

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

*ZOOM ONLINE MEETING
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
16. APRIL, 2021*

MATTHIAS HANAUSKE

*FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK
D-60438 FRANKFURT AM MAIN
GERMANY*

Aufgrund der Corona Krise findet die Vorlesung und die Übungstermine auch in diesem Semester nur Online statt.

1. Vorlesung

Allgemeines zur Vorlesung

- Ort und Zeit:
Nur Online/Virtuell
Live-Streaming (synchrone Lehrangebote, Zoom Meetings):
Freitags von 15.00-17.00 Uhr: Vorlesungstermine
Übungstermine: Werden in der ersten Vorlesung vereinbart
- Vorlesungs-Materialien (asynchronen Lehrangebote):
<http://th.physik.uni-frankfurt.de/~harauske/VARTC/> bzw.
<http://th.physik.uni-frankfurt.de/~harauske/VARTC/VART2021.html>
- Übungsaufgaben auf der Online-Lernplattform Lon Capa:
<http://lon-capa.server.uni-frankfurt.de/>
- Weitere Materialien auf der Online-Lernplattform OLAT
<http://olat.server.uni-frankfurt.de>
- Generelles zur Vorlesung:
Bei erfolgreicher Teilnahme 5 Creditpoints
Benoteter Schein mittels einer mündlichen Prüfung (30 Min.)
- Voraussetzungen:
Laptop/PC mit Kamera und Ton
Programmierkenntnisse von Vorteil

Vorlesung besteht aus drei Teilen

ART mit dem Computer (Online) von Dr.phil.nat.Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Nächster Zoom Link am 16.04.2021, 15.00-17.00 Uhr:
ID: 794 847 5614, PWD: 785453

Die Vorlesungen

Teil I

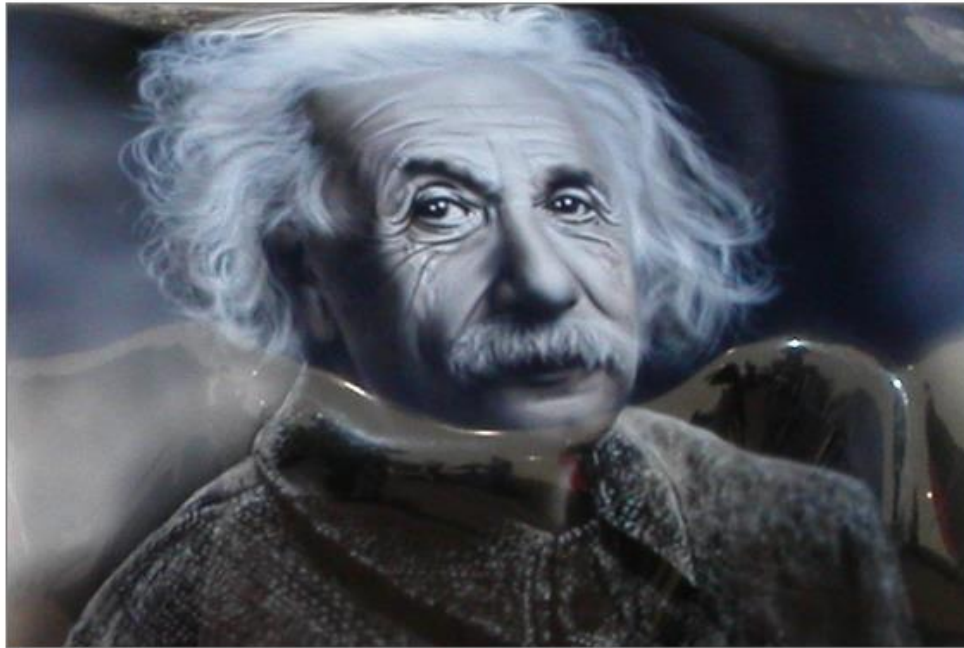
Teil II

Teil III

E-Learning

Vorwort

Die Vorlesung *Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer* wurde im Sommersemester 2016 das erste Mal gehalten und viele der auf dieser Hauptseite erreichbaren Internetseiten basieren grundsätzlich auf dem damals erstellten Kurs. In der Vorlesung werden die mathematisch anspruchsvollen Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) in diversen Programmierumgebungen analysiert. Im ersten Teil des Kurses erlernen die Studierenden die Verwendung von Computeralgebra-Systemen



(Python Jupyter Notebooks, Maple und Mathematica). Die oft komplizierten und zeitaufwendigen Berechnungen der tensoriellen Gleichungen der ART können mithilfe dieser Programme erleichtert werden. Diverse Anwendungen der Einstein- und Guller-Gleichungen sind in Jupyter Notebooks (siehe [Online-Seminar](#)) als interaktive Programmierumgebung durchgeführt und

<http://itp.uni-frankfurt/~hanauske/VARTC/>

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer (General Theory of Relativity on the Computer) Vorlesung SS 2021

Aufgrund der andauernden Corona-Krise findet die Vorlesung und die Übungstermine auch in diesem Semester nur Online statt!

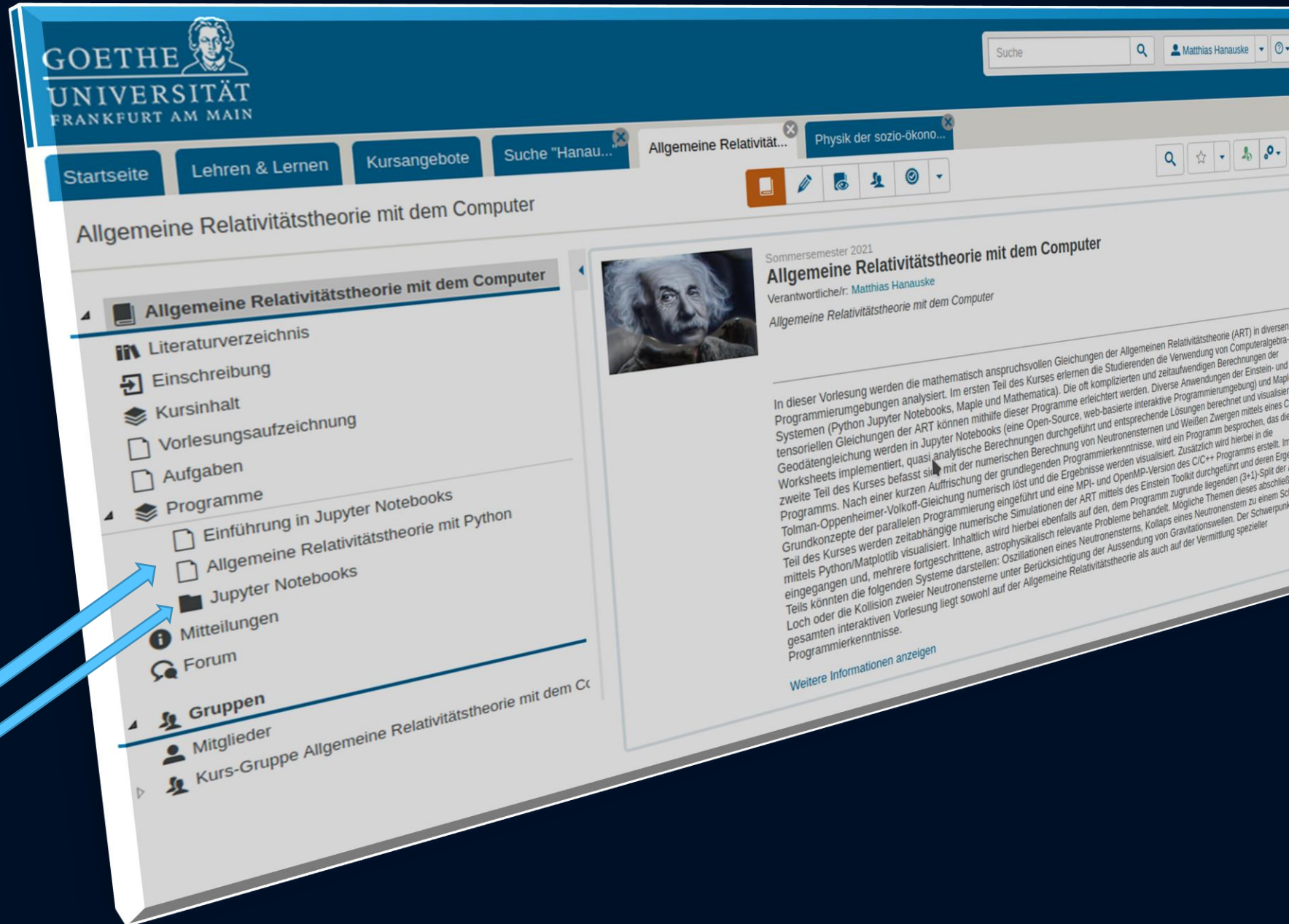
Diese Internetseite fasst die Online-Angebote der Vorlesung *Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer* zusammen. Auf der linken Seite finden Sie die einzelnen Vorlesungsaufzeichnungen (Videos), Vorlesungspräsentationen (pdf-Dateien) und weiterführende Links. Die Vorlesungstermine (Zoom Meetings, synchrones Lehrangebot) finden jeweils freitags von 15.00-17.00 Uhr statt. Die Termine der Online-Übungen (ca. 1.5 Stunden pro Woche) werden in der ersten Vorlesungseinheit gemeinsam festgelegt. Alle Lehrangebote werden mittel der Zoom Meeting Software gemacht und die jeweiligen Zoom-Links sind in der rechten oberen Ecke dieser Internetseite angegeben. Die Inhalte der Vorlesung gliedern sich in drei Teile ([Teil I](#), [Teil II](#), [Teil III](#)), die Sie in der zweiten oberen Spalte einsehen können. Weiteres Zusatzmaterial und diverse Online-Aufgaben sind über die Online-Lernplattformen [OLAT](#) und [Lon Capa](#) erhältlich (siehe [E-Learning](#)). Der Schwerpunkt der gesamten interaktiven Vorlesung liegt sowohl auf der Allgemeinen Relativitätstheorie als auch auf der Vermittlung

Die OLAT Seite

<http://olat.server.uni-frankfurt.de>



Auf der OLAT Seite des Kurses finden Sie die Jupyter Notebooks zum Ansehen und zum Herunterladen



Die LON-CAPA Seite

<http://lon-capa.server.uni-frankfurt.de/>

Sie können sich auf der LON-CAPA Seite mit Ihrem HRZ-Account (s...-Nummer) einloggen, bzw. erhalten einen Login per E-Mail

Einloggen

Benutzerkennung:

Passwort:

Domäne:

Einloggen

[Login-Hilfe](#)
[Passwort vergessen?](#)
[Helpdesk kontaktieren](#)
[Kurs-/Community-Übersicht](#)

Matthias Hanauske (Kurs-Koordinator) Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer - General Theory of Relativity on the Computer (M.Hanauske: VARTC SS 2021) (Mehr...)

Hauptmenü | Inhalt | Kurs-Editor | Was gibt's Neues | Grades | People | Settings | Public | Rolle wechseln

Inhaltsverzeichnis » Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

Funktionen | Editor | Inhaltseinstellungen | Verzeichnis bearbeiten

Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Home | Research

[Einführung](#) | [Teil I: Analytische Berechnungen und numerische Simulationen in Maple](#) | [Teil II: Paralleles Programmieren mit C++ und OpenMP/MPI](#) | [Teil III: Computersimulationen mit dem Einstein-Toolkit](#) | [Aufgaben](#)

Vorlesung SS 2021

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer
(General Theory of Relativity on the Computer)

In dieser Vorlesung werden die mathematisch ar (ART) in diversen Programmierumgebungen an Verwendung von Computeralgebra-Systemen (Ma Berechnungen der tensoriellen Gleichungen der AI Anwendungen der Einstein- und Geodätengleichun durchgeführt und entsprechende Lösungen berech numerischen Berechnung von Neutronensternen u kurzen Auffrischung der grundlegenden Programmierkenntnisse, erstellen die Studierenden, gemeinsam Volkov-Gleichung numerisch löst und visualisieren die Ergebnisse. Zusätzlich wird hierbei in die Grundkonzepte der parallelen Programmierung eingeführt und eine MPI- und OpenMP-Version des C/C++ Programms erstellt. Im dritten Teil des Kurses werden zeitabhängige numerische Simulationen der ART mittels des Einstein Toolkit durchgeführt und deren Ergebnisse mittels Python/Matplotlib visualisiert. Inhaltlich wird hierbei ebenfalls auf den, dem Programm zugrunde liegenden (3+1)-Split der ART eingegangen und, abhängig von den Vorkenntnissen der Studierenden, mehrere fortgeschrittene, astrophysikalisch relevante Probleme simuliert. Mögliche Themen dieses

Sie finden die zu bearbeitenden Aufgaben des Kurses auf der rechten Seite unter „Aufgaben“

Aufgaben im Kurs allgemeine Relativitätstheorie mit d

Aufgaben im Teil I: Analytische Berechnungen und numerische Simula

[Berechnung von Christoffelsymbolen der Schwarzschild-Metrik](#)

[Berechnung des Riemann Tensors der Schwarzschild-Metrik](#)

[Berechnung von Christoffelsymbolen in der Robertson-Walker Metrik](#)

[Berechnung des Einsteintensors in der Robertson-Walker Metrik](#)

[Berechnung von quadratischen Zusatztermen in der Robertson-Walker Metrik](#)

[Probekörper fällt radial in ein nichtrotierendes schwarzes Loch](#)

[Geodätische Bewegung eines Probekörpers um ein nichtrotierendes schwarzes LO](#)

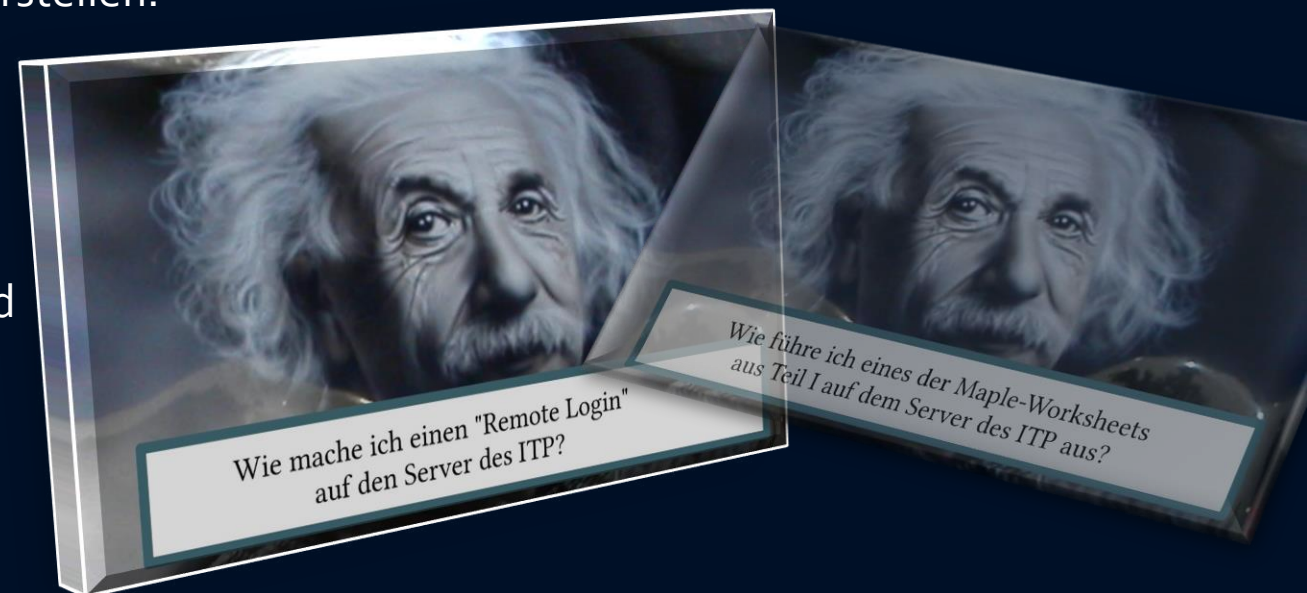
Vergabe der Login Accounts und der Remote Login

Bevor wir uns mit der „Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer“ beschäftigen, werden zunächst einige technische Dinge erläutert. Um die in den Vorlesungen vorgestellten Computerprogramme ausführen zu können und die Aufgaben in den Übungsstunden zu bearbeiten, müssen Sie gewisse Programme auf Ihrem Computer installiert haben; bzw. einen *Remote Login* von Ihrem Computer auf den Server des Instituts für Theoretische Physik (ITP) der Goethe Universität machen. Sie benötigen hierzu einen Account für die Rechner des ITP! Bitte senden Sie hierfür eine e-mail an:

hanauske@itp.uni-frankfurt.de
Betreff: Login ITP
Name: ...
Goethe-HRZ Nummer: s....

