Spinor transformiert gemäß

$$q \xrightarrow{U(1)_V} q' = U_V q, \quad (6.58)$$

$$\bar{q} \xrightarrow{U(1)_V} \bar{q}' = (U_V q)^\dagger \gamma^0 = q^\dagger U_V^\dagger \gamma^0. \quad (6.59)$$

Somit erhalten wir für das Vektor-Nonet

$$\begin{aligned} V_{ij}^\mu \xrightarrow{U(1)_V} V_{ij}'^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}'_j \gamma^\mu q'_i = \frac{1}{\sqrt{2}} q_l U_{lj}^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu U_{ik} q_k = U_{ik} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_l \gamma^\mu q_k U_{lj}^\dagger \\ &= U_{ik} V_{kl}^\mu U_{lj}^\dagger = (U V^\mu U^\dagger)_{ij} \end{aligned} \quad (6.60)$$

und ganz analog für das Axialvektor-Nonet

$$\begin{aligned} A_{ij}^\mu \xrightarrow{U(1)_V} A'_{ij}{}^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}'_j \gamma^\mu \gamma^5 q'_i = \frac{1}{\sqrt{2}} q_l U_{lj}^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^5 U_{ik} q_k = U_{ik} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_l \gamma^\mu \gamma^5 q_k U_{lj}^\dagger \\ &= U_{ik} A_{kl}^\mu U_{lj}^\dagger = (U A^\mu U^\dagger)_{ij} . \end{aligned} \quad (6.61)$$

Mit diesen Ergebnissen lässt sich nun zeigen, dass die beiden Wechselwirkungs-Lagrangedichten, wie behauptet, invariant unter $U(1)_V$ -Transformationen sind

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int}^{2^{++}} \xrightarrow{U(1)_V} \mathcal{L}'_{int}{}^{2^{++}} &= 2 c_G G_{\mu\nu} \text{Tr} \left[V'^\mu V'^\nu + A'^\mu A'^\nu \right] \\ &= 2 c_G G_{\mu\nu} \text{Tr} \left[U V^\mu U^\dagger U V^\nu U^\dagger + U A^\mu U^\dagger U A^\nu U^\dagger \right] \\ &= 2 c_G G_{\mu\nu} \text{Tr} \left[U^\dagger U V^\mu V^\nu + U^\dagger U A^\mu A^\nu \right] \\ &= 2 c_G G_{\mu\nu} \text{Tr} \left[V^\mu V^\nu + A^\mu A^\nu \right] = \mathcal{L}_{int}^{2^{++}} . \end{aligned} \quad (6.62)$$

Hierbei wurde verwendet, dass lediglich die Quark-Spinoren transformieren, während der Glueball invariant bleibt. Weiterhin wurde in Zeile zwei und drei die Unitarität der Transformationsmatrix bzw. die zyklische Invarianz der Spur ausgenutzt. Offensichtlich ist die $U(1)_V$ -Symmetrie für den Tensor-Glueball sogar lokal, d.h für Parameter mit expliziter Raum-Zeit-Abhängigkeit, erfüllt. Im Gegensatz dazu besitzt die Lagrangedichte für den Pseudotensor-Glueball aufgrund der Feldstärketensoren lediglich eine globale Symmetrie, mit

$$\begin{aligned} V_{\rho\sigma} \xrightarrow{U(1)_V} V'_{\rho\sigma} &= \partial_\rho V'_\sigma - \partial_\sigma V'_\rho = \partial_\rho (U V_\sigma U^\dagger) - \partial_\sigma (U V_\rho U^\dagger) \\ &= U (\partial_\rho V_\sigma - \partial_\sigma V_\rho) U^\dagger = U V_{\rho\sigma} U^\dagger , \end{aligned} \quad (6.63)$$

$$\begin{aligned} A_{\rho\sigma} \xrightarrow{U(1)_V} A'_{\rho\sigma} &= \partial_\rho A'_\sigma - \partial_\sigma A'_\rho = \partial_\rho (U A_\sigma U^\dagger) - \partial_\sigma (U A_\rho U^\dagger) \\ &= U (\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) U^\dagger = U A_{\rho\sigma} U^\dagger . \end{aligned} \quad (6.64)$$

Im Falle einer lokalen Transformation, würden bei den transformierten Feldstärketensoren über die Produktregel zusätzliche Ableitungen der Transformationsmatrix auftauchen, die nicht verschwinden. Folglich ist die Pseudotensor-Glueball-Lagrangedichte global $U(1)_V$ -invariant:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int}^{2^{-+}} \xrightarrow{U(1)_V} \mathcal{L}'_{int}{}^{2^{-+}} &= c_\Theta \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Theta_{[\mu\nu]\alpha} \text{Tr} \left[V'_{\rho\sigma} V'^\alpha + A'_{\rho\sigma} A'^\alpha \right] \\ &= c_\Theta \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Theta_{[\mu\nu]\alpha} \text{Tr} \left[U V_{\rho\sigma} U^\dagger U V^\alpha U^\dagger + U A_{\rho\sigma} U^\dagger U A^\alpha U^\dagger \right] \\ &= c_\Theta \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Theta_{[\mu\nu]\alpha} \text{Tr} \left[U^\dagger U V_{\rho\sigma} V^\alpha + U^\dagger U A_{\rho\sigma} A^\alpha \right] \\ &= c_\Theta \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Theta_{[\mu\nu]\alpha} \text{Tr} \left[V_{\rho\sigma} V^\alpha + A_{\rho\sigma} A^\alpha \right] = \mathcal{L}_{int}^{2^{-+}} . \end{aligned} \quad (6.65)$$

6.3.3.2 $SU(N_f)$ -Symmetrie

Die Elemente der speziellen unitären Gruppe lassen sich durch

$$U_V = \exp(-i \alpha_V^i t^i) \quad (6.66)$$

darstellen, wobei sie gerade $i = 1, \dots, N_f^2 - 1$ Generatoren besitzt. Für drei Quark-Flavor wären dies die Gell-Mann-Matrizen, allerdings soll die folgende Symmetriebetrachtung für eine beliebige Flavor-Anzahl geschehen. Auch hier lässt sich erneut der Zusammenhang zwischen chiralen und vektoriellen Parametern finden $\alpha_R^i = \alpha_L^i = \alpha_V^i/2$ für $i = 1, \dots, N_f^2 - 1$, was gleichermaßen $U_R = U_L = U_V$ impliziert. Das Transformationsverhalten der Quark-Spinoren ist ebenfalls durch (6.58) und (6.59) gegeben. Damit ist sofort klar, dass die Form der Vektor- und Axialvektorströme unter $SU(N_f)_V$ identisch zum vorherigen Fall der $U(1)_V$ -Symmetrie mit (6.60) und (6.61) ist und es folgt ganz analog

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int}^{2^{++}} \xrightarrow{SU(N_f)_V} \mathcal{L}'_{int}{}^{2^{++}} &= 2 c_G G_{\mu\nu} \text{Tr} \left[V'^\mu V'^\nu + A'^\mu A'^\nu \right] \\ &= 2 c_G G_{\mu\nu} \text{Tr} \left[U V^\mu U^\dagger U V^\nu U^\dagger + U A^\mu U^\dagger U A^\nu U^\dagger \right] \\ &= 2 c_G G_{\mu\nu} \text{Tr} \left[U^\dagger U V^\mu V^\nu + U^\dagger U A^\mu A^\nu \right] \\ &= 2 c_G G_{\mu\nu} \text{Tr} \left[V^\mu V^\nu + A^\mu A^\nu \right] = \mathcal{L}_{int}^{2^{++}} . \end{aligned} \quad (6.67)$$

Auch hier wurde sowohl die Unitarität der Transformationsmatrix als auch die zyklische Invarianz der Spur verwendet. Offensichtlich besitzt die Lagrangedichte des Tensor-Glueballs eine lokale $SU(N_f)_V$ -Symmetrie, während sie für den Lagrangian des Pseudotensor-Glueballs, erneut wegen der Ableitungen in den Feldstärketensoren, nur global erfüllt ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int}^{2^{-+}} \xrightarrow{SU(N_f)_V} \mathcal{L}'_{int}{}^{2^{-+}} &= c_\Theta \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Theta_{[\mu\nu]\alpha} \text{Tr} \left[V'_{\rho\sigma} V'^\alpha + A'_{\rho\sigma} A'^\alpha \right] \\ &= c_\Theta \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Theta_{[\mu\nu]\alpha} \text{Tr} \left[U V_{\rho\sigma} U^\dagger U V^\alpha U^\dagger + U A_{\rho\sigma} U^\dagger U A^\alpha U^\dagger \right] \\ &= c_\Theta \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Theta_{[\mu\nu]\alpha} \text{Tr} \left[U^\dagger U V_{\rho\sigma} V^\alpha + U^\dagger U A_{\rho\sigma} A^\alpha \right] \\ &= c_\Theta \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Theta_{[\mu\nu]\alpha} \text{Tr} \left[V_{\rho\sigma} V^\alpha + A_{\rho\sigma} A^\alpha \right] = \mathcal{L}_{int}^{2^{-+}} . \end{aligned} \quad (6.68)$$

6.3.4 Chirale- und $U(N_f)_A$ -Symmetrie

Es lässt sich leicht zeigen, dass beide Lagrangedichten $U(N_f)_A$ -invariant sind. Hierzu betrachten wir beide Ausdrücke in Abhängigkeit von den rechts- und linkshändigen Strömen (6.11) bzw. (6.12). Mit dem Verhalten der Spinoren unter chiralen Transformationen (6.53) und (6.54) erhalten wir

$$\begin{aligned} R_{ij}^\mu &\longrightarrow R'_{ij}{}^\mu = \sqrt{2} \bar{q}'_{j,R} \gamma^\mu q'_{i,R} = \sqrt{2} q_{l,R} U_{lj,R}^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu U_{ik,R} q_{k,R} = U_{ik,R} \sqrt{2} \bar{q}_{l,R} \gamma^\mu q_{k,R} U_{lj,R}^\dagger \\ &= U_{ik,R} R_{kl}^\mu U_{lj,R}^\dagger = \left(U_R R^\mu U_R^\dagger \right)_{ij} \end{aligned} \quad (6.69)$$

und ganz analog

$$L_{ij}^\mu \longrightarrow L'_{ij}{}^\mu = \left(U_L L^\mu U_L^\dagger \right)_{ij} . \quad (6.70)$$

Wegen der Unitarität der Transformationsmatrizen und der zyklischen Invarianz der Spur, gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{int}{}^{2^{++}} &= c_G G_{\mu\nu} \text{Tr} \left[R'^\mu R'^\nu + L'^\mu L'^\nu \right] \\ &= c_G G_{\mu\nu} \text{Tr} \left[U_R R^\mu U_R^\dagger U_R R^\nu U_R^\dagger + U_L L^\mu U_L^\dagger U_L L^\nu U_L^\dagger \right] \\ &= c_G G_{\mu\nu} \text{Tr} \left[U_R^\dagger U_R R^\mu R^\nu + U_L^\dagger U_L L^\mu L^\nu \right] \\ &= c_G G_{\mu\nu} \text{Tr} \left[R^\mu R^\nu + L^\mu L^\nu \right] = \mathcal{L}_{int}^{2^{++}} . \end{aligned} \quad (6.71)$$

Für den Fall des Pseudotensor-Glueballs ist das Transformationsverhalten der Feldstärketensoren identisch zu den entsprechenden Strömen, falls globale Transformationen betrachtet werden

$$\begin{aligned} R_{\rho\sigma} &\longrightarrow R'_{\rho\sigma} = \partial_\rho R'_\sigma - \partial_\sigma R'_\rho = \partial_\rho (U R_\sigma U^\dagger) - \partial_\sigma (U R_\rho U^\dagger) \\ &= U (\partial_\rho R_\sigma - \partial_\sigma R_\rho) U^\dagger = U R_{\rho\sigma} U^\dagger , \end{aligned} \quad (6.72)$$

$$\begin{aligned} L_{\rho\sigma} &\longrightarrow L'_{\rho\sigma} = \partial_\rho L'_\sigma - \partial_\sigma L'_\rho = \partial_\rho (U L_\sigma U^\dagger) - \partial_\sigma (U L_\rho U^\dagger) \\ &= U (\partial_\rho L_\sigma - \partial_\sigma L_\rho) U^\dagger = U L_{\rho\sigma} U^\dagger , \end{aligned} \quad (6.73)$$

wodurch, unter Verwendung derselben Eigenschaften, die bereits in der vorherigen Rechnung verwendet wurden, folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{Int}{}^{2^-+} &= c_\Theta \Theta_{[\mu\nu]\alpha} \text{Tr} \left[\tilde{L}'^{\mu\nu} L'^\alpha + \tilde{R}'^{\mu\nu} R'^\alpha \right] \\ &= c_\Theta \Theta_{[\mu\nu]\alpha} \text{Tr} \left[U_L \tilde{L}^{\mu\nu} U_L^\dagger U_L L^\alpha U_L^\dagger + U_R \tilde{R}^{\mu\nu} U_R^\dagger U_R R^\alpha U_R^\dagger \right] \\ &= c_\Theta \Theta_{[\mu\nu]\alpha} \text{Tr} \left[U_L^\dagger U_L \tilde{L}^{\mu\nu} L^\alpha + U_R^\dagger U_R \tilde{R}^{\mu\nu} R^\alpha \right] \\ &= c_\Theta \Theta_{[\mu\nu]\alpha} \text{Tr} \left[\tilde{L}^{\mu\nu} L^\alpha + \tilde{R}^{\mu\nu} R^\alpha \right] = \mathcal{L}_{Int}{}^{2^-+} . \end{aligned} \quad (6.74)$$

Offensichtlich sind beide Lagrangedichten vollständig chiral invariant und besitzen damit, wie behauptet, automatisch die axiale $U(N_f)_A = U(1)_A \times SU(N_f)_A$ -Symmetrie.