Der Account für die Rechner des ITP wird Ihnen dann per E-Mail gesendet, falls nicht, dann melden Sie sich bitte. Mittels eines *Remote Login* können Sie sich durch einen Fernzugriff auf den Desktop des Servers des ITP verbinden und Anwendungsprogramme (z.B. Maple oder Mathematica) oder Simulationsprogramme (z.B. C++, Python, Jupyter Notebooks) ausführen und auf Ihrem Computer darstellen.

Auf der Internetseite der Vorlesung finden Sie Links und ein kleines Video das die einzelnen Schritte beschreibt, wie man einen *Remote Login* von einem Linux Betriebssystem zum Server des ITP der Goethe Universität aufbaut. Zusätzlich wird am Ende des Videos gezeigt wie man das Passwort des eigenen ITP-Account ändert (empfohlen!), das Computeralgebra-System Maple startet und wie man sich wieder vom Server des ITP abmeldet.



Installation von Jupyter

Auf den Rechnern des ITP ist Python und Jupyter schon vorinstalliert und man startet ein Jupyter Notebook in einem Linux-Terminal mit dem Befehl „jupyter-notebook“.

Unter Windows kann man Jupyter recht einfach mittel Anaconda installieren

The image shows two windows side-by-side. The left window is the Anaconda Navigator desktop application. It features a sidebar with 'Home', 'Environments', 'Learning', and 'Community'. The main area displays 'Applications on base (root)' with four options: 'CMD.exe Prompt' (0.1.1), 'JupyterLab' (2.1.5), 'Jupyter Notebook' (6.0.3), and 'Powershell Prompt' (0.0.1). Each option has a 'Launch' button. The right window is a web browser displaying a Jupyter Notebook. The notebook title is 'Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer (Physics of Socio-Economic Systems with the Computer)'. The content includes a title, author information (Dr. phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske), and an introduction to game theory. The notebook shows code cells with Python code and their corresponding output, including a 2x2 matrix for a game.

Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer
(Physics of Socio-Economic Systems with the Computer)

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main
(Wintersemester 2020/21)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske
Frankfurt am Main 02.08.2020

Erster Vorlesungsteil:
Dominante Strategien und Nash-Gleichgewichte am Beispiel der folgenden Spiele:
Gefangenendilemma, Hirschjagt- und Angsthäsen-Spiel

Einführung

In diesem Python Notebook werden die in der Vorlesung definierten Gleichgewichtskonzepte (dominante Strategie, reine und gemischte Nash-Gleichgewichte) am Beispiel dreier simultaner, symmetrischer (2 Spieler)-(2 Strategien) Spiele illustriert. Zunächst wird das Python Modul "sympy" eingebunden, das ein Computer-Algebra-System für Python bereitstellt und symbolische Berechnungen und im speziellen Matrix-Berechnungen relativ einfach möglich macht.

```
In [1]: from sympy import *
init_printing()
```

Das Gefangenendilemma

Definition der Auszahlungsmatrix für Spieler A (S^A):

```
In [2]: D_A=Matrix([[[-7,-1],[-9,-3]])
D_A
Out[2]:
[[-7 -1]
 [-9 -3]]
```

Da sich das Spiel um ein symmetrisches (2 Personen)-(2 Strategien) Spiel handelt, erhält man die Auszahlungsmatrix für Spieler B durch die transponierte Matrix des Spielers A ($S^B = (S^A)^T$):

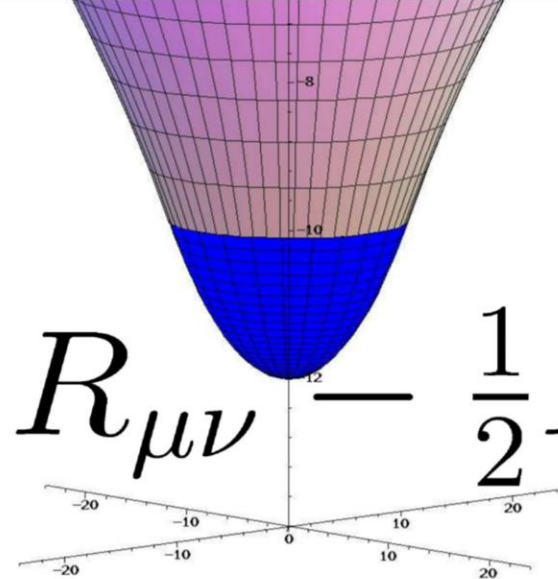
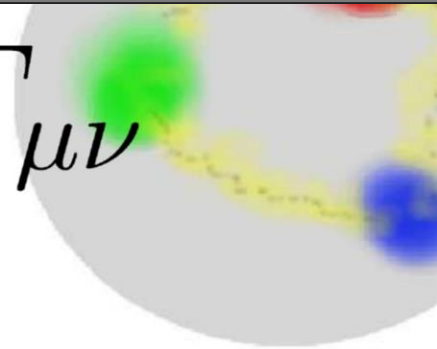
```
In [3]: D_B=transpose(D_A)
D_B
Out[3]:
[[-7 -9]
 [-1 -3]]
```

Unter Verwendung der gemischten Strategien (z^A, z^B) im (x, y) lässt sich eine gemischte Auszahlungsfunktion der Spieler (Spieler A: $S^A(x, y)$, Spieler B: $S^B(x, y)$) wie folgt definieren:

```
In [4]: def Dollar(x,y,DM):
GemischteAuszahlung=DM[0,0]*x*y+DM[0,1]*x*(1-y)+DM[1,0]*(1-x)*y+DM[1,1]*(1-x)*(1-y)
```

Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie

Vor etwa hundert Jahren (1915) stellte Albert Einstein seine „Allgemeine Relativitätstheorie“ (ART) der Öffentlichkeit vor.


$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$


Die ART ist eine sehr revolutionäre Theorie. Sie besagt, dass jegliche Energieformen (z.B. Masse eines Körpers) die „Raumzeit“ verbiegen und durch diese Krümmung des Raumes und der Zeit die Gravitation (Schwerkraft) resultiert. -> Raumzeit-Krümmung = Energie

Nach dem Gesagten ist ds eine von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig definierbare Größe, d. h. ein Skalar. ds spielt in

EINSTEIN: Die formale Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. 1033

wobei

$$ds^2 = - \sum_{\nu} dx_{\nu}^2 \quad (2)$$

gesetzt ist. Dabei ist $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ict$ gesetzt. ds ist das Differential der »Eigenzeit«, d. h. diese Größe gibt den Betrag an, um welchen die Angabe einer mit dem materiellen Punkt bewegten Uhr auf dem Wegelement (dx, dy, dz) vorschreitet. Die Variation in (1) ist dabei so zu bilden, daß die Koordinaten x_{ν} in den Endpunkten der Integration unverändert bleiben.

Führt man nun eine beliebige Koordinatentransformation aus, so bleibt Gleichung (1) bestehen, während an Stelle von (2) die allgemeinere Form

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_{\mu} dx_{\nu} \quad (2a)$$

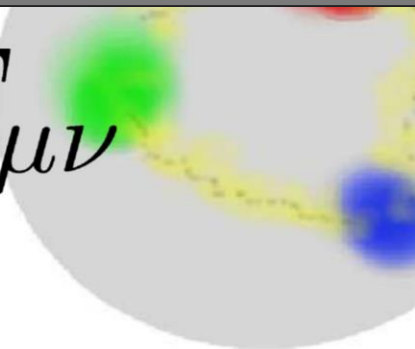
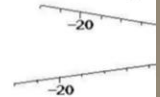
tritt. Die 10 Größen $g_{\mu\nu}$ sind dabei Funktionen von den x_{ν} , welche durch die angewandte Substitution bestimmt sind. Physikalisch bestimmen die $g_{\mu\nu}$ das in bezug auf das neue Koordinatensystem vorhandene Gravitationsfeld, wie aus den Überlegungen des vorigen Paragraphen hervorgeht. (1) und (2a) bestimmen daher die Bewegung eines materiellen

ie

Albert Einstein
(ART) der

$T_{\mu\nu}$

$R_{\mu\nu}$



Zur allgemeinen Relativitätstheorie.

VON A. EINSTEIN.

Die Feldgleichungen der Gravitation.

VON A. EINSTEIN.

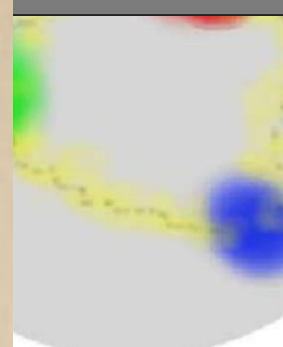
$$R_{im} = \sum_l \frac{\partial \Gamma_{im}^l}{\partial x_l} + \sum_{\xi^l} \Gamma_{i\xi}^l \Gamma_{ml}^{\xi} = -\kappa \left(T_{im} - \frac{1}{2} g_{im} T \right) \quad (6)$$

EINSTEIN: Zur allgemeinen Relativitätstheorie

779

mationen kovariant sein sollen, so ruht die hier darzulegende Theorie auf dem Postulat der Kovarianz aller Gleichungssysteme bezüglich Transformationen von der Substitutionsdeterminante 1.

Dem Zauber dieser Theorie wird sich kaum jemand entziehen können, der sie wirklich erfaßt hat; sie bedeutet einen wahren Triumph der durch GAUSS, RIEMANN, CHRISTOFFEL, RICCI und LEVI-CIVITER begründeten Methode des allgemeinen Differentialkalküls.

Einstein
der

Eichtheorien der fundamentalen Wechselwirkungen

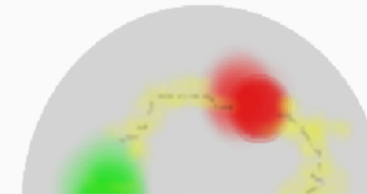
ART	<u>Yang-Mills-Theories</u>
$D_\beta v^\alpha = \partial_\beta v^\alpha + \Gamma_{\sigma\beta}^\alpha v^\sigma$	$D_{\beta a}{}^b = \partial_\beta 1_a{}^b + ig A_{\beta a}{}^b$
$R^\delta{}_{\mu\alpha\beta} v^\mu = [D_\alpha, D_\beta] v^\delta$	$F_{\alpha\beta a}{}^b = \frac{1}{ig} [D_{\alpha a}{}^c, D_{\beta c}{}^b]$
$R^\delta{}_{\mu\alpha\beta} = \Gamma_{\mu\alpha \beta}^\delta - \Gamma_{\mu\beta \alpha}^\delta$	$= A_{\beta a}{}^b _\alpha - A_{\alpha a}{}^b _\beta$

Quantum ChromoDynamic:

($SU(3)_{(c)}$ - Color Yang-Mills-Gauge Theory)

$$D_{\beta A}{}^B = \partial_\beta 1_A{}^B + ig G_{\beta A}{}^B$$

$A, B = \text{red, green, blue}$



$$\psi_A^f = \begin{pmatrix} \psi_r^f \\ \psi_g^f \end{pmatrix}$$

GR: Covariant derivative: $D_\nu v^\mu := v^\mu|_{|\nu} = v^\mu|_\nu + \Gamma_{\beta\nu}^\mu v^\beta$

Field strength: $R^\alpha{}_{\sigma\nu\mu} v^\sigma = -[D_\mu, D_\nu] v^\alpha = \left(\Gamma_{\sigma\nu|\mu}^\alpha - \Gamma_{\sigma\mu|\nu}^\alpha + \Gamma_{\beta\mu}^\alpha \Gamma_{\sigma\nu}^\beta - \Gamma_{\beta\nu}^\alpha \Gamma_{\sigma\mu}^\beta \right) v^\sigma$

Lagrangian: $\mathcal{L}_{GR} = R$

QCD: Covariant derivative: $D_{\mu a}{}^b \psi_b = \left(\partial_\mu 1_a{}^b + ig_3 G_{\mu i} \tau^i{}_a{}^b \right) \psi_b = \psi_a|_\mu + ig_3 G_{\mu a}{}^b \psi_b$

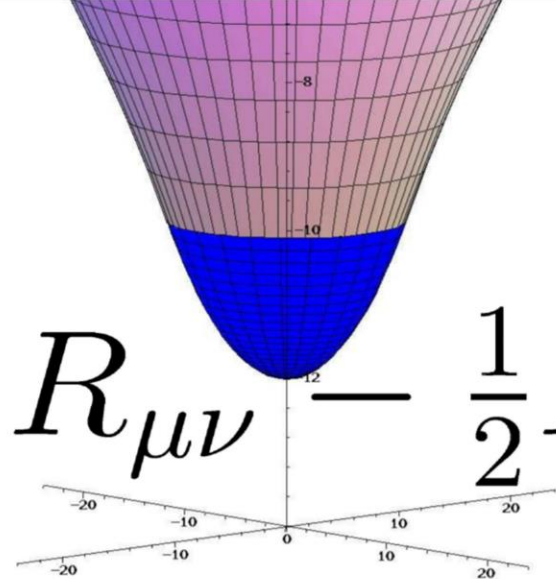
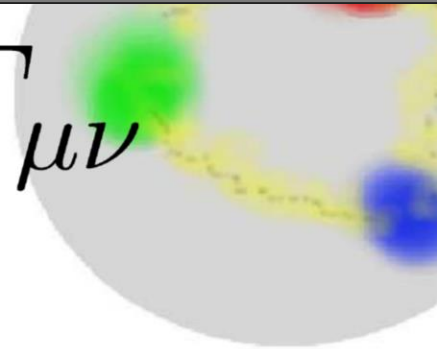
Field strength: $\mathcal{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu a}{}^b = \frac{i}{g_3} [D_{\mu a}{}^c, D_{\nu c}{}^b] = F_{\mu\nu i} \tau^i{}_a{}^b$