6.3.5 CP-Symmetrie

Bisher wurden ausschließlich Symmetrien betrachtet, die durch kontinuierliche Lie-Gruppen beschrieben werden, allerdings besitzt die Quantenchromodynamik neben diesen auch eine Reihe diskreter Symmetrien, deren prominenteste Vertreter im Folgenden vorgestellt werden. Nach dem berühmten CPT-Theorem (C-Ladungskonjugation, P-Parität, T-Zeitumkehr) sind physikalische Prozesse invariant unter Vertauschung von Teilchen mit Antiteilchen, Raumspiegelung und gleichzeitiger Zeitumkehr. Da nun noch gezeigt werden muss, dass die vorgestellten Lagrangedichten die geforderten Transformationsverhalten unter Parität und Ladungskonjugation aufweisen, werden wir uns in diesem Kapitel auf CP-Transformationen beschränken.

6.3.5.1 Parität

Ein wichtiger Aspekt, der bei Raumspiegelungen berücksichtigt werden muss, ist, dass verschiedene Teilchenarten eine inhärente Eigenschaft besitzen, die als intrinsische Parität $\eta_p = \pm 1$ bezeichnet wird. Da Quarks per Definition eine positive intrinsische Parität besitzen, verhalten sie sich unter Raumspiegelung wie folgt:

$$q(t, \vec{x}) \xrightarrow{P} q'(t, \vec{x}) = \gamma^0 q(t, -\vec{x}) , \quad (6.75)$$

$$\bar{q}(t, \vec{x}) \xrightarrow{P} \bar{q}'(t, \vec{x}) = \bar{q}(t, -\vec{x}) \gamma^0 . \quad (6.76)$$

Wie üblich, werden zunächst die Nonets näher betrachtet. Es gilt

$$V_{ij}^\mu \xrightarrow{P} V'_{ij}{}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j(t, -\vec{x}) \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 q_i(t, -\vec{x}) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j(X') \gamma^0 q_i(X') = V_{ij}^0(X') & \text{für } \mu = 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j(X') \gamma^i q_i(X') = -V_{ij}^i(X') & \text{für } \mu = i \end{cases} . \quad (6.77)$$

Die Fallunterscheidung beruht dabei auf der Dirac-Algebra, da γ^0 trivialerweise mit sich selbst kommutiert, während sie mit allen anderen Gamma-Matrizen antivertauscht. Weiterhin wurde die verkürzende Schreibweise $X' = (t, -\vec{x})$ verwendet. Entsprechend gilt für den Axialvektorstrom

$$\begin{aligned} A_{ij}^\mu \xrightarrow{P} A_{ij}'^\mu &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j(t, -\vec{x}) \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^5 \gamma^0 q_i(t, -\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j(X') \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \gamma^5 q_i(X') \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j(X') \gamma^0 \gamma^5 q_i(X') = -A_{ij}^0(X') & \text{für } \mu = 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j(X') \gamma^i \gamma^5 q_i(X') = A_{ij}^i(X') & \text{für } \mu = i \end{cases}. \end{aligned} \quad (6.78)$$

Zusätzlich wurde im zweiten Schritt die Antivertauschungsrelation der fünften Dirac-Matrix verwendet. Wie es für einen Axialvektor zu erwarten ist, bleiben seine räumlichen Komponenten

$J^{PC} = 2^{++}$	$J^{PC} = 2^{-+}$
$G_{00} \longrightarrow +G_{00}$	$\Theta_{00} \longrightarrow -\Theta_{00}$
$G_{0i} \longrightarrow -G_{0i}$	$\Theta_{0i} \longrightarrow +\Theta_{0i}$
$G_{i0} \longrightarrow -G_{i0}$	$\Theta_{i0} \longrightarrow +\Theta_{i0}$
$G_{ij} \longrightarrow +G_{ij}$	$\Theta_{ij} \longrightarrow -\Theta_{ij}$

Tabelle 1: Transformationsverhalten der Glueball-Felder unter Parität

unter Paritätstransformationen invariant. Bevor die Lagrangedichten untersucht werden können, müssen zunächst die Paritätseigenschaften der Glueballs geklärt werden. Per Definition gelten die Eigenschaften, die in Tabelle 1 aufgelistet sind. Somit kann nun gezeigt werden, dass die Lagrangedichten des effektiven Modells invariant unter Parität sind:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int}^{2^{++}} \xrightarrow{P} \mathcal{L}'_{int}{}^{2^{++}} &= 2 c_G G'_{\mu\nu} \text{Tr} \left[V'^\mu V'^\nu + A'^\mu A'^\nu \right] \\ &= 2 c_G \left(G'_{00} \text{Tr} \left[V'^0 V'^0 + A'^0 A'^0 \right] + G'_{0i} \text{Tr} \left[V'^0 V'^i + A'^0 A'^i \right] \right. \\ &\quad \left. + G'_{i0} \text{Tr} \left[V'^i V'^0 + A'^i A'^0 \right] + G'_{ij} \text{Tr} \left[V'^i V'^j + A'^i A'^j \right] \right) \\ &= 2 c_G \left(G_{00} \text{Tr} \left[V^0 V^0 + (-1)^2 A^0 A^0 \right] - G_{0i} \text{Tr} \left[-V^0 V^i - A^0 A^i \right] \right. \\ &\quad \left. - G_{i0} \text{Tr} \left[-V^i V^0 - A^i A^0 \right] + G_{ij} \text{Tr} \left[(-1)^2 V^i V^j + A^i A^j \right] \right) \\ &= 2 c_G G_{\mu\nu} \text{Tr} \left[V^\mu V^\nu + A^\mu A^\nu \right] = \mathcal{L}_{int}^{2^{++}}. \end{aligned} \quad (6.79)$$

Für den Fall des Pseudotensor-Glueballs erweist es sich als sinnvoll zunächst die Feldstärketensoren zu betrachten, wobei die Raumkomponenten des 4-Gradienten unter Paritätstransformationen ein zusätzliches Minus liefern:

$$\begin{aligned} V_{\rho\sigma} \xrightarrow{P} V'_{\rho\sigma} &= \partial'_\rho V'_\sigma - \partial'_\sigma V'_\rho = (-1)^{(\rho)} \partial_\rho (-1)^{(\sigma)} V_\sigma - (-1)^{(\sigma)} \partial_\sigma (-1)^{(\rho)} V_\rho \\ &= (-1)^{(\rho)} (-1)^{(\sigma)} V_{\rho\sigma}, \end{aligned} \quad (6.80)$$

$$\begin{aligned}
A_{\rho\sigma} \xrightarrow{P} A'_{\rho\sigma} &= \partial'_\rho A'_\sigma - \partial'_\sigma A'_\rho = (-1)^{(\rho)} \partial_\rho (-) (-1)^{(\sigma)} A_\sigma - (-1)^{(\sigma)} \partial_\sigma (-) (-1)^{(\rho)} A_\rho \\
&= (-) (-1)^{(\rho)} (-1)^{(\sigma)} A_{\rho\sigma} .
\end{aligned} \tag{6.81}$$

Die Schreibweise $(-1)^{(\mu)}$ ist dabei reine Notation und fasst, wie beispielsweise an (6.77) bzw. (6.78) überprüft werden kann, die Fallunterscheidung zwischen Zeit- und Raumkomponenten kompakt zusammen. Es gilt $(-1)^{(\mu)} = 1$, falls $\mu = 0$ und $(-1)^{(\mu)} = -1$ für $\mu = 1, 2, 3$. Weiterhin hat der Epsilon-Tensor folgende Wirkung auf die Feldstärketensoren:

$$\varepsilon^{0ijk} V_{jk} = \tilde{V}^{0i} = -\tilde{V}^{i0} \xrightarrow{P} \varepsilon^{0ijk} V'_{jk} \stackrel{(6.80)}{=} -\tilde{V}^{i0} = \tilde{V}^{0i} , \tag{6.82}$$

$$\varepsilon^{ij0k} V_{0k} = \tilde{V}^{ij} = -\tilde{V}^{ji} \xrightarrow{P} \varepsilon^{ij0k} V'_{0k} \stackrel{(6.80)}{=} \tilde{V}^{ji} = -\tilde{V}^{ij} , \tag{6.83}$$

$$\varepsilon^{0ijk} A_{jk} = \tilde{A}^{0i} = -\tilde{A}^{i0} \xrightarrow{P} \varepsilon^{0ijk} A'_{jk} \stackrel{(6.81)}{=} \tilde{A}^{i0} = -\tilde{A}^{0i} , \tag{6.84}$$

$$\varepsilon^{ij0k} A_{0k} = \tilde{A}^{ij} = -\tilde{A}^{ji} \xrightarrow{P} \varepsilon^{ij0k} A'_{0k} \stackrel{(6.81)}{=} -\tilde{A}^{ji} = \tilde{A}^{ij} . \tag{6.85}$$

Die übrigen Komponenten verschwinden wegen $\varepsilon^{\mu\mu\rho\sigma} = 0$. Mit der eingeführten Notation lässt sich auch dieses Ergebnis sehr kompakt als

$$\tilde{V}^{\mu\nu} \xrightarrow{P} \tilde{V}'^{\mu\nu} = -(-1)^{(\mu)} (-1)^{(\nu)} \tilde{V}^{\mu\nu} , \tag{6.86}$$

$$\tilde{A}^{\mu\nu} \xrightarrow{P} \tilde{A}'^{\mu\nu} = (-1)^{(\mu)} (-1)^{(\nu)} \tilde{A}^{\mu\nu} \tag{6.87}$$

schreiben. Zuletzt muss noch das in (6.25) definierte Objekt

$$\begin{aligned}
\Theta_{[\mu\nu]\alpha} \xrightarrow{P} \Theta'_{[\mu\nu]\alpha} &= \partial'_\mu \Theta'_{\nu\alpha} - \partial'_\nu \Theta'_{\mu\alpha} \\
&\stackrel{\text{Tab. 1}}{=} (-1)^{(\mu)} \partial_\mu (-) (-1)^{(\nu)} (-1)^{(\alpha)} \Theta_{\nu\alpha} - (-1)^{(\nu)} \partial_\nu (-) (-1)^{(\mu)} (-1)^{(\alpha)} \Theta_{\mu\alpha} \\
&= -(-1)^{(\mu)} (-1)^{(\nu)} (-1)^{(\alpha)} \Theta_{[\mu\nu]\alpha}
\end{aligned} \tag{6.88}$$

untersucht werden, bevor letztendlich gezeigt werden kann, dass die Lagrangedichte des Pseudotensor-Glueballs invariant unter Paritätstransformationen ist:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{int}^{2^{-+}} \xrightarrow{P} \mathcal{L}'_{int}{}^{2^{-+}} &= c_\Theta \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Theta'_{[\mu\nu]\alpha} \text{Tr} \left[V'_{\rho\sigma} V'^{\alpha} + A'_{\rho\sigma} A'^{\alpha} \right] \\
&= c_\Theta \Theta'_{[\mu\nu]\alpha} \text{Tr} \left[\tilde{V}'^{\mu\nu} V'^{\alpha} + \tilde{A}'^{\mu\nu} A'^{\alpha} \right] \\
&= c_\Theta (-) (-1)^{(\mu)} (-1)^{(\nu)} (-1)^{(\alpha)} \Theta_{[\mu\nu]\alpha} \text{Tr} \left[(-) (-1)^{(\mu)} (-1)^{(\nu)} \tilde{V}^{\mu\nu} (-1)^{(\alpha)} V^\alpha \right. \\
&\quad \left. + (-1)^{(\mu)} (-1)^{(\nu)} \tilde{A}^{\mu\nu} (-) (-1)^{(\alpha)} A^\alpha \right] \\
&= c_\Theta (-)^2 \left((-1)^{(\mu)} \right)^2 \left((-1)^{(\nu)} \right)^2 \left((-1)^{(\alpha)} \right)^2 \Theta_{[\mu\nu]\alpha} \text{Tr} \left[\tilde{V}^{\mu\nu} V^\alpha + \tilde{A}^{\mu\nu} A^\alpha \right] \\
&= c_\Theta \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Theta_{[\mu\nu]\alpha} \text{Tr} \left[V_{\rho\sigma} V^\alpha + A_{\rho\sigma} A^\alpha \right] = \mathcal{L}_{int}^{2^{-+}} .
\end{aligned} \tag{6.89}$$