Field strength: $F_{\mu\nu i} = G_{\nu i|\mu} G_{\nu i|\mu} - g_3 f^{jk}{}_i G_{\mu j} G_{\nu k}$

Lagrangian: $\mathcal{L}_{QCD} = \frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu i} F^{\mu\nu i}$,

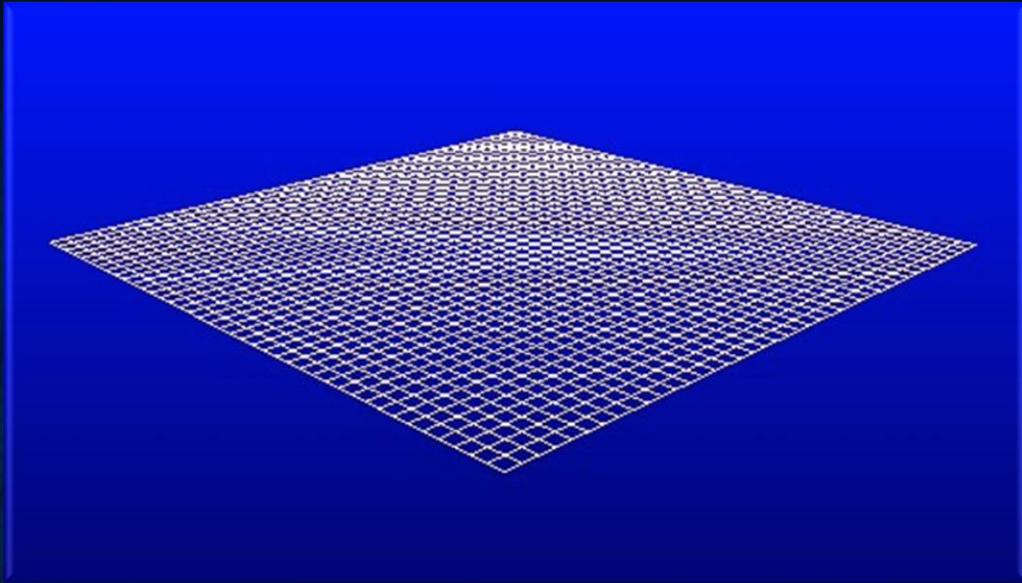
Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie

Vor etwa hundert Jahren (1915) stellte Albert Einstein seine „Allgemeine Relativitätstheorie“ (ART) der Öffentlichkeit vor.


$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$


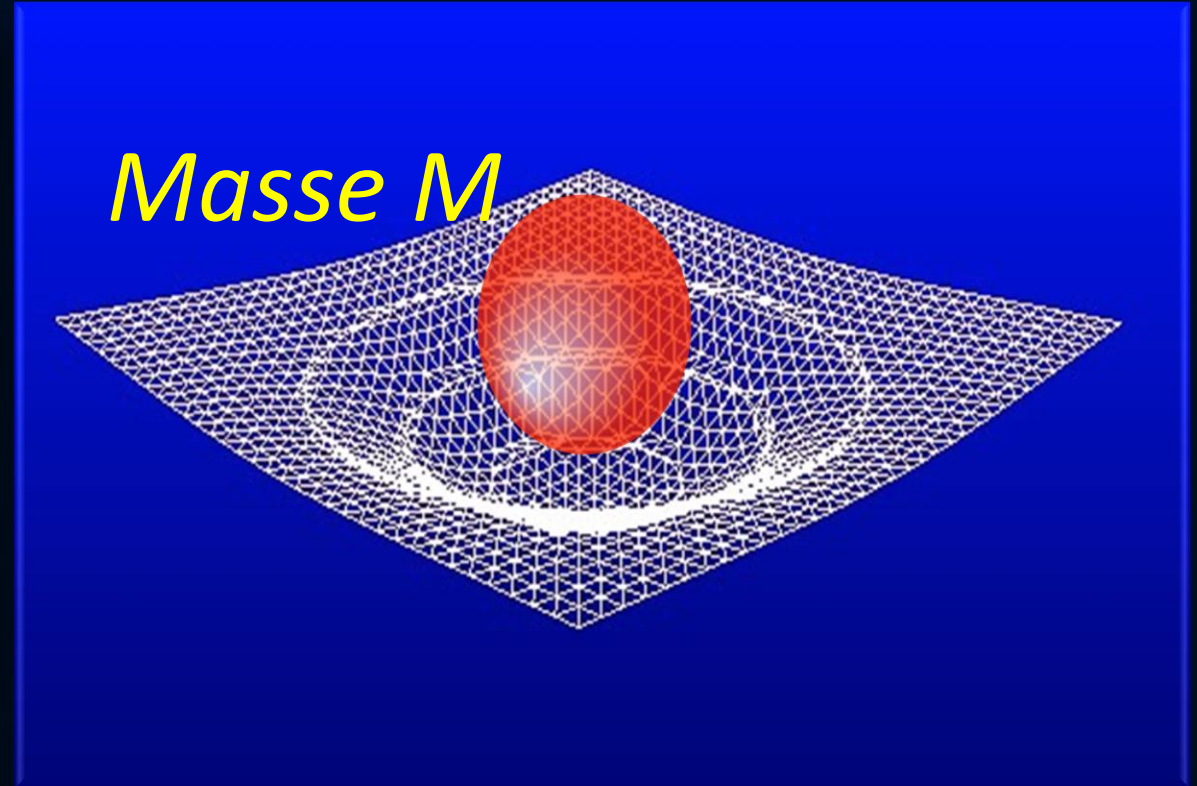
Die ART ist eine sehr revolutionäre Theorie. Sie besagt, dass jegliche Energieformen (z.B. Masse eines Körpers) die „Raumzeit“ verbiegen und durch diese Krümmung des Raumes und der Zeit die Gravitation (Schwerkraft) resultiert. -> Raumzeit-Krümmung = Energie

Was ist Raumzeit-Krümmung?



Flache Raumzeit

Raumzeit ohne Materie und Energie hat keine Krümmung



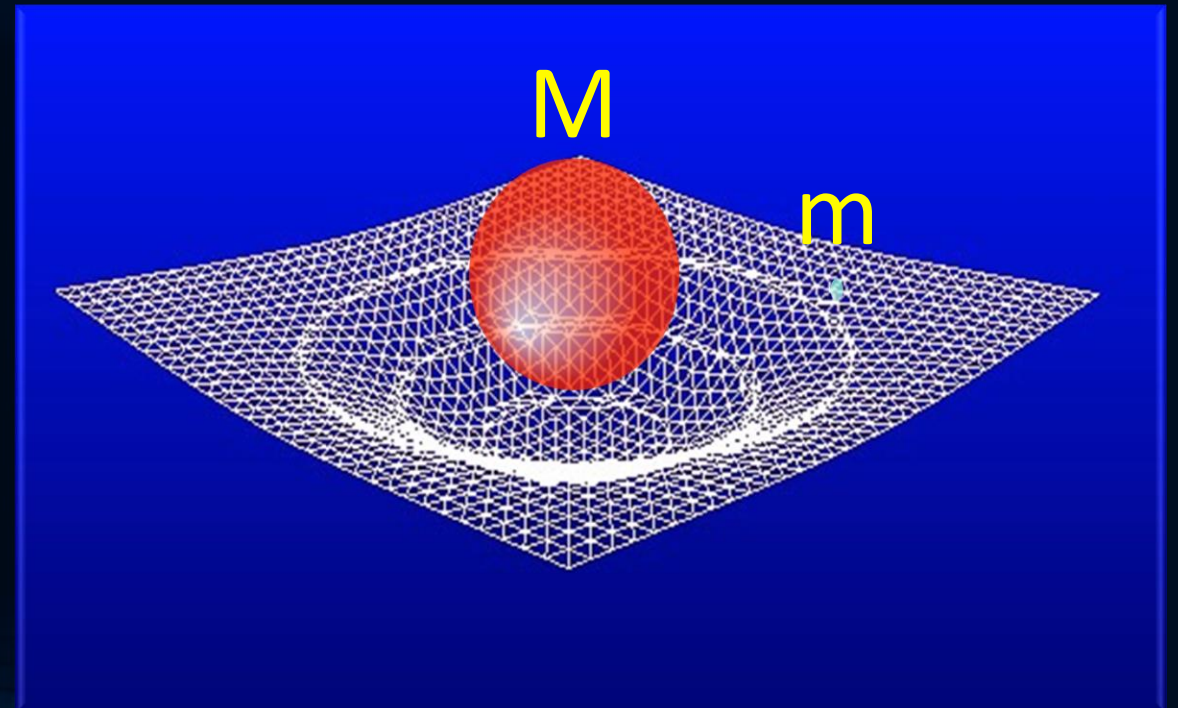
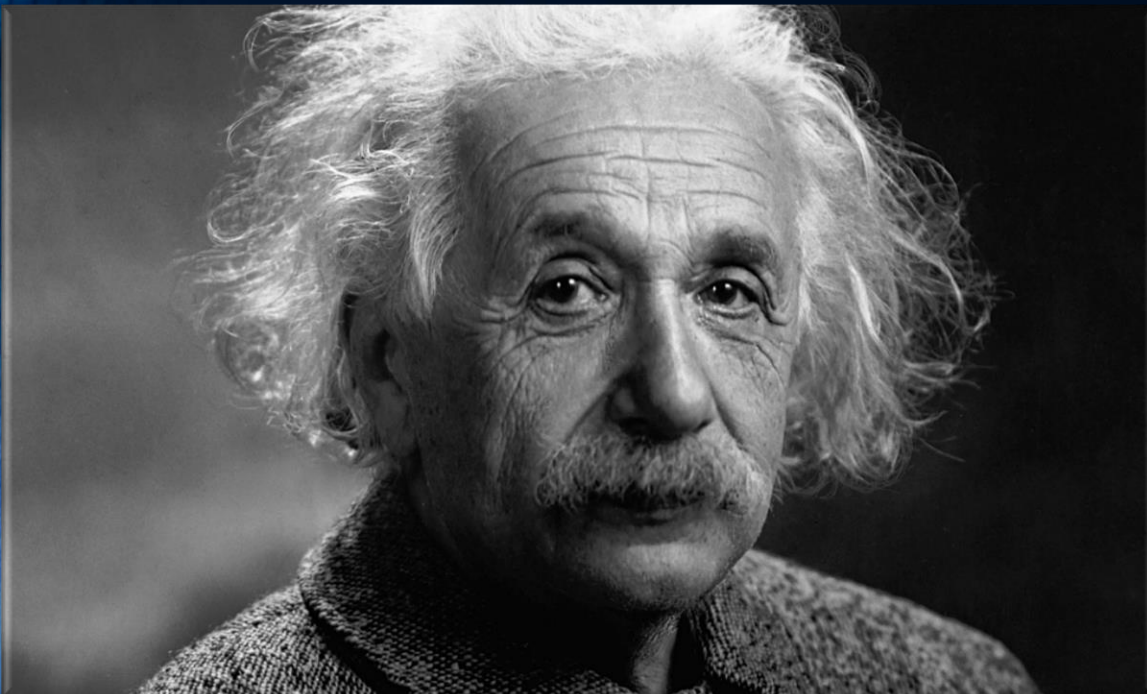
Gekrümmte Raumzeit

Raumzeit mit Materie verbiegt sich

Raumzeit-Krümmung ist Gravitation?

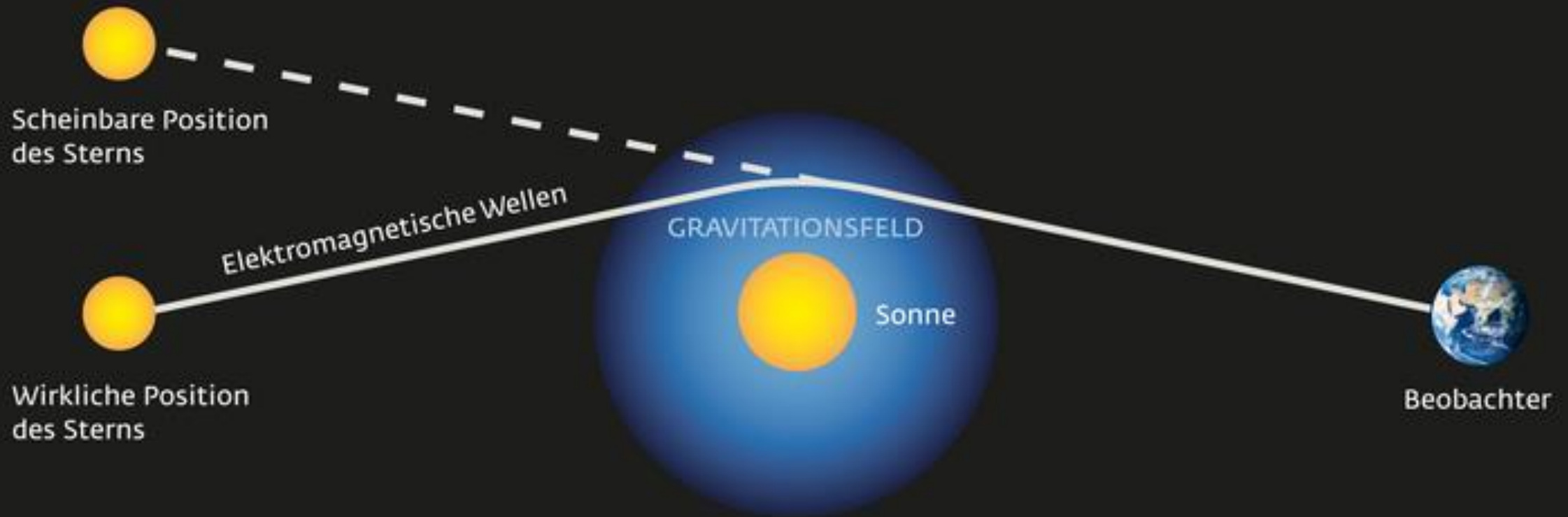
Betrachten wir einen Objekt kleiner Masse m das um ein Objekt großer Masse M kreist (z.B. Erde um die Sonne)

Einstein: Die Krümmung der Raumzeit, verursacht durch die große Masse, bestimmt die Umlaufbahn des kleinen Körpers und ist ursächlicher Grund der gravitativen Wechselwirkung



Erste Bestätigung der ART: Sonnenfinsternis 1919

Aufgrund des extrem revolutionären Charakters der ART glaubten viele Physiker zunächst nicht an Einsteins Theorie. Das änderte sich schlagartig im Jahre 1919:



Der Einstein-Ring



LRG 3-757: im Jahre 2007 mit dem Hubble Space Teleskop aufgenommen

Gravitative Zeitdilatation

Den Effekt der Zeitverbiegung kann man heutzutage sogar auf der Erde nachweisen -> Uhren ticken in den Bergen ein wenig schneller als im Tal.