6.3.5.2 Ladungskonjugation

Die Ladungskonjugation ist die letzte Symmetrie, auf die das Modell untersucht werden soll. Hierunter versteht man den Austausch zwischen Teilchen und Antiteilchen, unter dem sich die Quark-Spinoren gemäß

$$q(X) \xrightarrow{C} q'(X) = -i\gamma^0 \gamma^2 \bar{q}^t(X) = C \bar{q}^t(X) , \tag{6.90}$$

$$\bar{q}(X) \xrightarrow{C} \bar{q}'(X) = -q^t(X) i\gamma^0 \gamma^2 = q^t(X) C . \tag{6.91}$$

verhalten. Es lässt sich durch Anwendung der Vertauschungsrelation für die Dirac-Matrizen zeigen, dass die Matrix C unitär ist $C^\dagger = C^{-1} = -C$. Weiterhin erfüllen die Gamma-Matrizen die Relation $C\gamma^\mu C^\dagger = -(\gamma^\mu)^t$, welche bei der Transformation der Nonets benötigt wird:⁸

$$\begin{aligned} V_{ij}^\mu &\xrightarrow{C} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}'_j \gamma^\mu q'_i = \frac{1}{\sqrt{2}} q_j^t C \gamma^\mu C \bar{q}_i^t = -\frac{1}{\sqrt{2}} q_j^t C \gamma^\mu C^\dagger \bar{q}_i^t = \frac{1}{\sqrt{2}} q_j^t (\gamma^\mu)^t \bar{q}_i^t \\ &= -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_i \gamma^\mu q_j \right)^t = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j \gamma^\mu q_i \right)^{tT} = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j \gamma^\mu q_i \right)^T = -(V_{ij}^\mu)^T . \end{aligned} \quad (6.92)$$

Das negative Vorzeichen in der zweiten Zeile ist der fermionischen Natur der Quarks zu verdanken und kommt durch die Grassmann-Wertigkeit der Quark-Spinoren bei Vertauschung zustande. Weiterhin muss beachtet werden, dass die Transposition „t“ im vorletzten Schritt vernachlässigt werden kann, da $\bar{q}_j \gamma^\mu q_i = \bar{q}_{j\alpha} \gamma^\mu_{\alpha\beta} q_{i\beta}$ im Spinor-Raum vollständig kontrahiert ist und einen Skalar bildet, der identisch mit seinem Transponierten ist. Unter Verwendung der Kommutatorrelation der fünften Dirac-Matrix und der Tatsache, dass γ^5 symmetrisch ist, ergibt sich die Rechnung für das Axialvektor-Nonet ganz analog

$$\begin{aligned} A_{ij}^\mu &\xrightarrow{C} -\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}'_j \gamma^\mu \gamma^5 q'_i = -\frac{1}{\sqrt{2}} q_j^t C \gamma^\mu \gamma^5 C \bar{q}_i^t = \frac{1}{\sqrt{2}} q_j^t C \gamma^\mu C^\dagger \gamma^5 \bar{q}_i^t = -\frac{1}{\sqrt{2}} q_j^t (\gamma^\mu)^t (\gamma^5)^t \bar{q}_i^t \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_i \gamma^5 \gamma^\mu q_j \right)^t = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_i \gamma^\mu \gamma^5 q_j \right)^t = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j \gamma^\mu \gamma^5 q_i \right)^{tT} = (A_{ij}^\mu)^T . \end{aligned} \quad (6.93)$$

Da beide Glueballs ($J^{PC} = 2^{++}$ und $J^{PC} = 2^{-+}$) per Konstruktion positiv unter Ladungskonjugationen transformieren, erhält man für den ersten Wechselwirkungsterm

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int}^{2^{++}} &\xrightarrow{C} \mathcal{L}'_{int}{}^{2^{++}} = 2c_G G'_{\mu\nu} \text{Tr} \left[V'^\mu V'^\nu + A'^\mu A'^\nu \right] \\ &= 2c_G G_{\mu\nu} \text{Tr} \left[(-1)^2 (V^\mu)^T (V^\nu)^T + (A^\mu)^T (A^\nu)^T \right] \\ &= 2c_G G_{\mu\nu} \text{Tr} \left[(V^\nu V^\mu)^T + (A^\nu A^\mu)^T \right] \\ &= 2c_G G_{\mu\nu} \text{Tr} \left[V^\nu V^\mu + A^\nu A^\mu \right] \\ &= 2c_G G_{\mu\nu} \text{Tr} \left[V^\mu V^\nu + A^\mu A^\nu \right] = \mathcal{L}_{int}^{2^{++}} . \end{aligned} \quad (6.94)$$

Im dritten Schritt wurde die Eigenschaft $\text{Tr} [O^T] = \text{Tr} [O]$ und zuletzt die zyklische Invarianz der Spur verwendet. Der Lagrangian ist folglich, wie gefordert, invariant unter Ladungskonjugation. Dies lässt sich gleichermaßen auch für den zweiten Wechselwirkungsterm zeigen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int}^{2^{-+}} &\xrightarrow{P} \mathcal{L}'_{int}{}^{2^{-+}} = c_\Theta \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Theta'_{[\mu\nu]\alpha} \text{Tr} \left[V'_{\rho\sigma} V'^\alpha + A'_{\rho\sigma} A'^\alpha \right] \\ &= c_\Theta \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Theta'_{[\mu\nu]\alpha} \text{Tr} \left[(\partial_\rho V'_\sigma - \partial_\sigma V'_\rho) V'^\alpha + (\partial_\rho A'_\sigma - \partial_\sigma A'_\rho) A'^\alpha \right] \end{aligned}$$

⁸Der Übersichtlichkeit halber wird zur Kennzeichnung der Transposition mit Klein- und Großbuchstaben gearbeitet, wobei „t“ die Transposition im Spinor-Raum kennzeichnet, während sich „T“ auf den Flavor-Raum bezieht.

$$\begin{aligned}
&= c_\Theta \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Theta_{[\mu\nu]\alpha} \text{Tr} \left[(-)^2 (\partial_\rho V_\sigma^T) (V^\alpha)^T - (-)^2 (\partial_\sigma V_\rho^T) (V^\alpha)^T \right. \\
&\quad \left. + (\partial_\rho A_\sigma^T) (A^\alpha)^T - (\partial_\sigma A_\rho^T) (A^\alpha)^T \right] \\
&= c_\Theta \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Theta_{[\mu\nu]\alpha} \text{Tr} \left[(V^\alpha (\partial_\rho V_\sigma))^T - (V^\alpha (\partial_\sigma V_\rho))^T \right. \\
&\quad \left. + (A^\alpha (\partial_\rho A_\sigma))^T - (A^\alpha (\partial_\sigma A_\rho))^T \right] \\
&= c_\Theta \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Theta_{[\mu\nu]\alpha} \text{Tr} \left[V^\alpha (\partial_\rho V_\sigma) - V^\alpha (\partial_\sigma V_\rho) + A^\alpha (\partial_\rho A_\sigma) - A^\alpha (\partial_\sigma A_\rho) \right] \\
&= c_\Theta \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Theta_{[\mu\nu]\alpha} \text{Tr} \left[(\partial_\rho V_\sigma) V^\alpha - (\partial_\sigma V_\rho) V^\alpha + (\partial_\rho A_\sigma) A^\alpha - (\partial_\sigma A_\rho) A^\alpha \right] \\
&= c_\Theta \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Theta_{[\mu\nu]\alpha} \text{Tr} \left[V_{\rho\sigma} V^\alpha + A_{\rho\sigma} A^\alpha \right] = \mathcal{L}_{int}^{2^{-+}} . \tag{6.95}
\end{aligned}$$

Abschließend sei noch die Nomenklatur zu den jeweiligen J^{PC} -Zuständen geklärt. Teilchen und damit auch Mesonen bezeichnen wir als Skalare $J^{PC} = 0^{++}$, Pseudoskalare $J^{PC} = 0^{-+}$, Vektoren $J^{PC} = 1^{--}$, Pseudovektoren $J^{PC} = 1^{+-}$ und $J^{PC} = 1^{++}$, Tensoren $J^{PC} = 2^{++}$, Pseudotensoren $J^{PC} = 2^{-+}$ etc.

6.4 Berechnung der Zerfallsbreiten

Effektive Theorien, wie die hier vorgestellte, haben das grundsätzliche Interesse phänomenologische Aussagen über physikalische Prozesse zu liefern, die experimentell verifizierbar bzw. falsifizierbar sind. Hierzu benötigen wir Größen, die die Übersetzung einer Theorie in experimentell zugängliche Observablen ermöglichen. Die zentrale Größe dieser Arbeit ist die sogenannte Zerfallsbreite Γ , welche gemäß $\Gamma = \tau^{-1}$ umgekehrt proportional zur Lebensdauer eines Zustands ist und somit den Zerfall vollständig charakterisiert.

Für die Bestimmung der Zerfallsbreiten existiert ein effektiver Formalismus, der die Grundlage aller weiteren Berechnungen sein wird, jedoch soll nachfolgend eine kurze Motivation der Herleitung gegeben werden. Die Information über die zeitliche Entwicklung eines Quantensystems unter Einfluss einer Wechselwirkung wird durch die in Kap. 5.5 vorgestellte Streumatrix vermittelt. Daher wird die Aufgabe sein, das Betragsquadrat des Streumatrixelements

$$|\hat{S}_{fi}|^2 = |\langle f | \hat{S} | i \rangle|^2 \tag{6.96}$$

zu bestimmen. Hierbei wird der Überlapp der entsprechenden Fockraum-Zustände mit der Streumatrix betrachtet, die durch die Erzeuger und Vernichter aus dem Vakuum generiert werden können. Die Feldoperatoren des Tensor- und Proca-Feldes [1] lauten

$$\hat{G}_{\mu\nu}(X) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k} \sum_{\lambda=1}^5 \varepsilon_{\mu\nu}(\lambda, \vec{k}) \left(\hat{a}^{(\lambda)}(\vec{k}) e^{-iK \cdot X} + \hat{a}^{(\lambda)\dagger}(\vec{k}) e^{iK \cdot X} \right) , \tag{6.97}$$

$$\hat{V}_1^\mu(X) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2E_{k_1}} \sum_{\lambda_1=1}^3 \varepsilon^\mu(\lambda_1, \vec{k}_1) \left(\hat{b}^{(\lambda_1)}(\vec{k}_1) e^{-iK_1 \cdot X} + \hat{b}^{(\lambda_1)\dagger}(\vec{k}_1) e^{iK_1 \cdot X} \right) , \tag{6.98}$$

$$\hat{V}_2^\mu(X) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2E_{k_2}} \sum_{\lambda_2=1}^3 \varepsilon^\mu(\lambda_2, \vec{k}_2) \left(\hat{c}^{(\lambda_2)}(\vec{k}_2) e^{-iK_2 \cdot X} + \hat{c}^{(\lambda_2)\dagger}(\vec{k}_2) e^{iK_2 \cdot X} \right) . \tag{6.99}$$

Damit lassen sich die Anfangs- und Endzustände am Beispiel des Tensor Glueballs wie folgt definieren:

$$|i\rangle = \sqrt{\frac{1}{2E_k V}} \hat{a}^{(\lambda)\dagger}(\vec{k}) |0\rangle, \quad |f\rangle = \sqrt{\frac{1}{2E_{k_1} 2E_{k_2} V^2}} \hat{c}^{(\lambda_2)\dagger}(\vec{k}_2) \hat{b}^{(\lambda_1)\dagger}(\vec{k}_1) |0\rangle. \quad (6.100)$$

Die Vorfaktoren garantieren, dass die Zustände entsprechend $\langle i|i\rangle = \langle f|f\rangle = 1$ normiert sind. Für hinreichend kleine Kopplungskonstanten kann die Streumatrix in erster Ordnung entwickelt werden. Der Wechselwirkungsanteil lautet dann

$$|\langle f|\hat{S}^{(1)}|i\rangle|^2 = \left| \langle f| -i \int d^4X \hat{T}(\mathcal{H}_{\text{int}}) |i\rangle \right|^2, \quad (6.101)$$

wobei sich die Hamiltondichte ganz allgemein aus der Legendre-Transformation der Lagrange-dichte

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \pi \partial_0 \phi - \mathcal{L}_{\text{int}}, \quad (6.102)$$

mit dem kanonisch konjugierten Feld

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{int}}}{\partial(\partial_0 \phi)}, \quad (6.103)$$

ergibt. Die Zerfallsbreite ergibt sich letztendlich durch

$$\int \frac{d^3\vec{k}_1 d^3\vec{k}_2}{(2\pi)^6} \frac{V^2}{t} |\langle f|\hat{S}^{(1)}|i\rangle|^2 = \Gamma_{G \rightarrow V_1 V_2}. \quad (6.104)$$

Für den allgemeinen Fall eines Bosons mit 4-Impuls K bzw. Masse M_0 , das in n Teilchen mit 4-Impulsen K_f , $f = 1, 2, \dots, n$ zerfällt, ist die differentielle Zerfallsbreite im Ruhesystem des Ausgangsteilchens bereits bekannt [11] und nimmt die Form

$$d\Gamma = \frac{1}{2M_0} \left(\prod_f \frac{d^3\vec{k}_f}{(2\pi)^3 2E_f} \right) |i\mathcal{M}_{M_0 \rightarrow \{K_f\}}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_f K - K_f \right) \quad (6.105)$$

an. Hierbei erkennt man das aus der Quantisierung bekannte Lorentz-invariante Integrationsmaß für jeden Ausgangskanal wieder, während die δ -Funktion die Impulserhaltung garantiert. Die physikalische Information des Zerfalls ist im Betragsquadrat der invarianten Zerfallsamplitude $|i\mathcal{M}_{M_0 \rightarrow \{K_f\}}|^2$ enthalten und ergibt sich aus der Übersetzung der korrespondierenden Feynman-Diagramme.

Da, wie bereits erwähnt, die folgenden Rechnungen im Ruhesystem des Glueballs durchgeführt werden, müssen zunächst die Grundprinzipien der Zerfallskinematik geklärt werden. Betrachten wir die 4-Impulse, so ergibt sich im Ruhesystem des Glueballs für den Zerfall in zwei Endzustände

$$\begin{pmatrix} M_0 \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{k_1} \\ \vec{k}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_{k_2} \\ \vec{k}_2 \end{pmatrix}, \quad (6.106)$$

wobei die jeweiligen Energien E_1 und E_2 durch die relativistische Energie-Impuls-Beziehung gegeben sind:

$$E_{k_1} = \sqrt{m_1^2 + \vec{k}_1^2}, \quad E_{k_2} = \sqrt{m_2^2 + \vec{k}_2^2}. \quad (6.107)$$

Aus [6.106] wird sofort ersichtlich, dass die Impulse der Ausgangsteilchen antiparallel und betragslich gleich sind

$$\vec{k}_1 = -\vec{k}_2 \equiv \vec{k}_0 . \quad (6.108)$$

Durch Einsetzen von [6.107] und [6.108] in [6.106] und anschließendes Auflösen, kann der Ausgangsimpuls als Funktion der Massen aller Konstituenten ausgedrückt werden

$$k_0 = |\vec{k}_0| = \frac{1}{2M_0} \sqrt{M_0^4 + m_1^4 + m_2^4 - 2(M_0^2 m_1^2 + M_0^2 m_2^2 + m_1^2 m_2^2)} \Theta(M_0 - m_1 - m_2) . \quad (6.109)$$

Die Θ -Funktion beschränkt die möglichen Impulse auf solche Fälle, in denen die Ruhemasse des Glueballs mindestens so groß ist wie die Summe der Ruhemassen der Ausgangsteilchen und somit kinematisch erlaubt sind.

6.4.1 Zerfallsbreite für den Tensor-Glueball $\Gamma_{G \rightarrow V_1 V_2}$

Bei genauer Betrachtung der Lagrangedichte (6.22) fällt auf, dass alle Zerfallskanäle dieselbe mathematische Struktur haben. Daher genügt es, die allgemeine Form der Zerfälle zu extrahieren und für diese die Zerfallsbreite zu berechnen. Diese wird sich als reine Funktion der Teilchenmassen herausstellen, in die letztendlich nur noch die Massen des jeweiligen Zerfallskanals eingesetzt werden müssen. Für den Tensor-Glueball lautet die allgemeine Struktur

$$\mathcal{L}_{Int} = c_G G_{\mu\nu} V_1^\mu V_2^\nu , \quad (6.110)$$

mit dem zugehörigen Feynman-Diagramm aus Abb. 3a. Die Zerfallsbreite ist für Vektor- und Axialvektormesonen identisch, weshalb keine Unterscheidung zwischen beiden Teilchenarten in der Struktur gemacht werden muss. Dem Feynman-Graphen entnehmen wir mit den entsprechenden Feynman-Regeln die invariante Zerfallsamplitude im Impulsraum

$$i\mathcal{M} = \varepsilon_{\mu\nu}(\lambda, \vec{k}) [-i c_G] \varepsilon^\mu(\lambda_1, \vec{k}_1) \varepsilon^{*\nu}(\lambda_2, \vec{k}_2) . \quad (6.111)$$

Unter Berücksichtigung der Fierz-Pauli-Bedingungen folgt direkt die Eigenschaft $\varepsilon_{\mu\nu}^\dagger(\lambda, \vec{k}) = \varepsilon_{\mu\nu}(\lambda, \vec{k})$, und weiterhin kann für ebene Polarisierungen $\varepsilon^{*\mu}(\lambda, \vec{k}) = \varepsilon^\mu(\lambda, \vec{k})$ gewählt werden, womit das Betragquadrat der invarianten Zerfallsamplitude folgende Form annimmt:

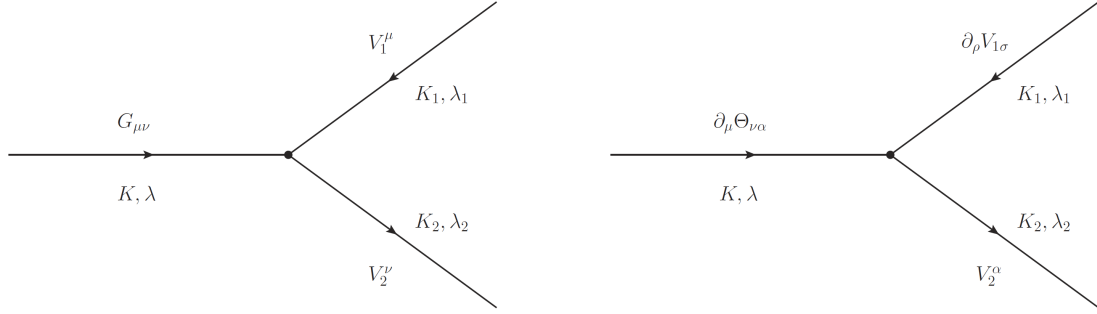
$$|i\mathcal{M}|^2 = c_G^2 \varepsilon_{\mu\nu}(\lambda, \vec{k}) \varepsilon_{\rho\sigma}(\lambda, \vec{k}) \varepsilon^\mu(\lambda_1, \vec{k}_1) \varepsilon^\rho(\lambda_1, \vec{k}_1) \varepsilon^\sigma(\lambda_2, \vec{k}_2) \varepsilon^\nu(\lambda_2, \vec{k}_2) . \quad (6.112)$$

Da keine ausgezeichnete Polarisation betrachtet werden soll, sind wir an der unpolarisierten Zerfallsamplitude $|i\mathcal{M}|_{\text{unp.}}^2$ interessiert, die alle möglichen Polarisierungen berücksichtigt. Diese ergibt sich aus der Mittelung der eingehenden und Summation über die ausgehenden Polarisierungseinstellungen

$$|i\mathcal{M}|_{\text{unp.}}^2 = \frac{1}{5} \sum_{\lambda=1}^5 \sum_{\lambda_1, \lambda_2=1}^3 |i\mathcal{M}|^2 . \quad (6.113)$$

Um diesen Ausdruck weiter auszuwerten, muss nun die Vollständigkeitsrelation der Polarisationsensoren (4.17) aus den vorangegangenen Kapiteln verwendet werden. Da die massiven Vektorfelder durch die Proca-Gleichung beschrieben werden, ist bekannt, dass auch die Polarisationsvektoren eine Vollständigkeitsrelation der Form

$$\sum_{\lambda_{1,2}=1}^3 \varepsilon^\mu(\lambda_{1,2}, \vec{k}_{1,2}) \varepsilon^\nu(\lambda_{1,2}, \vec{k}_{1,2}) = -g^{\mu\nu} + \frac{K_{1,2}^\mu K_{1,2}^\nu}{m_{1,2}^2} = -G_{1,2}^{\mu\nu} \quad (6.114)$$



(a) Allgemeine Struktur des Zerfalls des Tensor-Glueballs

(b) Allgemeine Struktur des Zerfalls des Pseudotensor-Glueballs

Abbildung 3: Feynman-Graphen der Zerfallsstrukturen des Tensor- bzw. Pseudotensor-Glueballs

erfüllen [1]. Hierbei bezeichnet $G^{\mu\nu}$ nicht das Glueball-Feld, sondern den Projektor (6.114). Insgesamt erhalten wir unter Verwendung aller genannten Relationen

$$|i\mathcal{M}|_{\text{unp.}}^2 = \frac{c_G^2}{10} \left[G_{\mu\rho} G_{\nu\sigma} + G_{\mu\sigma} G_{\nu\rho} - \frac{2}{3} G_{\mu\nu} G_{\rho\sigma} \right] G_1^{\mu\rho} G_2^{\sigma\nu}. \quad (6.115)$$

Es wird sich als praktikabel erweisen zunächst zu untersuchen welche Form der Projektor zum Glueball im Ruhesystem desselben annimmt. Mit (6.106) lässt sich direkt zeigen, dass der Projektor

$$G^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{K^\mu K^\nu}{m^2} = \begin{cases} 1 - 1 = 0, & \text{für } \mu = \nu = 0 \\ -\delta^{\mu\nu}, & \text{für } \mu, \nu \in [1, 2, 3] \end{cases} \quad (6.116)$$

gerade einem räumlichen Kronecker-Delta entspricht. Damit sind in der folgenden Rechnung alle Summationsindizes rein räumlich. Auswerten der Kronecker-Deltas ergibt

$$|i\mathcal{M}|_{\text{unp.}}^2 = \frac{c_G^2}{10} \left[G_1^{\mu\mu} G_2^{\nu\nu} + G_1^{\sigma\rho} G_2^{\sigma\rho} - \frac{2}{3} G_1^{\mu\sigma} G_2^{\sigma\mu} \right]. \quad (6.117)$$