News
12.02.2018
[Drucken](#)
[Teilen](#)

RELATIVITÄTSTHEORIE

Warum die Zeit im Gebirge schneller vergeht

Mit einem surrealen Effekt der Gravitationsphysik haben Wissenschaftler die Höhe eines Tunnels in den französischen Alpen bestimmt.

von Robert Gast



© ISTOCK / SKOUATROULIO (AUSSCHNITT)

2018 auf www.spektrum.de

Frankfurter Allgemeine

Physik & Mehr

WIZIN GENE KLIMA WELTRAUM GARTEN NETZRÄTSEL

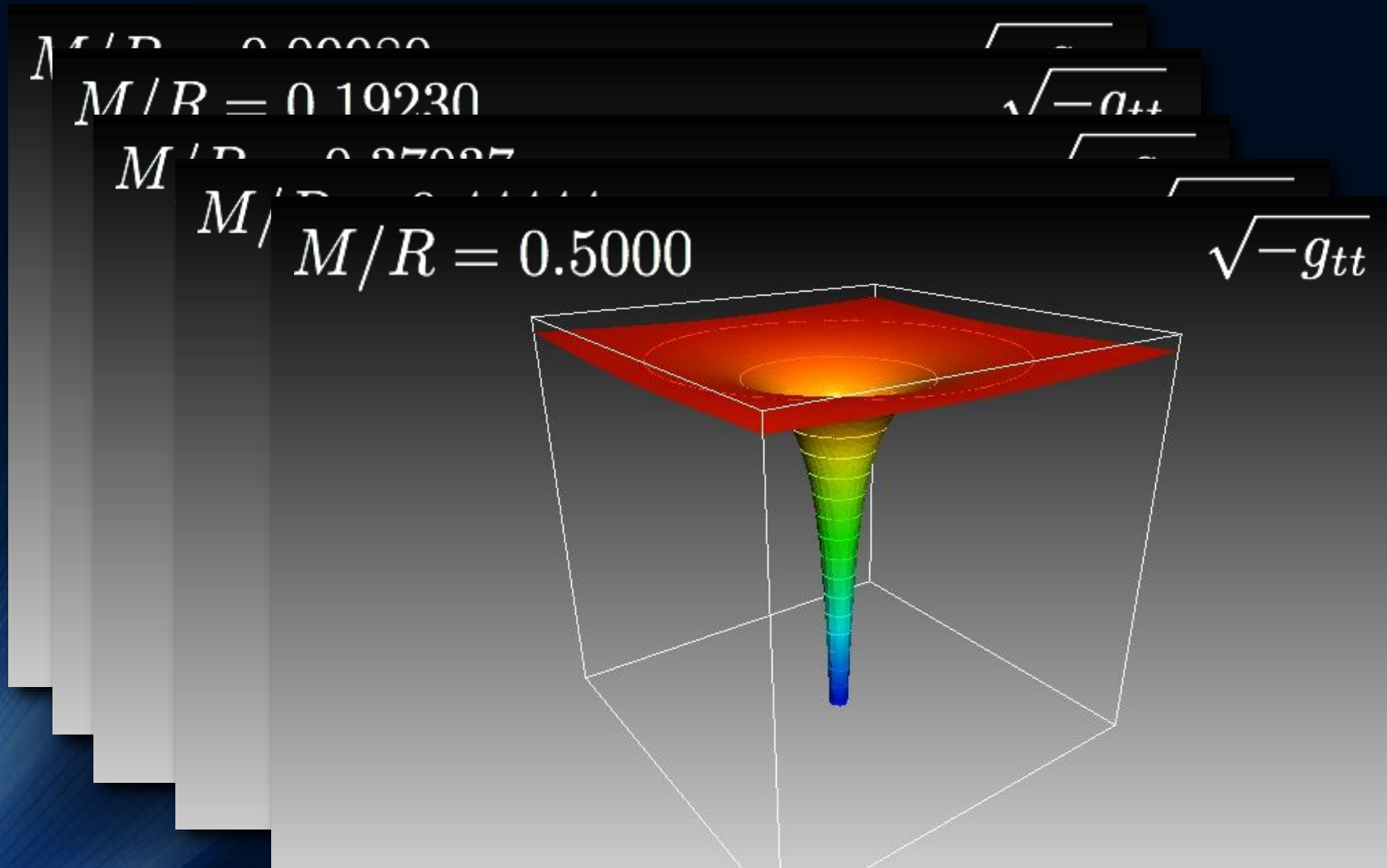
ALLGEMEINE RELATIVITÄTSTHEORIE

Hurra, wir hier unten leben länger!

VON ANNE HARDY · AKTUALISIERT AM 19.10.2010 · 06:00



Was sind schwarze Löcher?



Wir sind über den Grenzwert gekommen und haben ein schwarzes Loch erzeugt!

Grenzwert der Krümmung: Stabile Objekte (Neutronensterne) sind nicht mehr möglich

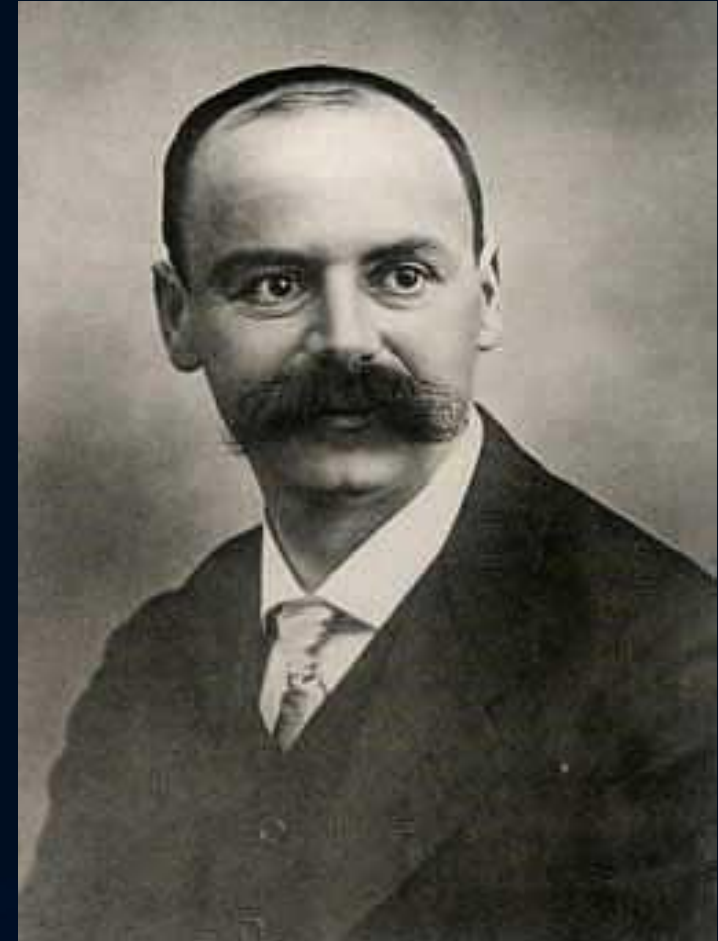
Die Schwarzschild Lösung

1915 Einsteins Gravitation:
Krümmung der „Raumzeit“

1916 Karl Schwarzschild:

... geboren 1873 in Frankfurt nahe dem Haus der Rothschild's. Erste Lösung der ART – drei Monate nach Einsteins Artikel! Aussenraummetrik eines nichtrotierenden schwarzen Loches.

Schwarzschild stirbt einen Monat später an einer Infektion die er sich an der russischen Front einfing...



Was sind schwarze Löcher?

... und wie können wir sie wahrnehmen?



INSPIRAL

MERGER

RINGDOWN

HANFORD, WASHINGTON
LIVINGSTON, LOUISIANA

Wie sieht das schwarze Loch im Zentrum unserer Galaxie aus?



Nobel Preis 2020

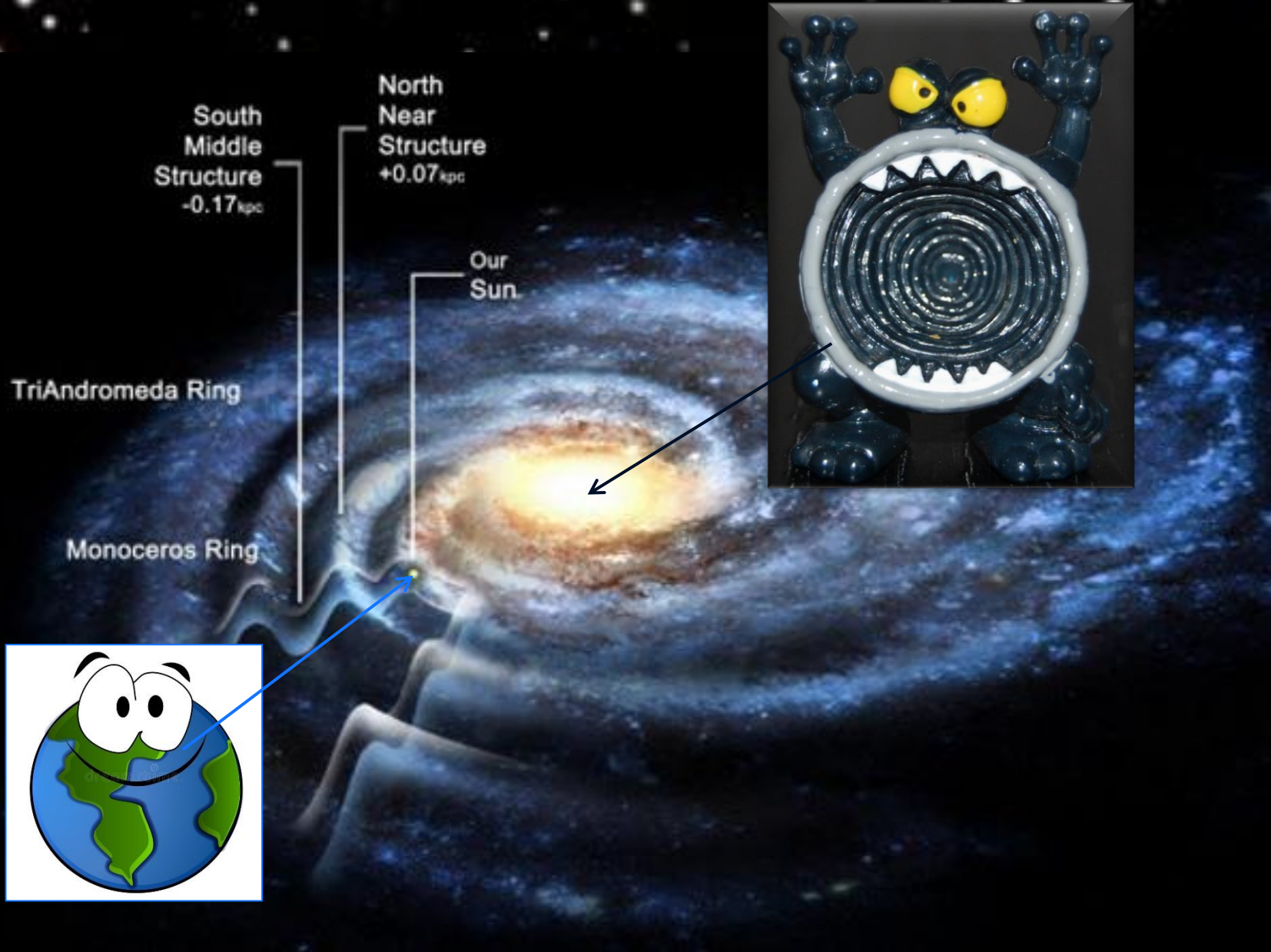
IN PHYSICS 2020

Illustrations: Niklas Elmehed



Für die Entdeckung, dass die Bildung von Schwarzen Löchern eine robuste Vorhersage der allgemeinen Relativitätstheorie ist (R. Penrose) und die Entdeckung eines supermassiven kompakten Objekts im Zentrum unserer Galaxie (R. Genzel und).

Das schwarze Loch im Zentrum unserer Galaxie





2009

Gaswolke G2 fällt in das Schwarze Loch



PHYSIKALISCHES KOLLOQUIUM

des Fachbereichs Physik
der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt

Mittwoch, den 11.04.2018, 16 Uhr c.t.
Großer Hörsaal, Raum _0.111,
Max-von-Laue-Str. 1



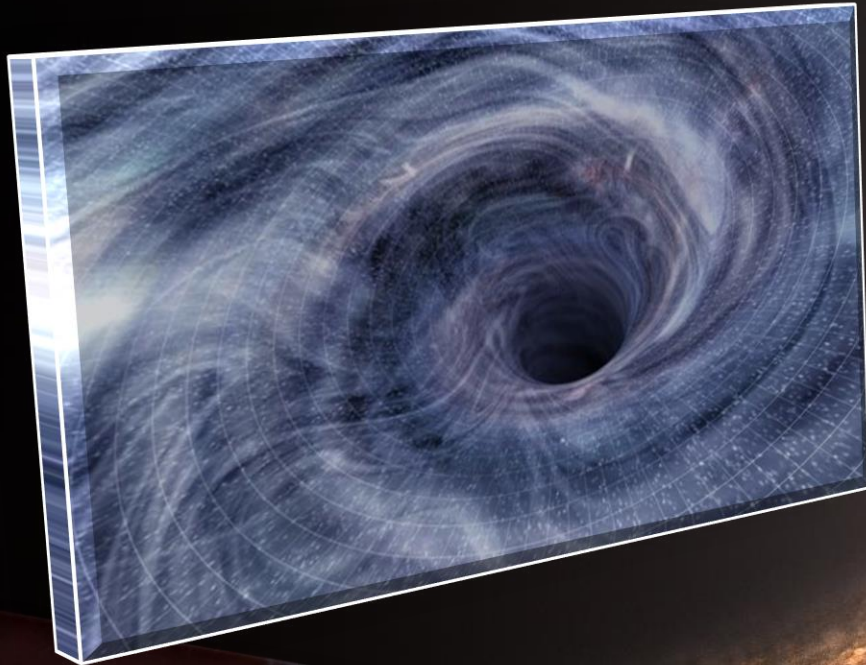
Dr. Stefan Gillessen

Max-Planck-Institut für extraterrestrische Physik,
Garching

"The Galactic Center: A unique astrophysical laboratory"

Located at a distance of 8kpc only, the Galactic Center allows studying a galactic nucleus in unparalleled detail. With the advent of high-resolution, near-infrared instrumentation in the last decade it became possible to follow individual stellar orbits around the radio source Sgr A* with orbital periods as short as 12 years. The orbits provide compelling evidence for the massive black hole paradigm. The next generation near-infrared instrument GRAVITY aims at interferometrically combining the light of the four telescopes of ESO's VLT. The higher resolution will allow monitoring stellar orbits with orbital periods of 1 year only, and the relativistic prograde periastron precession gets accessible. The astrometric accuracy of GRAVITY is of order of the event horizon size of Sgr A*. This means that we might have access to measuring the spin of Sgr A*. In the past few years the small gas cloud G2 has been approaching Sgr A*. We were able to follow the tidal evolution of G2 for a decade, beautifully showing how the object got stretched ever more and how it passed the point of closest approach in 2014. The cloud is a unique probe of Sgr A*'s atmosphere.

Was sind schwarze Löcher?



und wie sehen sie aus?



Wie sieht das schwarze Loch im Zentrum unserer Galaxie aus?



Das EU-Projekt **BlackHoleCam**
L.Rezzolla, H.Falke und M.Kramer

Das Bildnis des schwarzen Loches

(wie wird das wirkliche Bildnis des schwarzen Loches im Zentrum der Milchstrasse aussehen?)