Da die Metrik für räumliche Indizes ebenfalls in ein negatives Kronecker-Delta übergeht, also $g^{\mu\nu} \rightarrow -\delta^{\mu\nu}$, erhalten wir mit (6.114) letztendlich

$$\begin{aligned} |i\mathcal{M}|_{\text{unp.}}^2 &= \frac{c_G^2}{10} \left[\left(\delta^{\mu\mu} + \frac{K_1^\mu K_1^\mu}{m_1^2} \right) \left(\delta^{\nu\nu} + \frac{K_2^\nu K_2^\nu}{m_2^2} \right) + \left(\delta^{\sigma\rho} + \frac{K_1^\sigma K_1^\rho}{m_1^2} \right) \left(\delta^{\sigma\rho} + \frac{K_2^\sigma K_2^\rho}{m_2^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3} \left(\delta^{\mu\sigma} + \frac{K_1^\mu K_1^\sigma}{m_1^2} \right) \left(\delta^{\sigma\mu} + \frac{K_2^\sigma K_2^\mu}{m_2^2} \right) \right] \\ &= \frac{c_G^2}{10} \left[\delta^{\mu\mu} \delta^{\nu\nu} + \delta^{\mu\mu} \frac{K_2^\nu K_2^\nu}{m_2^2} + \delta^{\nu\nu} \frac{K_1^\mu K_1^\mu}{m_1^2} + \frac{K_1^\mu K_1^\mu K_2^\nu K_2^\nu}{m_1^2 m_2^2} \right. \\ &\quad \left. + \delta^{\sigma\rho} \delta^{\sigma\rho} + \delta^{\sigma\rho} \frac{K_2^\sigma K_2^\rho}{m_2^2} + \delta^{\sigma\rho} \frac{K_1^\sigma K_1^\rho}{m_1^2} + \frac{K_1^\sigma K_1^\rho K_2^\sigma K_2^\rho}{m_1^2 m_2^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3} \delta^{\mu\sigma} \delta^{\sigma\mu} - \frac{2}{3} \delta^{\mu\sigma} \frac{K_2^\sigma K_2^\mu}{m_2^2} - \frac{2}{3} \delta^{\sigma\mu} \frac{K_1^\mu K_1^\sigma}{m_1^2} - \frac{2}{3} \frac{K_1^\mu K_1^\sigma K_2^\sigma K_2^\mu}{m_1^2 m_2^2} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{c_G^2}{10} \left[10 + \frac{10}{3} \frac{\vec{k}_1^2}{m_1^2} + \frac{10}{3} \frac{\vec{k}_2^2}{m_2^2} + \frac{1}{3} \frac{(\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2)^2}{m_1^2 m_2^2} + \frac{\vec{k}_1^2 \vec{k}_2^2}{m_1^2 m_2^2} \right]. \quad (6.118)$$

Der Ausdruck vereinfacht sich mit (6.106) weiterhin zu

$$|i\mathcal{M}|_{\text{unp.}}^2 = c_G^2 \left(1 + \frac{\vec{k}_0^2}{3} \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) + \frac{2}{15} \frac{\vec{k}_0^4}{m_1^2 m_2^2} \right), \quad (6.119)$$

mit dem Impuls (6.109) der Ausgangsteilchen. Die Zerfallsbreite erhält man nun durch Integration von (6.105)

$$\Gamma_{G \rightarrow V_1 V_2} = \frac{1}{2 M_0} \int \frac{d^3 \vec{k}_1 d^3 \vec{k}_2}{(2\pi)^{64} E_{k_1} E_{k_2}} (2\pi)^4 |i\mathcal{M}|_{\text{unp.}}^2 \delta^{(4)}(K - K_1 - K_2), \quad (6.120)$$

wobei sich die Delta-Distribution in das Produkt des zeitlichen und räumlichen Anteils aufspalten

$$\delta^{(4)}(k - k_1 - k_2) = \delta(M_0 - E_{k_1} - E_{k_2}) \delta^{(3)}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \quad (6.121)$$

und somit eine der Impulsintegrationen zusammenbrechen lässt

$$\Gamma_{G \rightarrow V_1 V_2} = \frac{1}{8 (2\pi)^2 M_0} \int \frac{d^3 \vec{k}}{\sqrt{\vec{k}^2 + m_1^2} \sqrt{\vec{k}^2 + m_2^2}} |i\mathcal{M}|_{\text{unp.}}^2 \delta \left(M_0 - \sqrt{\vec{k}^2 + m_1^2} - \sqrt{\vec{k}^2 + m_2^2} \right). \quad (6.122)$$

Hierbei wurden die Eigenschaften (6.107) und (6.108) verwendet. Um diesen Ausdruck auszuwerten, müssen wir uns einer grundlegenden Eigenschaft der Delta-Distribution bedienen. Allgemein gilt

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i), \quad (6.123)$$

wobei x_i die Nullstellen der Funktion $f(x)$ sind, also $f(x_i) = 0$. Angewendet auf (6.122) ergibt dies

$$\begin{aligned} \delta \left(M_0 - \sqrt{\vec{k}^2 + m_1^2} - \sqrt{\vec{k}^2 + m_2^2} \right) &= \frac{\sqrt{k_0^2 + m_1^2} \sqrt{k_0^2 + m_2^2}}{k_0 \left(\sqrt{k_0^2 + m_1^2} + \sqrt{k_0^2 + m_2^2} \right)} \delta \left(|\vec{k}| - k_0 \right) \\ &\stackrel{(6.106)}{=} \stackrel{(6.107)}{=} \frac{\sqrt{k_0^2 + m_1^2} \sqrt{k_0^2 + m_2^2}}{k_0 M_0} \delta \left(|\vec{k}| - k_0 \right), \end{aligned} \quad (6.124)$$

wobei die Nullstelle des Arguments der ursprünglichen Delta-Funktion gerade dem bekannten Endimpuls (6.108) entspricht. Da die Zerfallsbreite mit eingesetzter Delta-Distribution

$$\Gamma_{G \rightarrow V_1 V_2} = \frac{1}{8 (2\pi)^2 M_0} \int d^3 \vec{k} \frac{|i\mathcal{M}|_{\text{unp.}}^2}{\sqrt{\vec{k}^2 + m_1^2} \sqrt{\vec{k}^2 + m_2^2}} \frac{\sqrt{k_0^2 + m_1^2} \sqrt{k_0^2 + m_2^2}}{k_0 M_0} \delta \left(|\vec{k}| - k_0 \right) \quad (6.125)$$

nur noch vom Betrag der Integrationsvariablen abhängt, empfiehlt es sich die Integration in sphärischen Koordinaten mit Radius $|\vec{k}| = k$ auszuwerten:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{G \rightarrow V_1 V_2} &= \frac{1}{8(2\pi)^2 M_0} \int dk d\Omega k^2 \frac{|i\mathcal{M}|_{\text{unp.}}^2}{\sqrt{k^2 + m_1^2} \sqrt{k^2 + m_2^2}} \frac{\sqrt{k_0^2 + m_1^2} \sqrt{k_0^2 + m_2^2}}{k_0 M_0} \delta(k - k_0) \\
 &= \frac{1}{8(2\pi)^2 M_0} \left(4\pi \frac{k_0 |i\mathcal{M}|_{\text{unp.}}^2}{M_0} \right) \\
 &= \frac{k_0}{8\pi M_0^2} |i\mathcal{M}|_{\text{unp.}}^2 . \tag{6.126}
 \end{aligned}$$

Einsetzen des Ausdrucks für die unpolarisierte Zerfallsamplitude ergibt das endgültige Ergebnis für die gesuchte Zerfallsbreite als Funktion der Konstituentenmassen

$$\Gamma_{G \rightarrow V_1 V_2} = \frac{c_G^2 k_0}{8\pi M_0^2} \left(1 + \frac{k_0^2}{3} \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) + \frac{2}{15} \frac{k_0^4}{m_1^2 m_2^2} \right) . \tag{6.127}$$

6.4.2 Zerfallsbreite für den Pseudotensor-Glueball $\Gamma_{\partial\Theta \rightarrow (\partial V_1) V_2}$

Mit dem gleichen Argument, das wir bereits im vorherigen Fall angebracht haben, muss zur Bestimmung der Zerfallsbreite für den Pseudotensor-Glueball erneut die allgemeine Struktur des Wechselwirkungsterms extrahiert werden, der sämtliche Zerfallskanäle beschreibt. Diese lautet

$$\mathcal{L}_{Int} = 2c_\Theta \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\mu \Theta_{\nu\alpha}) (\partial_\rho V_{1\sigma}) V_2^\alpha \tag{6.128}$$

und korrespondiert mit dem Feynman-Graphen aus Abb. 3b. Bevor das invariante Matrixelement bestimmt werden kann, müssen wir unsere Aufmerksamkeit auf die Ableitungsterme der Lagrangedichte richten und bestimmen, wie die Feynman-Regeln für Ableitungen von Vektorfeldern lauten. Die Fourier-Darstellung des Proca-Feldes und seine Ableitung lauten [1]

$$\begin{aligned}
 A^\mu(X) &= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k} \sum_{\lambda=1}^3 \varepsilon^\mu(\lambda, \vec{k}) \left(a^{(\lambda)}(\vec{k}) e^{-iK \cdot X} + a^{*(\lambda)}(\vec{k}) e^{iK \cdot X} \right) , \tag{6.129} \\
 \partial_\nu A^\mu(X) &= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k} \sum_{\lambda=1}^3 \varepsilon^\mu(\lambda, \vec{k}) \left(a^{(\lambda)}(\vec{k}) (-iK_\nu) e^{-iK \cdot X} + a^{*(\lambda)}(\vec{k}) (iK_\nu) e^{iK \cdot X} \right) . \tag{6.130}
 \end{aligned}$$

Daraus erhält man, dass auslaufende Teilchen einen zusätzlichen Faktor $(-iK_\mu)$ und einlaufende den Faktor (iK_μ) beitragen. Analoges gilt auch für Ableitungen des Tensorfeldes. Somit haben wir alle Ingredienzien beisammen, um die invariante Zerfallsamplitude aus Abb. 3b abzulesen

$$i\mathcal{M} = (iK_\mu) \varepsilon_{\nu\alpha}(\lambda, \vec{k}) [-2ic_\Theta \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}] (-iK_{1\rho}) \varepsilon_\sigma(\lambda_1, \vec{k}_1) \varepsilon^{*\alpha}(\lambda_2, \vec{k}_2) . \tag{6.131}$$

Die unpolarisierte Zerfallsamplitude erhält man erneut durch Mittelung bzw. Summation über die Polarisationen:

$$\begin{aligned}
 |i\mathcal{M}|_{\text{unp.}}^2 &= \frac{1}{5} \sum_{\lambda=1}^5 \sum_{\lambda_1, \lambda_2=1}^3 |i\mathcal{M}|^2 \\
 &= \frac{1}{5} \sum_{\lambda=1}^5 \sum_{\lambda_1, \lambda_2=1}^3 4c_{\Theta}^2 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'} \varepsilon_{\nu\alpha}(\lambda, \vec{k}) \varepsilon_{\nu'\alpha'}(\lambda, \vec{k}) \varepsilon_{\sigma}(\lambda_1, \vec{k}_1) \varepsilon_{\sigma'}^*(\lambda_1, \vec{k}_1) \\
 &\quad \times \varepsilon^{*\alpha}(\lambda_2, \vec{k}_2) \varepsilon^{\alpha'}(\lambda_2, \vec{k}_2) K_{\mu} K_{\mu'} K_{1\rho} K_{1\rho'} .
 \end{aligned} \tag{6.132}$$

Mit den Vollständigkeitsrelationen für die Polarisationsensoren und -vektoren (6.114) kann die unpolarisierte Zerfallsamplitude durch die bekannten Projektoren ausgedrückt werden

$$\begin{aligned}
 |i\mathcal{M}|_{\text{unp.}}^2 &= \frac{4c_{\Theta}^2}{5} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'} \frac{1}{2} \left(G_{\nu\nu'} G_{\alpha\alpha'} + G_{\nu\alpha'} G_{\alpha\nu'} - \frac{2}{3} G_{\nu\alpha} G_{\nu'\alpha'} \right) G_{1\sigma\sigma'} G_2^{\alpha\alpha'} \\
 &\quad \times K_{\mu} K_{\mu'} K_{1\rho} K_{1\rho'} .
 \end{aligned} \tag{6.133}$$