*Simulationen
erstellt von
Dr. Ziri Younsi*

Für das Foto eines Schwarzen Lochs: Ein Teleskop so groß wie die Erde

Bonn. Die Theorie ist 100 Jahre alt, der Begriff genau 50: Schwarze Löcher. Gesehen hat sie noch keiner. Nun sollen Fotos gemacht werden. Vor allem vom Schwarzen Loch im Zentrum unserer Milchstraße, genannt Sagittarius A*, und einigen Artgenossen in fernerer Galaxien. Federführend mit dabei ist das Bonner Max-Planck-Institut für Radioastronomie (MPIfR). In diesen Stunden beginnen die Beobachtungen.

Event Horizon Telescope



1 von 13

Das internationale ALMA-Teleskop (oben) steht in 5000 Meter Höhe in den chilenischen Anden. Es besteht aus 66 „Schüsseln“ zwischen 7 und 12 Metern Durchmesser. Sie empfangen Wellen im Millimeter- und Submillimeterbereich.

Schmahl
Gartengeräte * Werkzeuge
www.schmahl-koblenz.de


Katholisches Klinikum
Koblenz - Montabaur

Ihre Fragen, Hinweise oder Kritik



Onliner vom Dienst:
Marcus Schwarze
Anzeigen:
0261/98362003
Abo: 0261/9836 2000
Red.: 0160/97829699
Mail | Twitter | Brief

 **E-Paper**

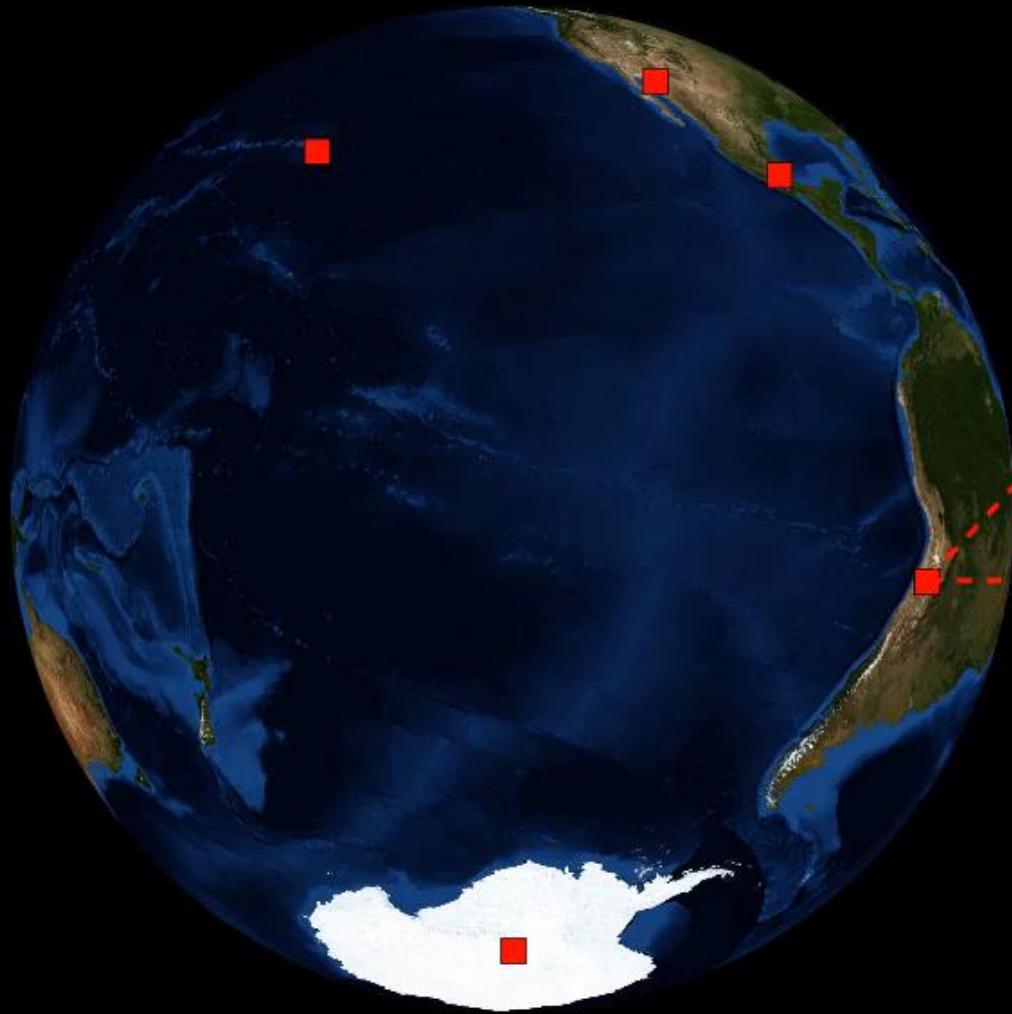
Die Lokalausgaben
der Rhein-Zeitung



News aus Ihrer Region - Lokalteil wählen



Event Horizon Telescope



Atacama Large
Millimeter Array (ALMA)



Coordinates: $23^{\circ} 01' 09''\text{S}$, $67^{\circ} 45' 12''\text{W}$

Diameter: 12m

Das EHT ist ein
virtuelles Radioteleskop
der Größe der Erde

Das Event Horizon Teleskop (EHT) ist eine hochgradig internationale Kooperation von Radioteleskopen die mittels Langbasisinterferometrie das erste Bild eines schwarzen Loches aufzeichnen konnte

*Python-Animation erstellt
von Dr. Christian Fromm*

Bilder von zwei schwarzen Löchern werden erwartet

(Stand 04.2017)

	M87	Sgr A*
Mass (M_{sun})	$3-6 \times 10^9$ (?)	4×10^6
Distance	16 Mpc	8.5 kpc
Luminosity	10^{44} erg/s	10^{36} erg/s
Mdot (M_{edd})	10^{-4}	10^{-8}
BH Spin Axis	Gal disk?	10-25 deg los
@ the BH?	Maybe	Yes
B field @ BH	60-130 G	10-100 G
Scattered?	No	yes
Shadow Size	640 AU	0.5 AU
Shadow Angle	20-40 μas	52 μas
GM/c ³	8 hrs	20 sec
Jet Power	$10^{42}-10^{43}$ erg/s	?

Die ersten Bilder eines Schwarzen Lochs

Ein Meilenstein in der Geschichte der Astronomie

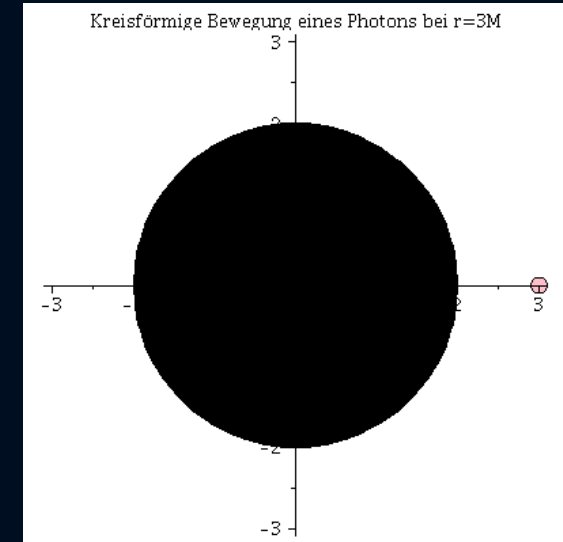
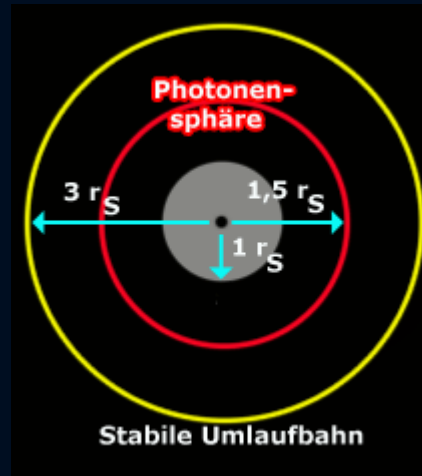
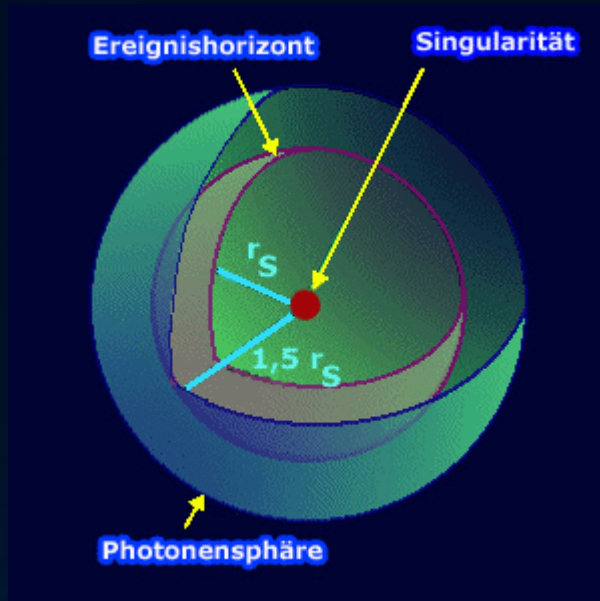
Ein wenig mehr als hundert Jahre nachdem Albert Einstein seine Feldgleichungen der *Allgemeinen Relativitätstheorie* formulierte, und er damit die Grundlage für Gravitationswellen und schwarzer Löcher legte, wurde im Jahre 2019 das erste Bild eines schwarzen Lochs (siehe rechte Abbildung) der Öffentlichkeit präsentiert.



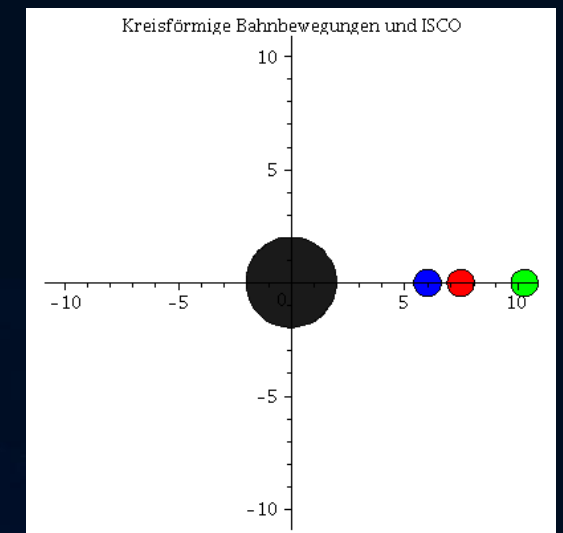
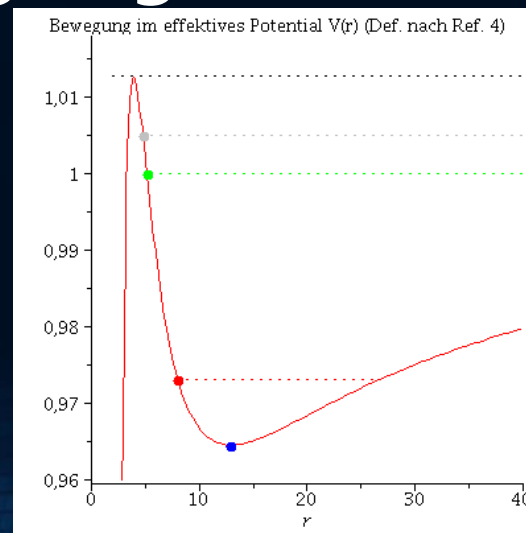
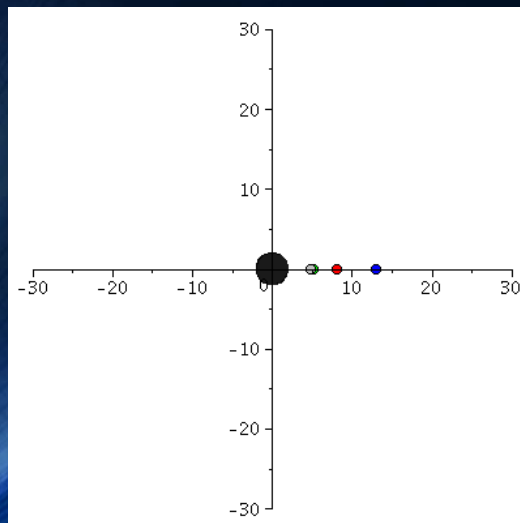
YouTube Video: https://www.youtube.com/watch?v=Zh5p9Sro_VU&list=PLn5gYfEKlag8nps1GKLqUW35AOgQY7aM2

Anlässlich der bahnbrechenden Aufnahme des ersten Bildes eines schwarzen Lochs im Zentrum unserer Nachbargalaxie M87, wurde am 17. April 2019 um 20 Uhr ein öffentlicher, populärwissenschaftlicher Abendvortrag im Otto Stern Zentrum (OSZ H1) am Campus Riedberg der Goethe Universität gehalten. Es sprachen die drei „Principal Investigators“ des europäischen Black Hole Cam-Projekts (L.Rezzolla, M.Kramer und H.Falke), welches neben der EHT-Kollaboration für das Bild verantwortlich ist.