Wie bereits demonstriert, geht der Projektor $G^{\mu\nu}$ im Ruhesystem des Glueballs in ein Kronecker-Delta über und eliminiert so die zeitliche Komponente. Mit dem 4-Impuls des Glueballs im Ruhesystem $K^{\mu} = (M_0, \vec{0})^T$ ist der obige Ausdruck nur für $\mu = \mu' = 0$ von null verschieden

$$\begin{aligned}
 |i\mathcal{M}|_{\text{unp.}}^2 &= \frac{4c_{\Theta}^2}{10} \varepsilon^{0\nu\rho\sigma} \varepsilon^{0\nu'\rho'\sigma'} \left(\delta_{\nu\nu'} \delta_{\alpha\alpha'} + \delta_{\nu\alpha'} \delta_{\alpha\nu'} - \frac{2}{3} \delta_{\nu\alpha} \delta_{\nu'\alpha'} \right) M_0^2 K_{1\rho} K_{1\rho'} \\
 &= \frac{4M_0^2 c_{\Theta}^2}{10} \left[\varepsilon^{0\nu'\rho\sigma} \varepsilon^{0\nu'\rho'\sigma'} G_{1\sigma\sigma'} G_2^{\alpha\alpha} + \varepsilon^{0\alpha'\rho\sigma} \varepsilon^{0\alpha'\rho'\sigma'} G_{1\sigma\sigma'} G_2^{\alpha\alpha'} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2}{3} \varepsilon^{0\alpha\rho\sigma} \varepsilon^{0\alpha'\rho'\sigma'} G_{1\sigma\sigma'} G_2^{\alpha\alpha'} \right] K_{1\rho} K_{1\rho'} .
 \end{aligned} \tag{6.134}$$

Da die ausgehenden Impulse im Glueball-Ruhesystem gemäß (6.108) antiparallel orientiert sind, kann das Koordinatensystem stets derart rotiert werden, dass o.B.d.A

$$K_1^{\mu} = (E_1, k_1, 0, 0)^T, \quad K_2^{\mu} = (E_2, -k_1, 0, 0)^T \tag{6.135}$$

mit $k_1 = |\vec{k}_1| \equiv k_0$ (vgl. (6.109)). Diese Wahl vereinfacht den Ausdruck (6.134) ungemein, da er weitere zwei Summationsindizes fixiert. Unter Verwendung der vollständigen Antisymmetrie des ε -Tensors, folgt

$$\begin{aligned}
 |i\mathcal{M}|_{\text{unp.}}^2 &= \frac{4M_0^2 c_{\Theta}^2 k_0^2}{10} \left[\varepsilon^{01\nu'\sigma} \varepsilon^{01\nu'\sigma'} G_{1\sigma\sigma'} G_2^{\alpha\alpha} + \varepsilon^{01\alpha'\sigma} \varepsilon^{01\alpha'\sigma'} G_{1\sigma\sigma'} G_2^{\alpha\alpha'} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2}{3} \varepsilon^{01\alpha\sigma} \varepsilon^{01\alpha'\sigma'} G_{1\sigma\sigma'} G_2^{\alpha\alpha'} \right] .
 \end{aligned} \tag{6.136}$$

Es ist einerseits zu beachten, dass sämtliche Summationsindizes räumlich sind, daher liefern die Projektoren der auslaufenden Teilchen weitere Delta-Distributionen

$$G_{1,2}^{\mu\nu} = \left(g^{\mu\nu} - \frac{K_{1,2}^{\mu} K_{1,2}^{\nu}}{m_{1,2}^2} \right) \longrightarrow \left(-\delta^{\mu\nu} - \frac{k_0^2}{m_{1,2}^2} \delta^{\mu 1} \delta^{\nu 1} \right) . \tag{6.137}$$

Damit lässt sich die unpolarisierte Zerfallsamplitude vollständig berechnen und erneut als Funktion der Konstituentenmassen angeben

$$\begin{aligned}
|i\mathcal{M}|_{\text{unp.}}^2 = & \frac{4M_0^2 c_\Theta^2 k_0^2}{10} \left[\varepsilon^{01\nu\sigma} \varepsilon^{01\nu\sigma'} \left(\delta_{\sigma\sigma'} + \frac{k_0^2}{m_1^2} \delta_{\sigma 1} \delta_{\sigma' 1} \right) \left(\delta^{\alpha\alpha} + \frac{k_0^2}{m_2^2} \delta^{\alpha 1} \delta^{\alpha 1} \right) \right. \\
& + \varepsilon^{01\alpha'\sigma} \varepsilon^{01\alpha\sigma'} \left(\delta_{\sigma\sigma'} + \frac{k_0^2}{m_1^2} \delta_{\sigma 1} \delta_{\sigma' 1} \right) \left(\delta^{\alpha\alpha'} + \frac{k_0^2}{m_2^2} \delta^{\alpha 1} \delta^{\alpha' 1} \right) \\
& \left. - \frac{2}{3} \varepsilon^{01\alpha\sigma} \varepsilon^{01\alpha'\sigma'} \left(\delta_{\sigma\sigma'} + \frac{k_0^2}{m_1^2} \delta_{\sigma 1} \delta_{\sigma' 1} \right) \left(\delta^{\alpha\alpha'} + \frac{k_0^2}{m_2^2} \delta^{\alpha 1} \delta^{\alpha' 1} \right) \right] . \quad (6.138)
\end{aligned}$$

Wegen $\varepsilon^{\mu\mu\rho\sigma} = 0$ verschwinden in der Klammer alle impulsabhängigen Terme, die mit dem ε -Tensor kontrahiert sind und wir erhalten

$$\begin{aligned}
|i\mathcal{M}|_{\text{unp.}}^2 = & \frac{4M_0^2 c_\Theta^2 k_0^2}{10} \left[\varepsilon^{01\nu\sigma} \varepsilon^{01\nu\sigma'} \left(3\delta_{\sigma\sigma'} + \frac{k_0^2}{m_2^2} \delta_{\sigma\sigma'} \right) + \varepsilon^{01\alpha'\sigma} \varepsilon^{01\alpha\sigma'} \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{\alpha\alpha'} \right. \\
& \left. - \frac{2}{3} \varepsilon^{01\alpha\sigma} \varepsilon^{01\alpha'\sigma'} \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{\alpha\alpha'} \right] \\
= & \frac{4M_0^2 c_\Theta^2 k_0^2}{10} \varepsilon^{01\nu\sigma} \varepsilon^{01\nu\sigma} \left(\frac{k_0^2}{m_2^2} + 3 + 1 - \frac{2}{3} \right) \\
= & \frac{4M_0^2 c_\Theta^2 k_0^2}{10} (\varepsilon^{0123} \varepsilon^{0123} + \varepsilon^{0132} \varepsilon^{0132}) \left(\frac{k_0^2}{m_2^2} + \frac{10}{3} \right) \\
= & \frac{4M_0^2 c_\Theta^2 k_0^2}{5} \left(\frac{k_0^2}{m_2^2} + \frac{10}{3} \right) . \quad (6.139)
\end{aligned}$$

In der vorletzten Zeile wurde die Definition des ε -Tensors mit $\varepsilon^{0123} = 1$ bzw. $\varepsilon^{0132} = -1$ benutzt. Die Zerfallsbreite für den Pseudotensor-Glueball erhält man, wie vorher, durch Einsetzen der Zerfallsamplitude in die differentielle Zerfallsbreite (6.105) und Integration über den Impulsraum

$$\Gamma_{\partial\Theta \rightarrow (\partial V_1)V_2} = \frac{1}{2M_0} \int \frac{d^3\vec{k}_1 d^3\vec{k}_2}{(2\pi)^6 4 E_{k_1} E_{k_2}} (2\pi)^4 |i\mathcal{M}|_{\text{unp.}}^2 \delta^{(4)}(K - K_1 - K_2) . \quad (6.140)$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich allerdings nur durch die Form der Zerfallsamplitude von der Zerfallsbreite (6.120) des Tensor-Glueballs, die eine reine Funktion der Massen ist und somit als Konstante aus dem Integranden herausgezogen werden kann. Die Lösung des Integrals erfolgt ganz analog zum vorherigen Kapitel und liefert dasselbe Ergebnis, das wir bereits zu (6.126) bestimmt haben:

$$\Gamma_{\partial\Theta \rightarrow (\partial V_1)V_2} = \frac{k_0}{8\pi M_0^2} |i\mathcal{M}|_{\text{unp.}}^2 = \frac{c_\Theta^2 k_0^3}{10\pi} \left(\frac{k_0^2}{m_2^2} + \frac{10}{3} \right) . \quad (6.141)$$

6.5 Mischung der Kaon-Felder

Wir sollten mit den beiden Zerfallsbreiten nun erwartungsgemäß in der Lage sein sämtliche Zerfallskanäle zu berechnen, jedoch existiert, wie bereits in Kap. 6.1 erwähnt, im Kaon-Sektor ein nicht-vernachlässigbarer Mischungseffekt der unphysikalischen Felder K_1 und $K_{1,B}$. Da es sich hierbei um geladene, also komplexwertige Felder handelt, wird die Mischung gerade durch eine $SU(2)$ -Transformation beschrieben (vgl. [5]), deren Elemente die Form

$$U = \exp(-i\vec{\phi} \cdot \vec{\sigma}) \quad (6.142)$$

haben, wobei $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^T$ der Vektor der Pauli-Matrizen als Generator der $SU(2)$ ist. Taylor-Entwicklung der Exponentialfunktion ergibt eine explizite Matrixdarstellung

$$\begin{aligned}
U &= \exp(-i\vec{\phi} \cdot \vec{\sigma}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\vec{\phi} \cdot \vec{\sigma})^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-i)^{2n} \frac{(\vec{\phi} \cdot \vec{\sigma})^{2n}}{2n!} + (-i)^{2n+1} \frac{(\vec{\phi} \cdot \vec{\sigma})^{2n+1}}{(2n+1)!} \right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{\phi^{2n}}{2n!} \mathbb{1} - i(-1)^n \frac{\phi^{2n+1}}{(2n+1)!} \vec{e}_\phi \cdot \vec{\sigma} \right] \\
&= \cos(\phi) \mathbb{1} - i \sin(\phi) \vec{e}_\phi \cdot \vec{\sigma} .
\end{aligned} \tag{6.143}$$

Hierbei wurde die Reihenentwicklung der trigonometrischen Funktionen benutzt, während \vec{e}_ϕ den Einheitsvektor in ϕ -Richtung beschreibt, der als gemäß $\vec{e}_\phi = (1, 0, 0)^T$ gewählt werden kann. Mit dieser Wahl nimmt die Transformationsmatrix die Form

$$U = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -i \sin(\phi) \\ -i \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \tag{6.144}$$

an. Die physikalischen Kaon-Felder ergeben sich durch Anwendung der Transformationsmatrix auf den Vektor der unphysikalischen Zustände

$$\begin{pmatrix} K_1^\mu(1270) \\ K_1^\mu(1400) \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} K_{1,A}^\mu \\ K_{1,B}^\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -i \sin(\phi) \\ -i \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{1,A}^\mu \\ K_{1,B}^\mu \end{pmatrix} . \tag{6.145}$$

Durch Invertierung der Matrix lassen sich die unphysikalischen Zustände als Funktion der physikalischen ausdrücken und wir erhalten

$$K_{1,A}^\mu = \cos(\phi) K_1^\mu(1270) + i \sin(\phi) K_1^\mu(1400) . \tag{6.146}$$

Diese Form kann nun in den Kaon-Anteil der Lagrangedichten eingesetzt werden. Für den Tensor-Glueball ergibt dies