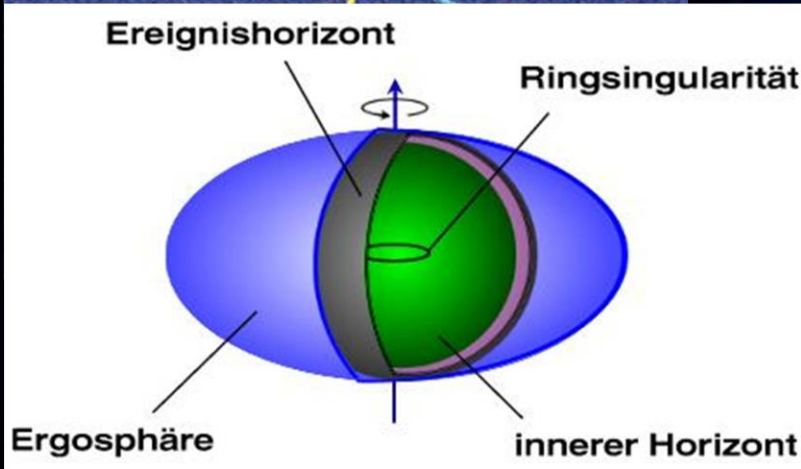
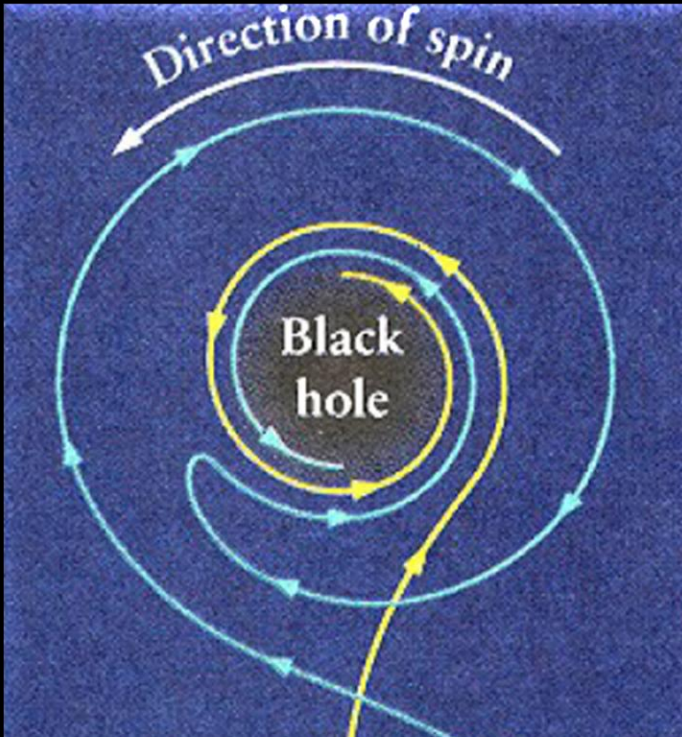
Die Photonen-Sphäre eines schwarzen Loches



Geodätische Bewegungen um ein schwarzen Loch



Rotierende schwarze Löcher



Falling into a black hole (Realistic Ultra HD 360 VR movie) [8K]

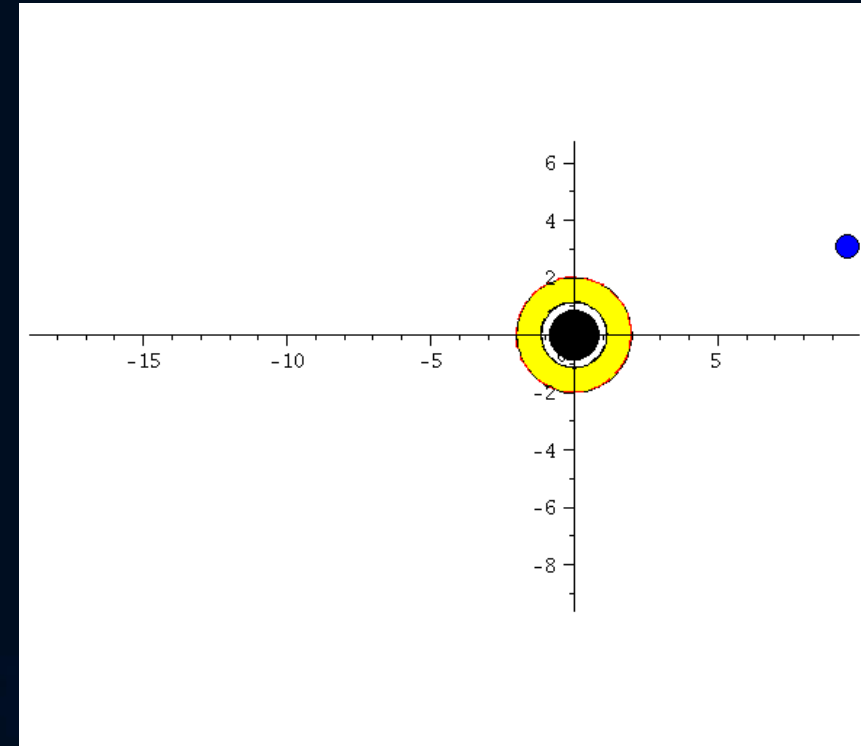
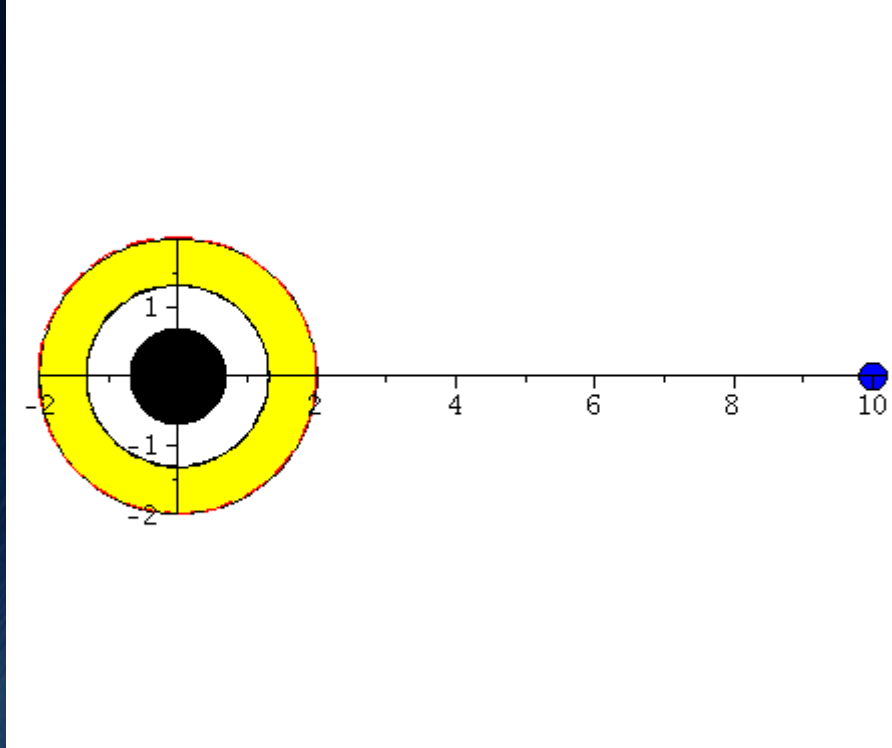
3D-Movie erstellt von

Dr. Ziri Younsi

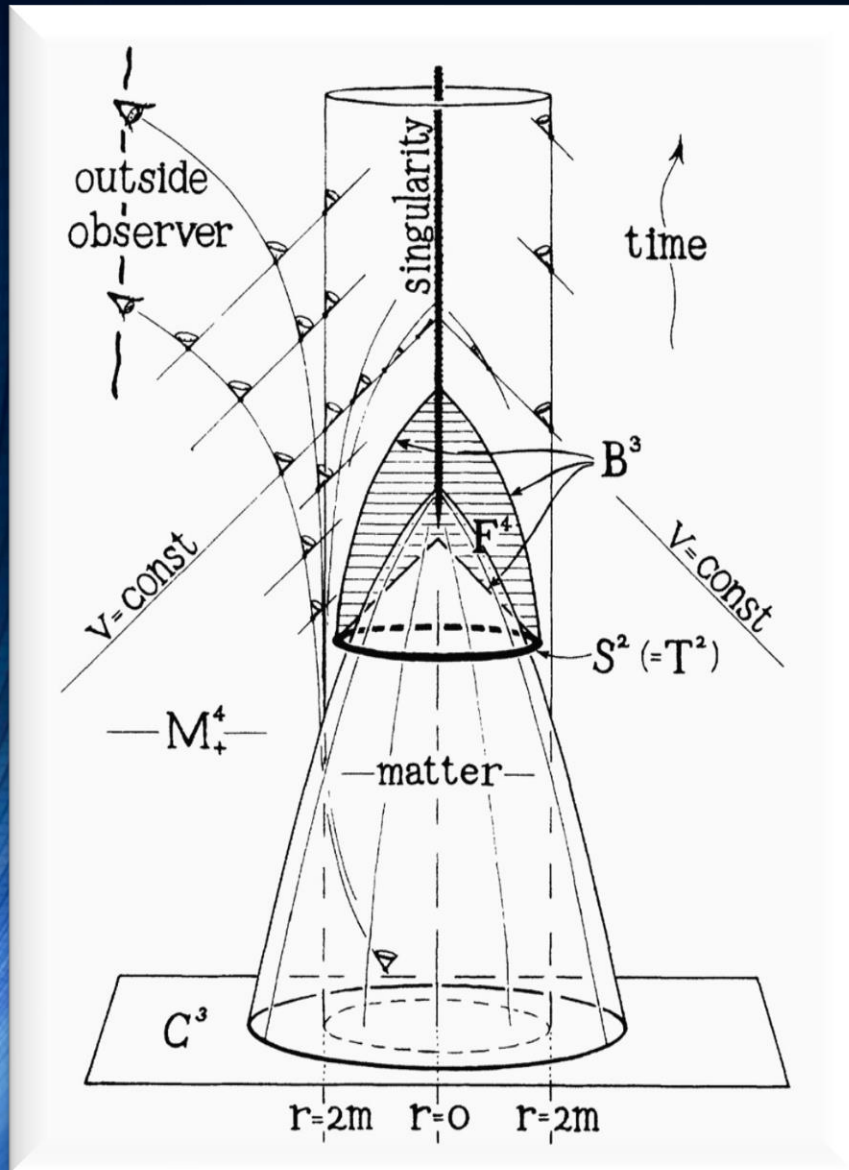
https://youtu.be/S6qw5_YA8iE



Rotierende schwarze Löcher



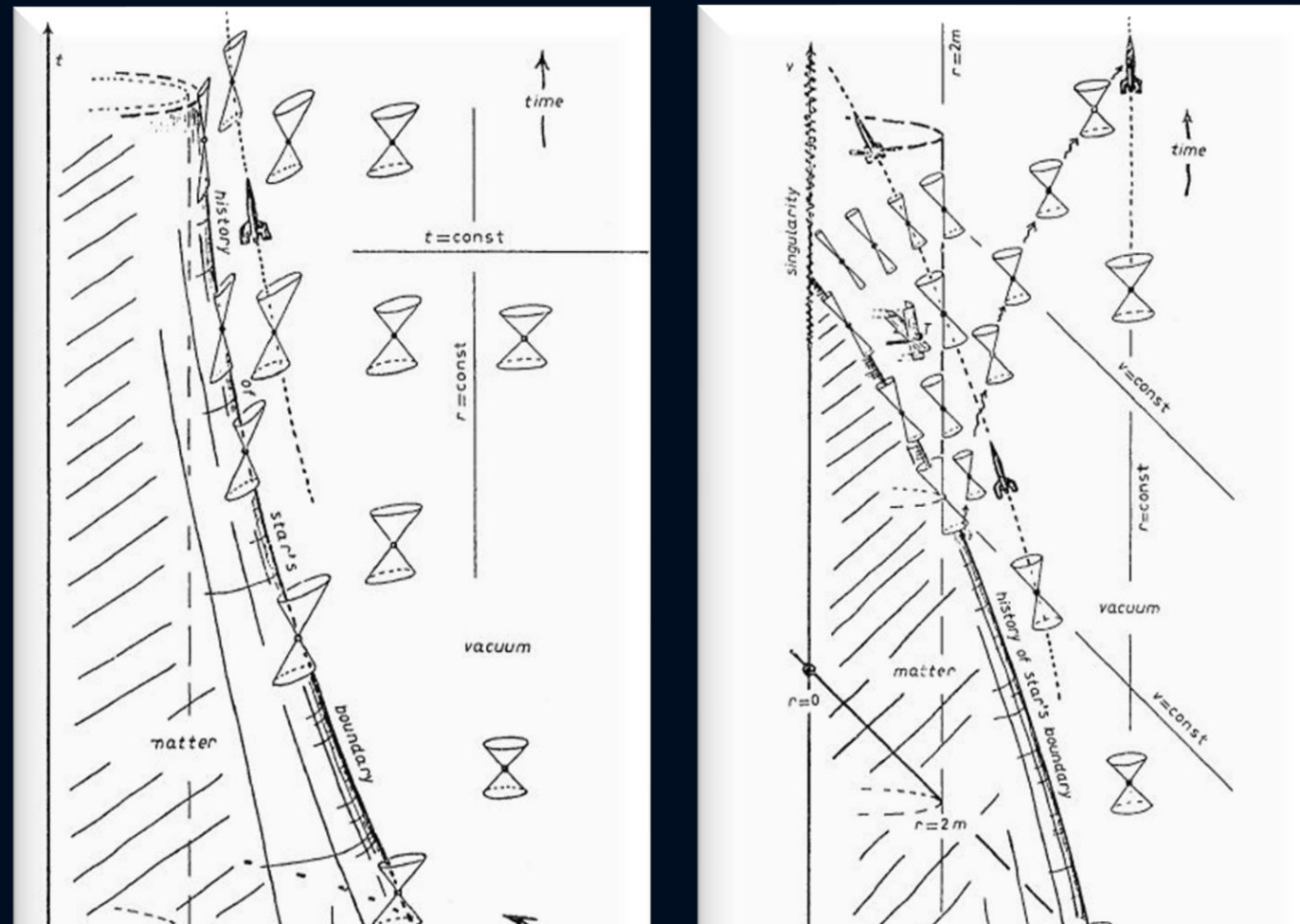
Wie entstehen schwarze Löcher ?



Self-drawn space-time diagram by R. Penrose (1965)

GRAVITATIONAL COLLAPSE AND SPACE- TIME SINGULARITIES

Nobel Price 2020: R. Penrose, PRL Vol.14 No.3 (1965)



R. Penrose: Nobel Preis 2020 für die Entdeckung, dass die Bildung von Schwarzen Löchern eine robuste Vorhersage der allgemeinen Relativitätstheorie ist

R. Penrose in Rivista del Nuovo Cimento, Num. Spez. I, 257 (1969)

Teil I

Analytische Berechnungen und numerische Simulationen mit Python und Maple

Basierend auf der Einstein- und Geodätengleichung werden im ersten Teil der Vorlesung unterschiedliche Probleme der allgemeinen Relativitätstheorie analysiert.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi T_{\mu\nu}$$

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0$$

Nichtrotierende schwarze Löcher

Ereignishorizonte, was geschieht wenn ein Teilchen in ein schwarzes Loch fällt, Bewegung von Probekörpern und Lichtteilchen um ein schwarzes Loch,...

Rotierende schwarzen Löchern

Mitführungseffekt der Raumzeit (frame-dragging),...

Eigenschaften von Neutronensternen

Verlauf der Dichte innerhalb eines NS, Masse-Radius Beziehung, Raumzeitkrümmung innerhalb und ausserhalb eines NS,...

Zeitliche Entwicklung des Universums

(Robertson-Walker-Metrik, Friedmann-Gleichung)

Erzeugung eines schwarzen Loches

(Oppenheimer-Snyder Kollaps einer Staubwolke)

Über Gravitationswellen.

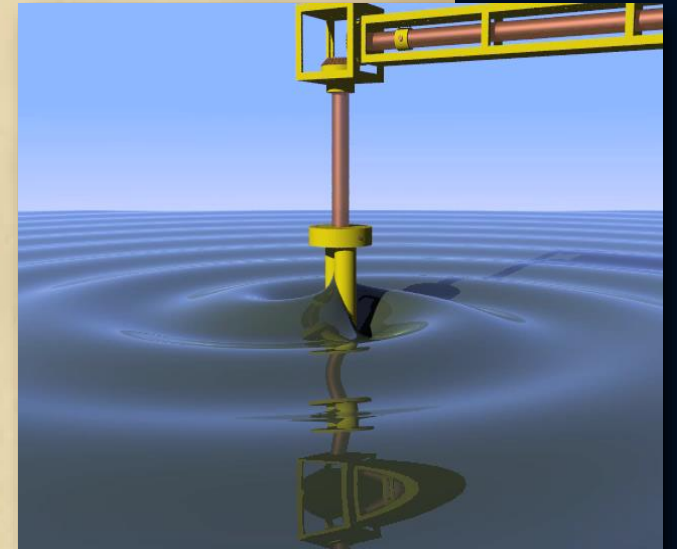
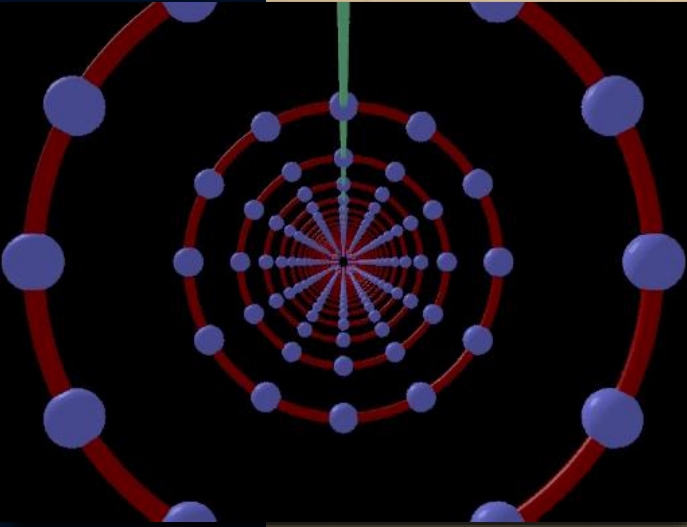
Von A. EINSTEIN.

(Vorgelegt am 31. Januar 1918 [s. oben S. 79].)

Die wichtige Frage, wie die Ausbreitung der Gravitationsfelder erfolgt, ist schon vor anderthalb Jahren in einer Akademiearbeit von mir behandelt worden¹. Da aber meine damalige Darstellung des Gegenstandes nicht genügend durchsichtig und außerdem durch einen bedauerlichen Rechenfehler verunstaltet ist, muß ich hier nochmals auf die Angelegenheit zurückkommen.

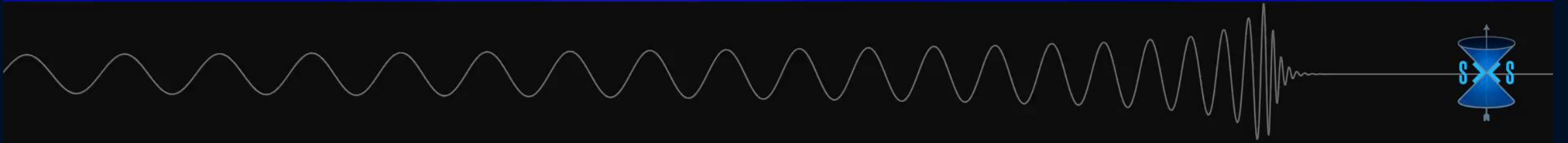
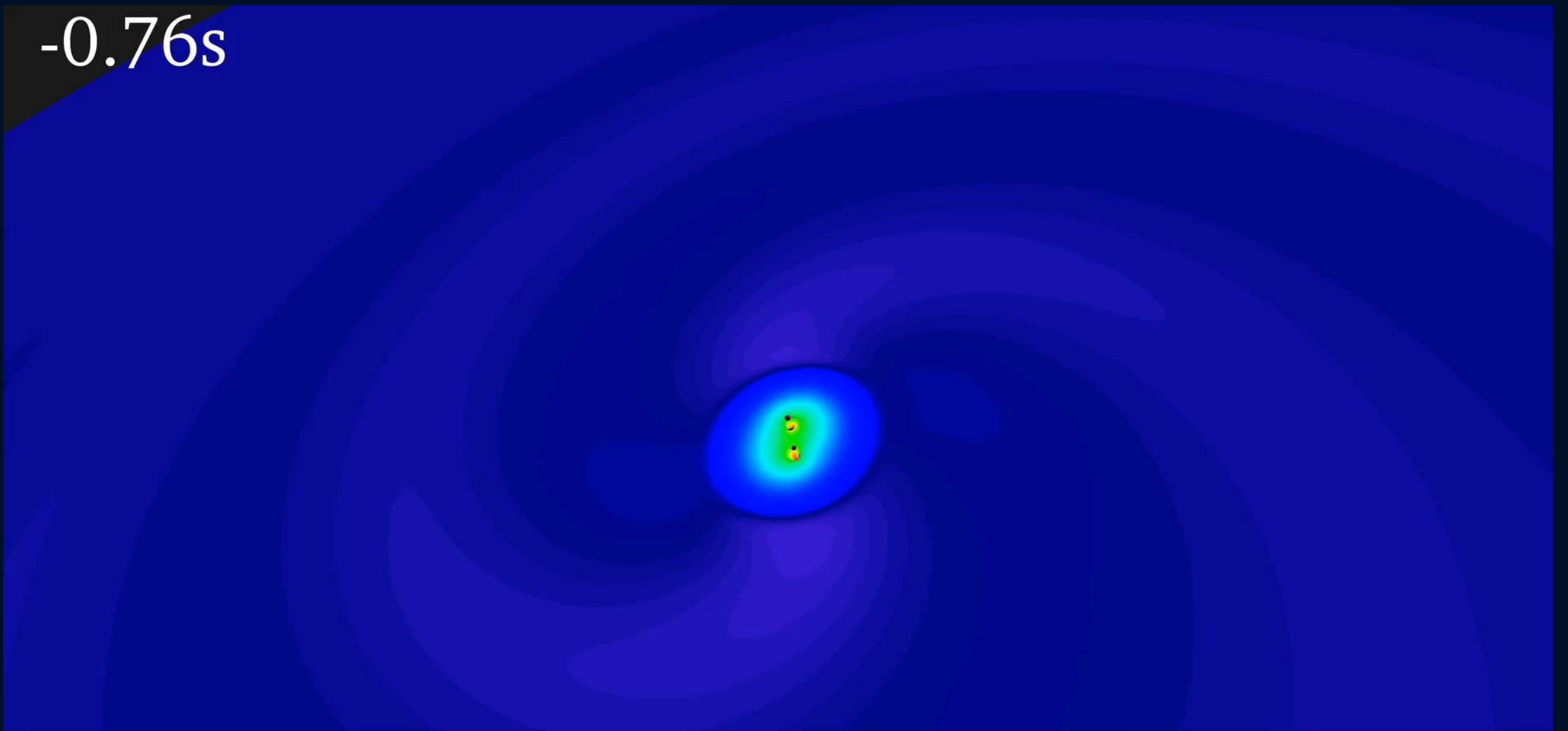
Einsteins erste Arbeit über Gravitationswellen

Sitzungsberichte der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften



Kollidierende Schwarze Löcher

-0.76s



100 Jahre später LIGO:

LIGO: Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory

PRL **116**, 061102 (2016)

 Selected for a **Viewpoint** in *Physics*
PHYSICAL REVIEW LETTERS

week ending
12 FEBRUARY 2016



Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger

B. P. Abbott *et al.**

(LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration)

(Received 21 January 2016; published 11 February 2016)

On September 14, 2015 at 09:50:45 UTC the two detectors of the Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory simultaneously observed a transient gravitational-wave signal. The signal sweeps upwards in frequency from 35 to 250 Hz with a peak gravitational-wave strain of 1.0×10^{-21} . It matches the waveform predicted by general relativity for the inspiral and merger of a pair of black holes and the ringdown of the resulting single black hole. The signal was observed with a matched-filter signal-to-noise ratio of 24 and a false alarm rate estimated to be less than 1 event per 203 000 years, equivalent to a significance greater than 5.1σ . The source lies at a luminosity distance of 410_{-180}^{+160} Mpc corresponding to a redshift $z = 0.09_{-0.04}^{+0.03}$. In the source frame, the initial black hole masses are $36_{-4}^{+5} M_{\odot}$ and $29_{-4}^{+4} M_{\odot}$, and the final black hole mass is $62_{-4}^{+4} M_{\odot}$, with $3.0_{-0.5}^{+0.5} M_{\odot} c^2$ radiated in gravitational waves. All uncertainties define 90% credible intervals. These observations demonstrate the existence of binary stellar-mass black hole systems. This is the first direct detection of gravitational waves and the first observation of a binary black hole merger.



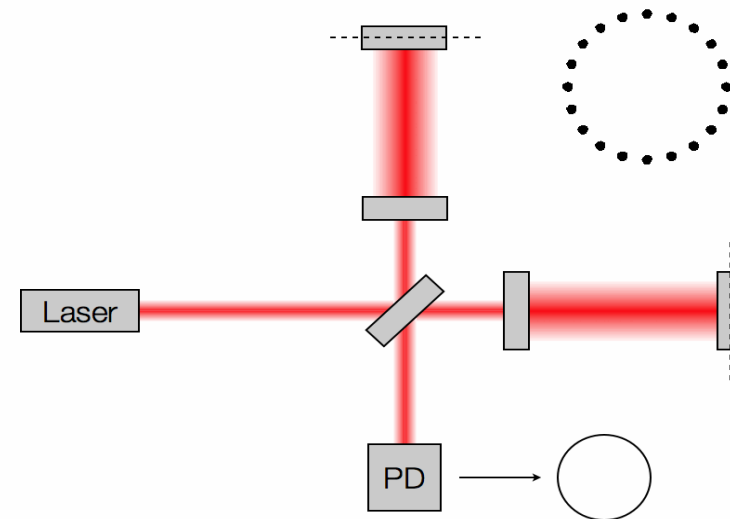
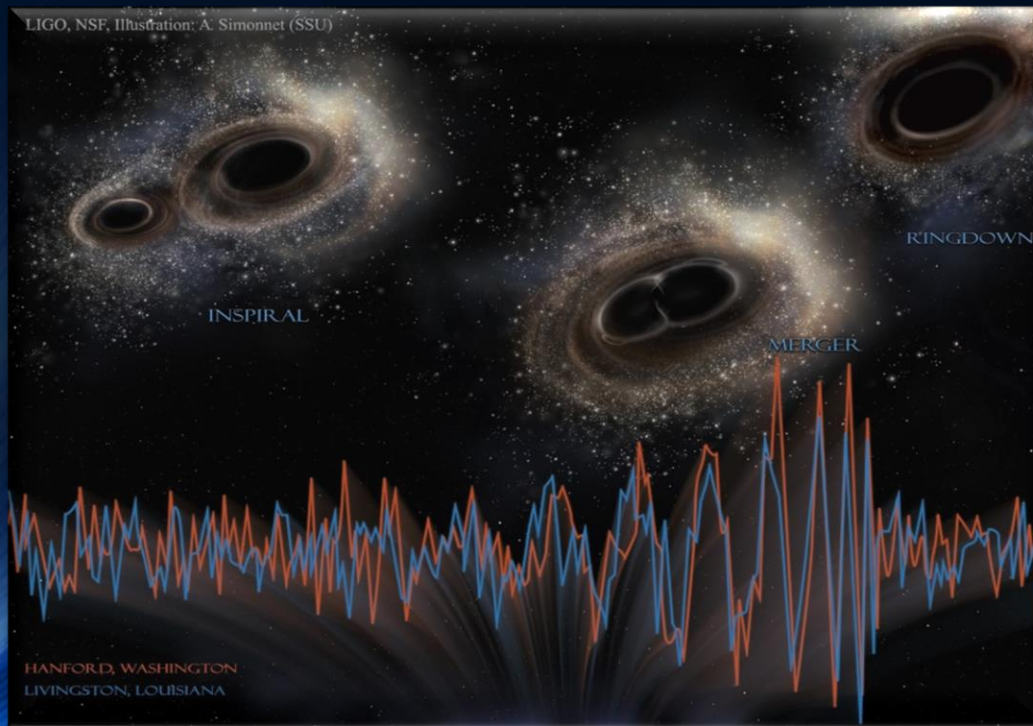
1. Direkter Nachweis von Gravitationswellen
Signalform: Verschmelzung von zwei schwarzen Löchern

Gravitationswellen gefunden: LIGO!!!

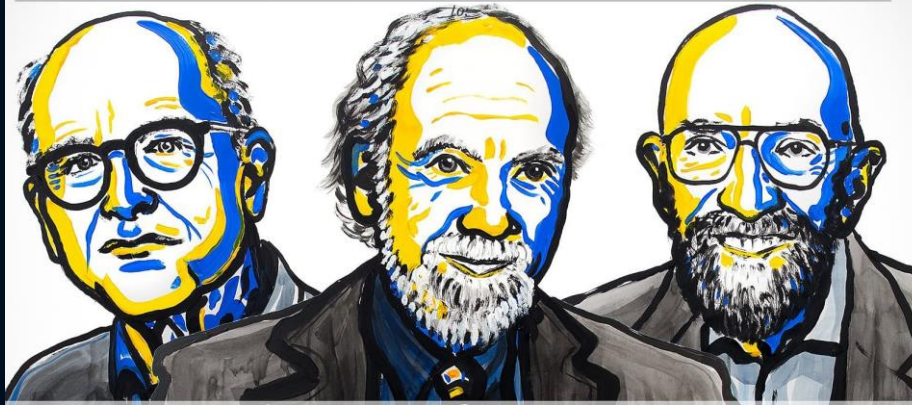
Kollision zweier Schwarzer Löcher GW150914

Massen: 36 & 29 Sonnenmassen

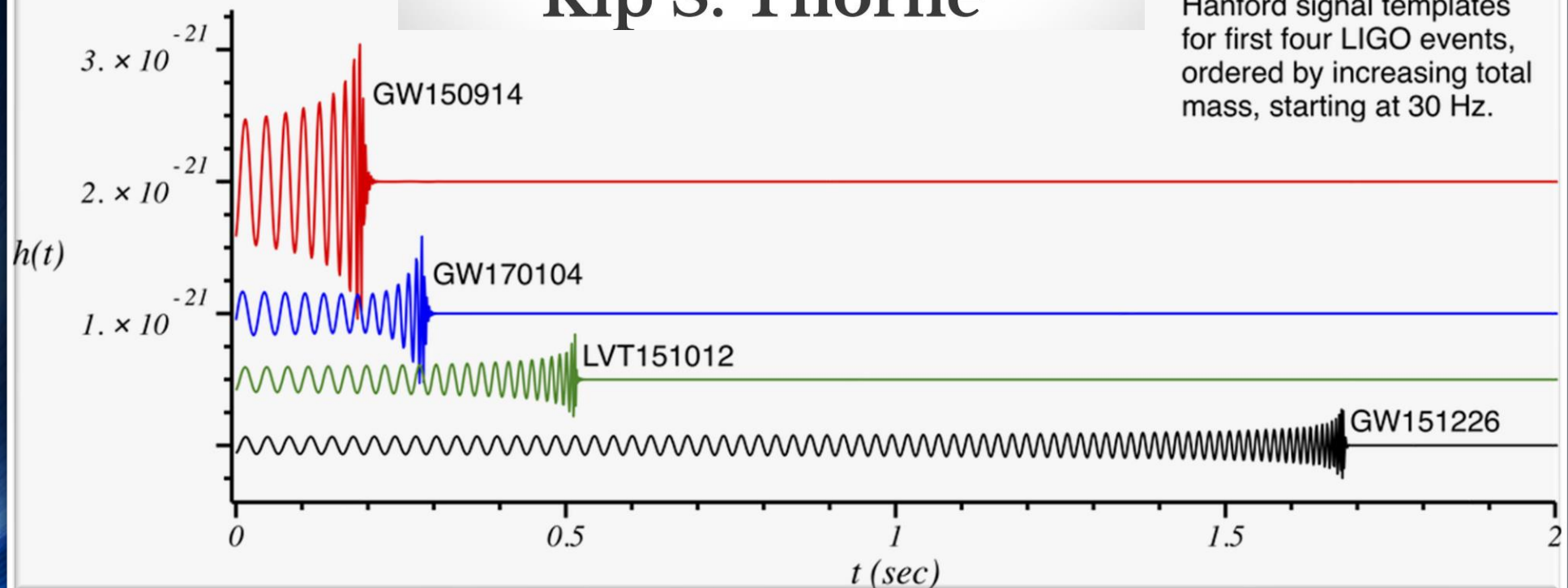
Abstand zur Erde 410 Mpc
(1.34 Milliarden Lichtjahre)