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{K_{1,A}}^{2^{++}} &= c_G G_{\mu\nu} \left[K_{1,A}^{\mu+} K_{1,A}^{\nu-} + K_{1,A}^{\mu-} K_{1,A}^{\nu+} + \bar{K}_{1,A}^{\mu 0} K_{1,A}^{\nu 0} + K_{1,A}^{\mu 0} \bar{K}_{1,A}^{\nu 0} \right] \\
&= c_G G_{\mu\nu} \left[(\cos(\phi) K_{1,1270}^{\mu+} + i \sin(\phi) K_{1,1400}^{\mu+}) (\cos(\phi) K_{1,1270}^{\nu-} + i \sin(\phi) K_{1,1400}^{\nu-}) \right. \\
&\quad + (\cos(\phi) K_{1,1270}^{\mu-} + i \sin(\phi) K_{1,1400}^{\mu-}) (\cos(\phi) K_{1,1270}^{\nu+} + i \sin(\phi) K_{1,1400}^{\nu+}) \\
&\quad + (\cos(\phi) \bar{K}_{1,1270}^{\mu 0} + i \sin(\phi) \bar{K}_{1,1400}^{\mu 0}) (\cos(\phi) K_{1,1270}^{\nu 0} + i \sin(\phi) K_{1,1400}^{\nu 0}) \\
&\quad \left. + (\cos(\phi) K_{1,1270}^{\mu 0} + i \sin(\phi) K_{1,1400}^{\mu 0}) (\cos(\phi) \bar{K}_{1,1270}^{\nu 0} + i \sin(\phi) \bar{K}_{1,1400}^{\nu 0}) \right] \\
&= c_G G_{\mu\nu} \left[\cos^2(\phi) \left(K_{1,1270}^{\mu+} K_{1,1270}^{\nu-} + K_{1,1270}^{\mu-} K_{1,1270}^{\nu+} + \bar{K}_{1,1270}^{\mu 0} K_{1,1270}^{\nu 0} + K_{1,1270}^{\mu 0} \bar{K}_{1,1270}^{\nu 0} \right) \right. \\
&\quad + i \cos(\phi) \sin(\phi) \left(K_{1,1270}^{\mu+} K_{1,1400}^{\nu-} + K_{1,1400}^{\mu+} K_{1,1270}^{\nu-} + K_{1,1270}^{\mu-} K_{1,1400}^{\nu+} + K_{1,1400}^{\mu-} K_{1,1270}^{\nu+} \right. \\
&\quad \left. + \bar{K}_{1,1270}^{\mu 0} K_{1,1400}^{\nu 0} + \bar{K}_{1,1400}^{\mu 0} K_{1,1270}^{\nu 0} + K_{1,1270}^{\mu 0} \bar{K}_{1,1400}^{\nu 0} + K_{1,1400}^{\mu 0} \bar{K}_{1,1270}^{\nu 0} \right) \\
&\quad \left. - \sin^2(\phi) \left(K_{1,1400}^{\mu+} K_{1,1400}^{\nu-} + K_{1,1400}^{\mu-} K_{1,1400}^{\nu+} + \bar{K}_{1,1400}^{\mu 0} K_{1,1400}^{\nu 0} + K_{1,1400}^{\mu 0} \bar{K}_{1,1400}^{\nu 0} \right) \right] .
\end{aligned} \tag{6.147}$$

Die Lagrangedichte beschreibt durch die Mischung offensichtlich drei Zerfallskanäle im Kaon-Sektor, die jeweils unterschiedlich durch ihre Vorfaktoren gewichtet sind. Wie bereits in Kap. 6.2.1 gesehen, lässt sich die Symmetrie des Glueball-Feldes ausnutzen und führt durch Umbenennung der Summationsindizes zu

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{K_{1,A}}^{2^{++}} = & 2 c_G G_{\mu\nu} \left[\cos^2(\phi) \left(K_{1,1270}^{\mu+} K_{1,1270}^{\nu-} + \bar{K}_{1,1270}^{\mu 0} K_{1,1270}^{\nu 0} \right) \right. \\ & + i \cos(\phi) \sin(\phi) \left(K_{1,1270}^{\mu+} K_{1,1400}^{\nu-} + K_{1,1400}^{\mu+} K_{1,1270}^{\nu-} + \bar{K}_{1,1270}^{\mu 0} K_{1,1400}^{\nu 0} + \bar{K}_{1,1400}^{\mu 0} K_{1,1270}^{\nu 0} \right) \\ & \left. - \sin^2(\phi) \left(K_{1,1400}^{\mu+} K_{1,1400}^{\nu-} + \bar{K}_{1,1400}^{\mu 0} K_{1,1400}^{\nu 0} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.148)$$

Die invariante Zerfallsamplitude (6.119) behält dabei ihre Form und wird lediglich durch die jeweilig betragsquadrierten, konstanten Vorfaktoren modifiziert, die die Integration der Zerfallsbreite nicht beeinflussen und somit auch hier nur als multiplikativer Faktor auftreten. Für den Zerfall $G_{\mu\nu} \rightarrow K_{1,1270}^{\mu+} K_{1,1270}^{\nu+}$ erhält man beispielsweise

$$|i\mathcal{M}|_{\text{unp. } K_{1,1270}^+ K_{1,1270}^-}^2 = 4 c_G^2 \cos^4(\phi) \left(1 + \frac{\vec{k}_0^2}{3} \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) + \frac{2}{15} \frac{\vec{k}_0^4}{m_1^2 m_2^2} \right) \quad (6.149)$$

und

$$\Gamma_{G \rightarrow K_{1,1270}^+ K_{1,1270}^-} = \frac{c_G^2 k_0}{2\pi M_0^2} \cos^4(\phi) \left(1 + \frac{k_0^2}{3} \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) + \frac{2}{15} \frac{k_0^4}{m_1^2 m_2^2} \right). \quad (6.150)$$

Ganz analog gehen wir auch im Falle des Pseudotensor-Glueballs vor und erhalten, wegen der Ableitung, vier kaonische Zerfallskanäle

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{K_{1,A}}^{2^{-+}} = & 2 c_\Theta \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\mu \Theta_{\nu\alpha}) \left[(\partial_\rho K_{\sigma 1,A}^-) K_{1,A}^{\alpha+} + (\partial_\rho K_{\sigma 1,A}^+) K_{1,A}^{\alpha-} + (\partial_\rho K_{\sigma 1,A}^0) \bar{K}_{1,A}^{\alpha 0} \right. \\ & \left. + (\partial_\rho \bar{K}_{\sigma 1,A}^0) K_{1,A}^{\alpha 0} \right] \\ = & 2 c_\Theta \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\mu \Theta_{\nu\alpha}) \left[(\cos(\phi) \partial_\rho K_{\sigma 1,1270}^- + i \sin(\phi) \partial_\rho K_{\sigma 1,1400}^-) \right. \\ & \times (\cos(\phi) K_{1,1270}^{\alpha+} + i \sin(\phi) K_{1,1400}^{\alpha+}) \\ & + (\cos(\phi) \partial_\rho K_{\sigma 1,1270}^+ + i \sin(\phi) \partial_\rho K_{\sigma 1,1400}^+) (\cos(\phi) K_{1,1270}^{\alpha-} + i \sin(\phi) K_{1,1400}^{\alpha-}) \\ & + (\cos(\phi) \partial_\rho K_{\sigma 1,1270}^0 + i \sin(\phi) \partial_\rho K_{\sigma 1,1400}^0) (\cos(\phi) \bar{K}_{1,1270}^{\alpha 0} + i \sin(\phi) \bar{K}_{1,1400}^{\alpha 0}) \\ & \left. + (\cos(\phi) \partial_\rho \bar{K}_{\sigma 1,1270}^0 + i \sin(\phi) \partial_\rho \bar{K}_{\sigma 1,1400}^0) (\cos(\phi) K_{1,1270}^{\alpha 0} + i \sin(\phi) K_{1,1400}^{\alpha 0}) \right] \\ = & 2 c_\Theta \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\mu \Theta_{\nu\alpha}) \left\{ \cos^2(\phi) \left[(\partial_\rho K_{\sigma 1,1270}^-) K_{1,1270}^{\alpha+} + (\partial_\rho K_{\sigma 1,1270}^+) K_{1,1270}^{\alpha-} \right. \right. \\ & \left. \left. + (\partial_\rho K_{\sigma 1,1270}^0) \bar{K}_{1,1270}^{\alpha 0} + (\partial_\rho \bar{K}_{\sigma 1,1270}^0) K_{1,1270}^{\alpha 0} \right] \right. \\ & + i \sin(\phi) \cos(\phi) \left[(\partial_\rho K_{\sigma 1,1270}^-) K_{1,1400}^{\alpha+} + (\partial_\rho K_{\sigma 1,1400}^-) K_{1,1270}^{\alpha+} \right. \\ & + (\partial_\rho K_{\sigma 1,1270}^+) K_{1,1400}^{\alpha-} + (\partial_\rho K_{\sigma 1,1400}^+) K_{1,1270}^{\alpha-} \\ & + (\partial_\rho K_{\sigma 1,1270}^0) \bar{K}_{1,1400}^{\alpha 0} + (\partial_\rho K_{\sigma 1,1400}^0) \bar{K}_{1,1270}^{\alpha 0} \\ & \left. + (\partial_\rho \bar{K}_{\sigma 1,1270}^0) K_{1,1400}^{\alpha 0} + (\partial_\rho \bar{K}_{\sigma 1,1400}^0) K_{1,1270}^{\alpha 0} \right] \\ & \left. - \sin^2(\phi) \left[(\partial_\rho K_{\sigma 1,1400}^-) K_{1,1400}^{\alpha+} + (\partial_\rho K_{\sigma 1,1400}^+) K_{1,1400}^{\alpha-} \right. \right. \\ & \left. \left. + (\partial_\rho K_{\sigma 1,1400}^0) \bar{K}_{1,1400}^{\alpha 0} + (\partial_\rho \bar{K}_{\sigma 1,1400}^0) K_{1,1400}^{\alpha 0} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.151)$$

Zur Demonstration, dass die unpolarisierte Zerfallsamplitude (6.139) gemäß vorheriger Betrachtung erneut nur einen multiplikativen, konstanten Faktor erhält, sei sie exemplarisch für den gleichen Zerfall $G_{\mu\nu} \rightarrow K_{1,1270}^\mu K_{1,1270}^\nu$ angegeben

$$|i\mathcal{M}|_{\text{unp.}(\partial K_{1,1270}^+)_K_{1,1270}^-}^2 = \frac{4 M_0^2 c_\Theta^2 k_0^2}{5} 4 \cos^4(\phi) \left(\frac{k_0^2}{m_2^2} + \frac{10}{3} \right), \quad (6.152)$$

was zur folgenden Zerfallsbreite führt

$$\Gamma_{\partial\Theta \rightarrow (\partial K_{1,1270})K_{1,1270}} = \frac{2 c_\Theta^2 k_0^3}{5\pi} \cos^4(\phi) \left(\frac{k_0^2}{m_2^2} + \frac{10}{3} \right). \quad (6.153)$$

Der Mischungswinkel der unphysikalischen Kaon-Felder wurde in [15] bestimmt und lautet

$$\phi = -33.6^\circ \pm 4.3^\circ. \quad (6.154)$$

6.6 Resultate

Bei näherer Betrachtung der Ergebnisse fällt auf, dass die Zerfallsbreiten von den jeweiligen Kopplungskonstanten c_G bzw. c_Θ der Wechselwirkungsterme abhängt. Diese Kopplungskonstanten würden üblicherweise durch den Abgleich mit experimentell gut gemessenen Zerfallsbreiten, die das Modell beschreibt, bestimmt. Da die Zerfälle des Tensor- bzw. Pseudotensor-Glueballs bislang jedoch nicht gemessen wurden, können die Absolutwerte der Zerfallsbreiten lediglich in Abhängigkeit von c_G bzw. c_Θ angegeben werden und bleiben damit vorerst unbestimmt. Die Werte können jedoch dadurch fixiert werden, dass alle Zerfallsbreiten in einer gewählten Basis, also als Verhältnis zu einer bestimmten Zerfallsbreite, angegeben werden. Das Verhältnis selbst hängt nicht von der Kopplungskonstante ab und liefert im Experiment verifizierbare Werte. Als Basis wählen wir die jeweilige Zerfallsbreite in zwei ρ -Mesonen, da seine Masse sehr gut bestimmt ist.

Bevor nun schlussendlich die Resultate angegeben werden können, muss beachtet werden, dass die Lagrangedichten zum Teil mehrere Terme zum gleichen Zerfall beinhalten, die die einzelnen Ladungszustände der ausgehenden Teilchen beschreiben. Ganz allgemein ergibt sich die Gesamtzerfallsbreite eines Kanals durch Summation der korrespondierenden Zerfallsbreiten und Mittelung über die Ladungszustände des eingehenden Teilchens. Da der Glueball ungeladen ist, erhält man

$$\Gamma_{\text{tot.}} = \sum_j \Gamma_j. \quad (6.155)$$

Zerfälle in identische Teilchen (z.B. $G \rightarrow \rho^0 \rho^0$) tragen dabei aus Symmetriegründen, wie in Abb. 4 veranschaulicht, in der Zerfallsbreite mit einem Faktor 2 bei⁹

6.6.1 Tensor-Glueball

Die Masse des Tensor-Glueballs ist aus Gittersimulationen bekannt [13] und beträgt

$$M_0 = 2390(30)(120) \text{ MeV}.$$

⁹Dieser ergibt sich sowohl aus der Tatsache, dass für einen Zerfall in identische Teilchen, wie veranschaulicht, zwei Feynman-Graphen zur Zerfallsamplitude beitragen, was nach Betragsquadrierung einen Faktor 4 liefert, als auch durch die Antiparallelität der ausgehenden Impulse im Ruhesystem des Glueballs. Aufgrund dieser, wird das Raumwinkel-Integral (6.126) nur noch über $\vartheta \in [0, \pi]$ ausgewertet, bzw. $\vartheta \in [0, 2\pi]$ mit einem Faktor $\frac{1}{2}$. Insgesamt trägt die Zerfallsbreite folglich mit dem Faktor 2 bei.

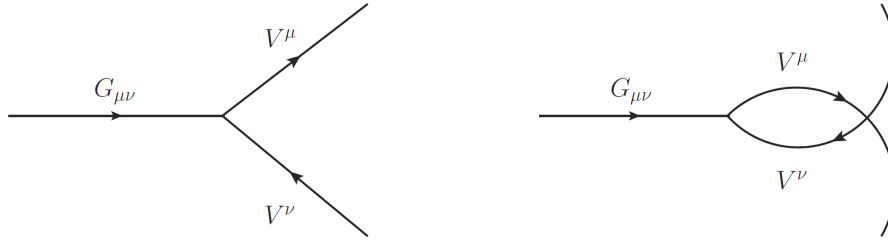


Abbildung 4: Beiträge des Zerfalls in identische Endzustände

Alle weiteren Massen werden dem Archiv der *Particle Data Group* (PDG) [14] entnommen. Die Zerfallsbreite des Zerfalls in zwei ρ -Mesonen ergibt sich nach (6.127) durch Einsetzen der Massen zu

$$\Gamma_{G \rightarrow \rho\rho} = 3 \Gamma_{G \rightarrow \rho^0 \rho^0} = 3 \cdot 2 \cdot 1.38 \cdot 10^{-11} \text{eV}^{-1} \cdot c_G^2 = 8.25 \cdot 10^{-11} \text{eV}^{-1} \cdot c_G^2 . \quad (6.156)$$

Wie bereits erwähnt, dient dieser Wert als Basis für alle weiteren Zerfallsbreiten, auf die diese normiert werden¹⁰. Die Resultate für den Tensor-Glueball sind in Tabelle 2 festgehalten. Das Verschwinden der meisten Zerfallsbreiten basiert in diesem Fall auf der Heaviside-Funktion in (6.109), die den Beitrag jeweils verschwinden lässt, da die Ruhemasse des Glueballs kleiner ist als die Gesamttruhemasse der Teilchen im Ausgangskanal.¹¹ Ganz analog ist die Behandlung des Pseudotensor-Glueballs.

Kanal n	$\Gamma_n/c_G^2 [10^{-11} \text{eV}^{-1}]$	$\Gamma_n/\Gamma_{G \rightarrow \rho\rho}$
$K^* K^*$	7.06	0.86 ± 0.04
$\omega\omega$	2.67	0.32 ± 0.02
$\phi\phi$	1.10	0.13 ± 0.01
$a_1 a_1$	0	0
$f_{1,1285} f_{1,1285}$	0	0
$f_{1,1420} f_{1,1420}$	0	0
$K_{1,1270} K_{1,1270}$	0	0
$K_{1,1270} K_{1,1400}$	0	0
$K_{1,1400} K_{1,1400}$	0	0

Tabelle 2: Zerfallskanäle und Zerfallsbreiten des Tensor-Glueballs mit $J^{PC} = 2^{++}$

¹⁰Auf eine Fehlerbetrachtung in der zweiten Spalte wird verzichtet, da die einzelnen Zerfallskanäle durch die Abhängigkeit von der Kopplungskonstante unbestimmt bleiben. Eine Fehlerbetrachtung macht nur für die fixierten Verhältnisse in der letzten Spalte Sinn

¹¹Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass die kinematisch ausgeschlossenen Zerfälle durchaus virtuell existieren und selbst wiederum in Kanäle zerfallen können, die im Einklang mit der Kinematik stehen.

6.6.2 Pseudotensor-Glueball

Die Masse des Glueballs entnehmen wir erneut den Ergebnissen der Gittersimulation aus [13] und erhalten

$$M_0 = 3040(40)(150) \text{ MeV} .$$

Bereits an dieser Stelle lässt sich gerechtfertigterweise die Vermutung äußern, dass die höhere Glueball-Masse im Vergleich zum vorherigen Fall zu einer größeren Anzahl kinematisch erlaubter Zerfallskanäle führen wird. Zunächst betrachten wir erneut die Basis $\Theta \rightarrow (\partial\rho) \rho$

$$\Gamma_{\Theta \rightarrow (\partial\rho)\rho} = 1.75859 \cdot 10^9 \text{ MeV}^3 c_\Theta^2 , \quad (6.157)$$

in der alle weiteren Zerfallsamplituden angegeben werden, um auch hier die Kopplungskonstante zu eliminieren¹². Die Ergebnisse zu den einzelnen Zerfallskanälen sind nachfolgend in Tabelle 3 aufgelistet.

Kanal n	$\Gamma_n/c_\Theta^2 [10^8 \text{ MeV}^3]$	$\Gamma_n/\Gamma_{G \rightarrow (\partial\rho)\rho}$
$(\partial K^*) K^*$	12.30	0.93 ± 0.02
$(\partial\omega) \omega$	8.60	0.49 ± 0.03
$(\partial\phi) \phi$	4.16	0.24 ± 0.01
$(\partial a_1) a_1$	3.50	0.20 ± 0.06
$(\partial f_{1,1285}) f_{1,1285}$	1.30	0.074 ± 0.024
$(\partial f_{1,1420}) f_{1,1420}$	0.32	$0.018_{-0.018}^{+0.023}$
$(\partial K_{1,1270}) K_{1,1270}$	$2.76 \cdot \cos(\phi)^4$	$0.076_{-0.076}^{+0.43}$
$(\partial K_{1,1270}) K_{1,1400}$	$1.72 \cdot \sin(\phi)^2 \cos(\phi)^2$	$0.021_{-0.021}^{+0.14}$
$(\partial K_{1,1400}) K_{1,1270}$	$1.75 \cdot \sin(\phi)^2 \cos(\phi)^2$	$0.021_{-0.021}^{+0.14}$
$(\partial K_{1,1400}) K_{1,1400}$	$0.89 \cdot \sin(\phi)^4$	$0.0048_{-0.0048}^{+0.28}$

Tabelle 3: Zerfallskanäle und Zerfallsbreiten des Pseudotensor-Glueballs mit $J^{PC} = 2^{-+}$

¹²Auch hier wird aus den bereits erwähnten Gründen auf eine Fehlerbetrachtung in der zweiten Spalte verzichtet

7 Zusammenfassung

In dieser Bachelorarbeit wurde ein effektives Modell der Quantenchromodynamik zur Beschreibung der Zerfälle des Tensor- und Pseudotensor-Glueballs in Vektor- und Axialvektormesonen vorgestellt. Hierfür wurden zwei Wechselwirkungs-Lagrangedichten konstruiert, die die fundamentalen Symmetrien der QCD enthalten. Aufgrund bislang fehlender experimenteller Daten, wurde erläutert, dass die eigentlichen Zerfallsbreiten per se jeweils nur bis auf die zugehörige Kopplungskonstante angegeben werden können und damit vorerst prinzipiell unbestimmt bleiben. Aus diesem Grund wurden alle Ergebnisse in Relation zur Zerfallsbreite der Glueballs in zwei ρ -Mesonen angegeben. Diese Verhältnisse enthalten keine unbekanntes Größen und konnten im Rahmen der Fehlerbehaftung der verwendeten Werte entsprechend exakt angegeben werden. Weiterhin wurden die Mischungseffekte des jeweiligen Kaon-Sektors untersucht, wobei der Mischungswinkel $\phi = -33.6^\circ \pm 4.3^\circ$ aus [15] bekannt ist.

Diese Resultate legen unter Anderem eine gute Grundlage bzw. Orientierungshilfe für das künftige PANDA-Experiment der FAIR, das sich voraussichtlich mitunter der experimentellen Untersuchung der vorgestellten Glueballs widmen wird. Somit wird es, nach experimenteller Bestimmung der Zerfallsbreiten, im gleichen Zuge möglich sein die Kopplungskonstanten durch Vergleich mit dem Experiment explizit zu bestimmen.

Diese Arbeit bietet eine Vielzahl an Möglichkeiten der Erweiterung und Vertiefung. So sei beispielsweise angemerkt, dass das Modell keineswegs auf Vektor- und Axialvektor-Mesonen beschränkt bleiben muss. In einem weiteren Schritt könnten auch skalare bzw. pseudoskalare Mesonen oder Pseudovektor-Mesonen in die Lagrangedichten eingearbeitet werden, um ein entsprechend breiteres Spektrum an möglichen Zerfallskanälen zu erhalten. Ebenso wurden alle kinematisch zunächst nicht erlaubten Zerfälle des Tensor-Glueballs strikt ausgeschlossen und nicht weiter betrachtet. Auf einem tiefergehenden Niveau könnten solche Zerfälle als kurzfristig virtuell erlaubte Zwischenmoden betrachtet werden, die selbst wiederum im Einklang mit der Kinematik zerfallen können.

Literatur

- [1] Walter Greiner, Joachim Reinhardt, *Feldquantisierung*, Theoretische Physik, Band 7A, Verlag Harri Deutsch, 1.Auflage (1993)
- [2] Dirk H. Rischke, *Quantenfeldtheorie*, Vorlesungsskript zur Theoretischen Physik, Wintersemester 2013/2014 und Sommersemester 2014
- [3] Dirk H. Rischke, *Theoretische Physik IV: Quantenmechanik I*, Vorlesungsskript zur Theoretischen Physik, Sommersemester 2011
- [4] J.J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Revised Edition (1993)
- [5] Florian Divotgey, Bachelorarbeit, *Phänomenologie von Axialvektor-Mesonen und Mischungseffekte in Kaon-Feldern* (2012)
- [6] M. Fierz and W. Pauli, *On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field*, Proc. R. Soc. Lond. A 1939 173, doi: 10.1098/rspa.1939.0140 (1939), pp. 211-232
- [7] Kurt Hinterbichler, *Theoretical Aspects of Massive Gravity*, arXiv:1105.3735v2 [hep-th] (2011), p. 13 ff.
- [8] Denis Parganlija, *Quarkonium Phenomenology in Vacuum*, Dissertation, Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main (2011)
- [9] D. Parganlija, P. Kovacs, G. Wolf, F. Giacosa and D. H. Rischke, *Phenomenology of Axial-Vector Mesons from an Extended Linear Sigma Model* Acta Phys. Polon. Supp. **5** (2012) 1109 [arXiv:1208.2054 [hep-ph]]
- [10] Adrian Königstein, Bachelorarbeit, *Quantenfeldtheoretische Beschreibung von (Pseudo-)Tensormesonen* Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main (2014)
- [11] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*, 2. Auflage, Princeton University Press (2010)
- [12] Francesco Giacosa, *Glueball phenomenology within a nonlocal approach*, Dissertation, Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen (2005)
- [13] Y. Chen, A. Alexandru, S.J. Dong, Terrence Draper, I. Horvath, F.X. Lee et al., *Glueball Spectrum and Matrix Elements on Anisotropic Lattices*, arXiv:hep-lat/0510074 (2005)
- [14] K.A. Olive et al. (Particle Data Group), Chin. Phys. C38, 090001 (2014) (URL: <http://pdg.lbl.gov>)
- [15] F. Divotgey, L. Olbrich and F. Giacosa, *Phenomenology of axial-vector and pseudovector mesons: decays and mixing in the kaonic sector* Eur. Phys. J. A **49** (2013) 135 [arXiv:1306.1193 [hep-ph]]
- [16] W. I. Eshraim, S. Janowski, F. Giacosa and D. H. Rischke, *Decay of the pseudoscalar glueball into scalar and pseudoscalar mesons*, Phys. Rev. D **87** (2013) 5, 054036 [arXiv:1208.6474 [hep-ph]]
- [17] M. F. M. Lutz et al. [PANDA Collaboration], *Physics Performance Report for PANDA: Strong Interaction Studies with Antiprotons*, arXiv:0903.3905 [hep-ex]
- [18] D. Parganlija, P. Kovacs, G. Wolf, F. Giacosa and D. H. Rischke, *Meson vacuum phenomenology in a three-flavor linear sigma model with (axial-)vector mesons*, Phys. Rev. D **87** (2013) 014011 [arXiv:1208.0585 [hep-ph]]
- [19] S. Janowski, F. Giacosa and D. H. Rischke, *Is $f_0(1710)$ a glueball?* arXiv:1408.4921 [hep-ph]