2017 NOBEL PRIZE IN PHYSICS



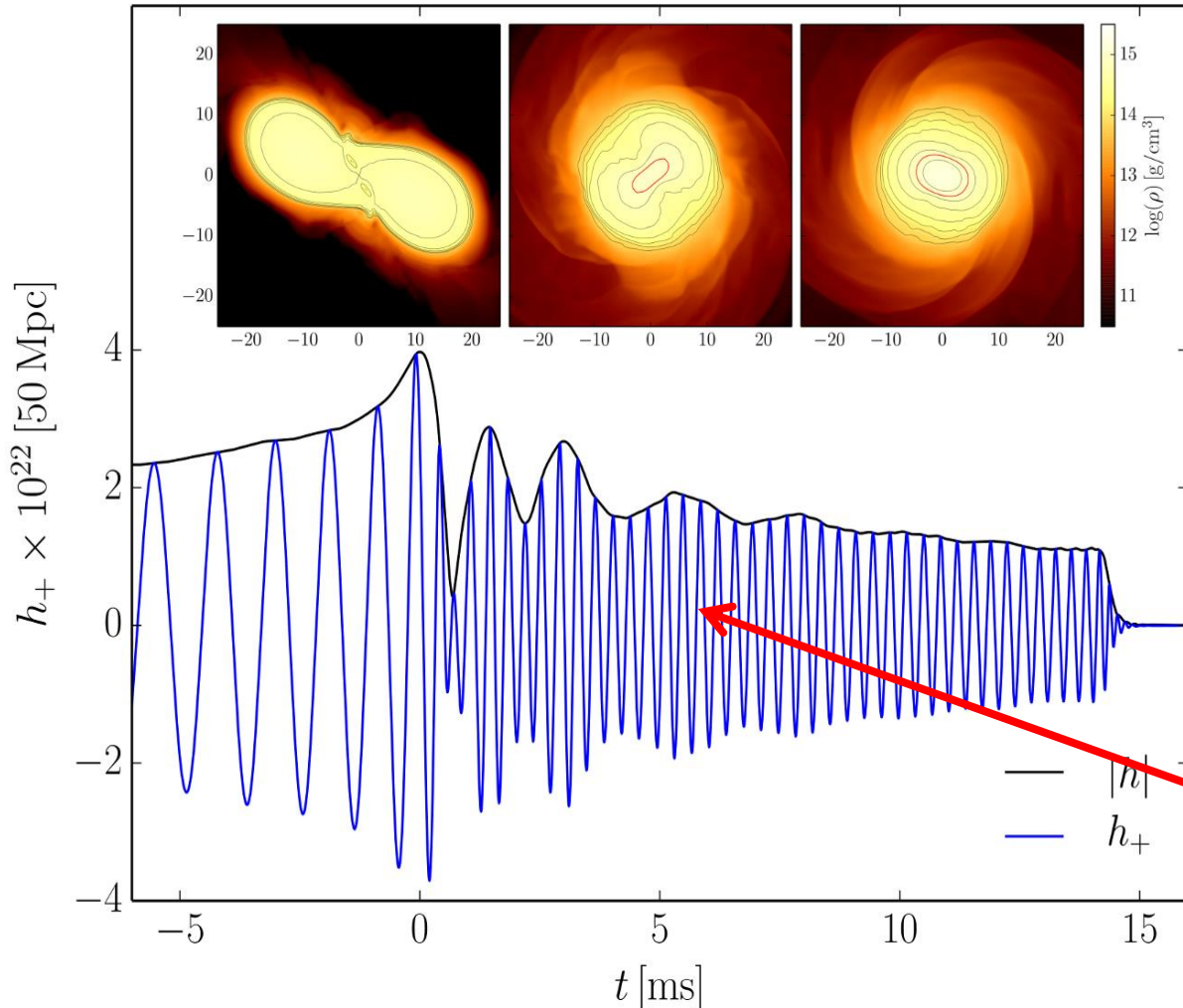
Rainer Weiss
Barry C. Barish
Kip S. Thorne



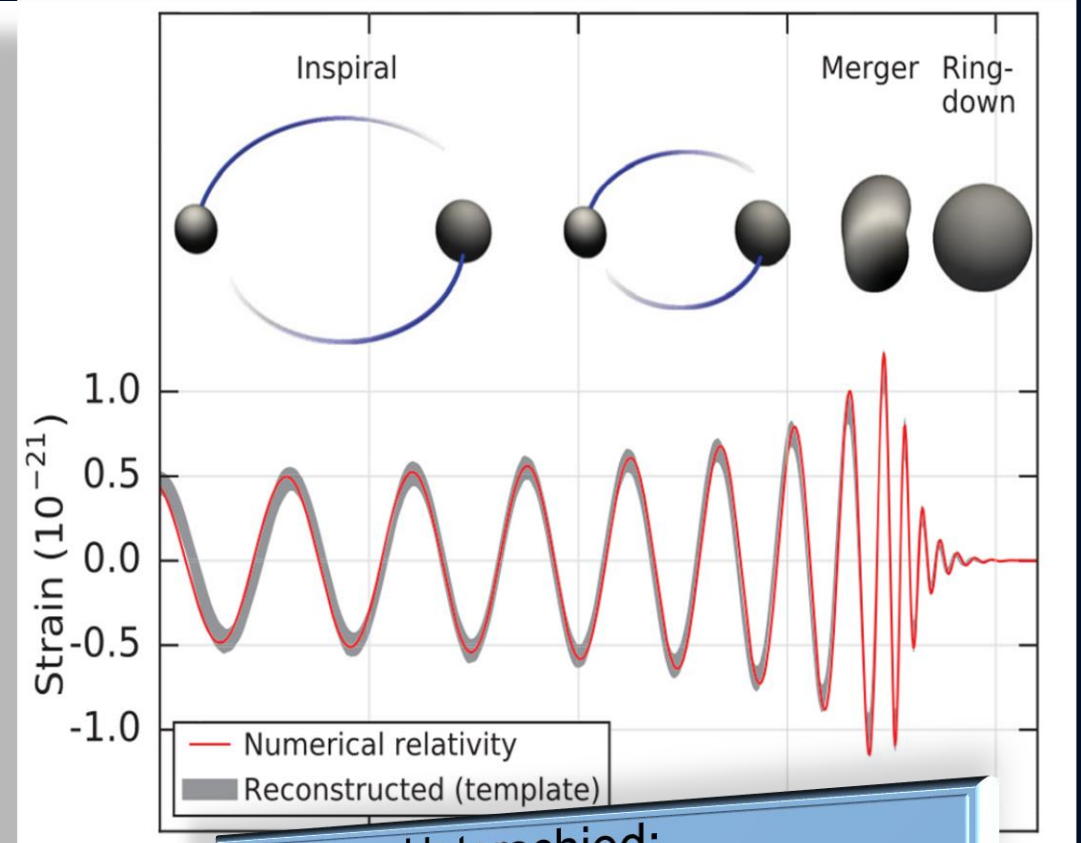
Hanford signal templates
for first four LIGO events,
ordered by increasing total
mass, starting at 30 Hz.

Gravitationswellen von Neutronenstern Kollisionen

Neutronenstern Kollision (Simulation)



Kollision zweier schwarzer Löcher



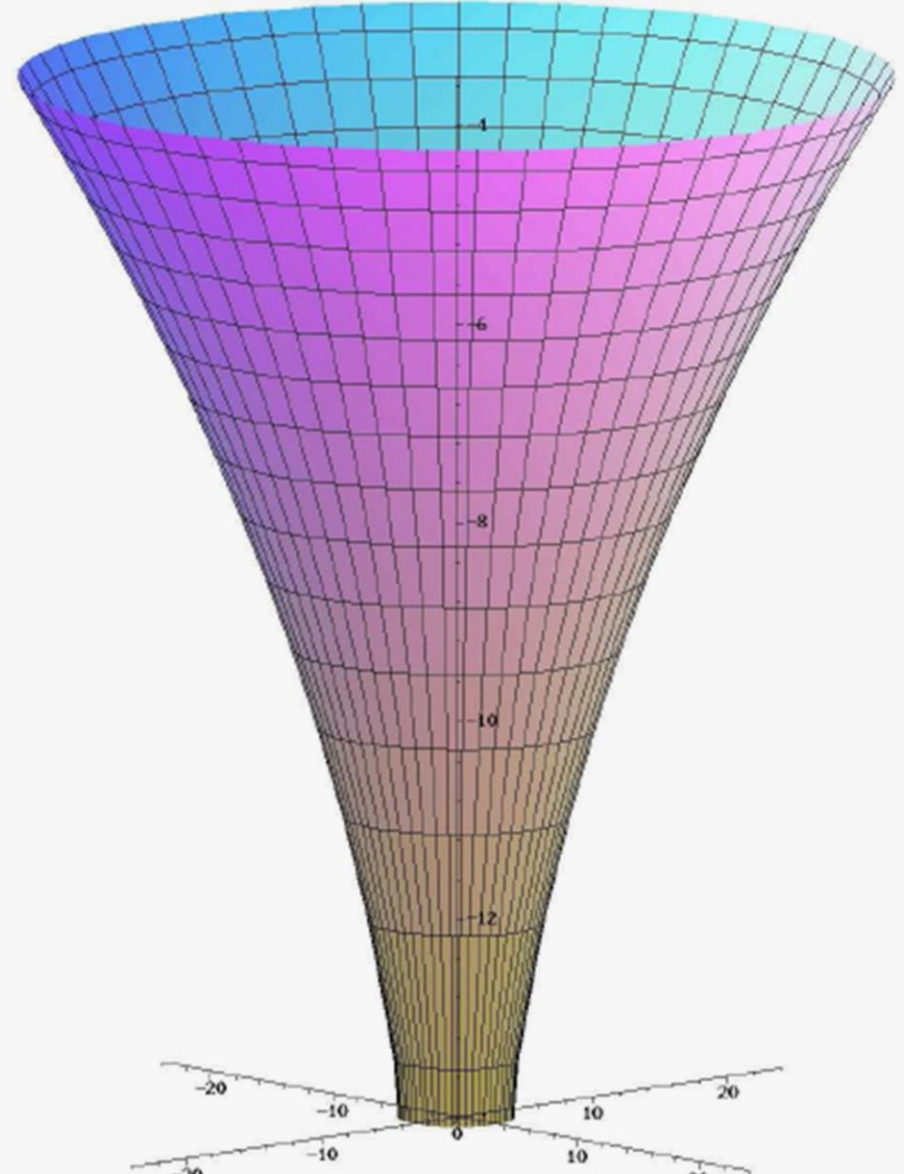
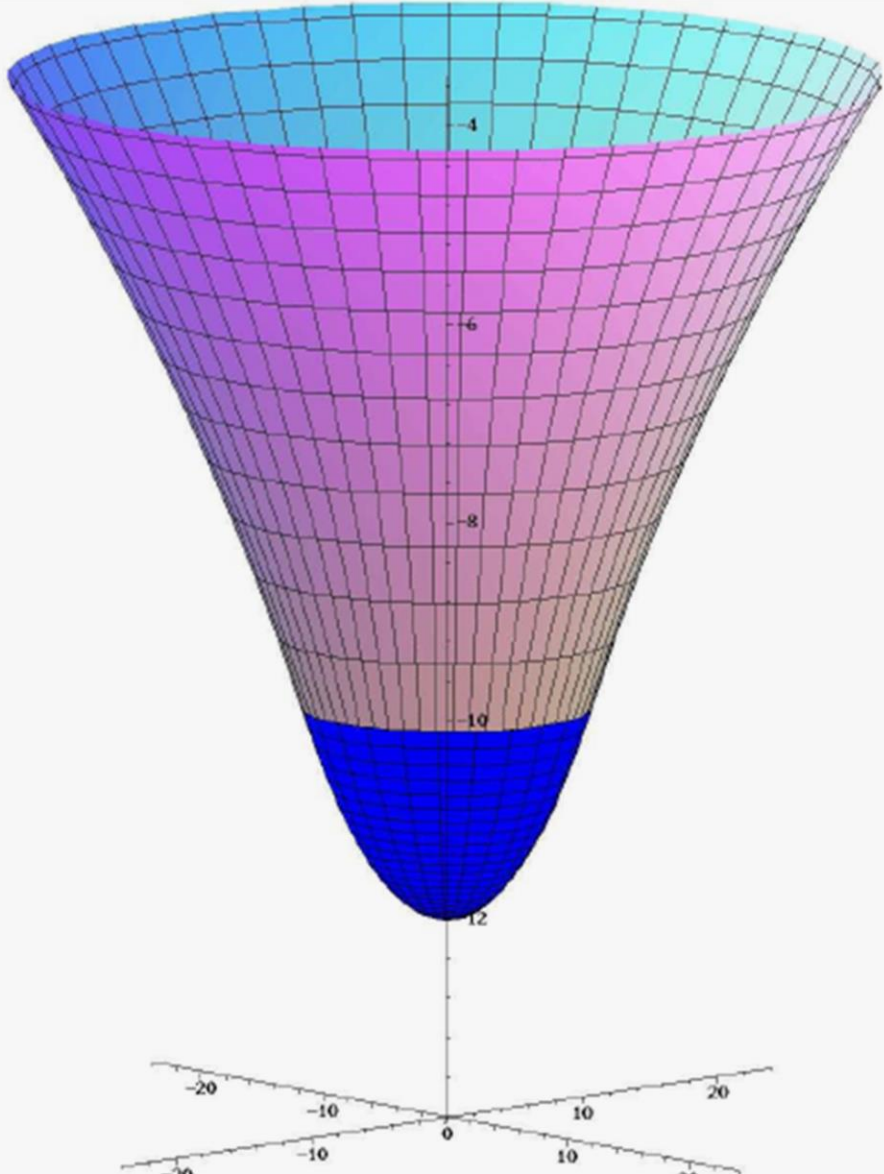
Unterschied:

Bei Neutronenstern Kollisionen
gibt es meistens eine
Post-Kollisionsphase

Raumzeit -Krümmung

Neutronenstern

Schwarzes Loch



Teil II

Paralleles Programmieren mit C/C++ und OpenMP/MPI

Die Eigenschaften von Neutronensternen werden in diesem Teil der Vorlesung numerisch mittels der Programmiersprache C++ berechnet. Ausgehend von der, im ersten Teil hergeleiteten Tolmann-Oppenheimer-Volkoff Gleichung, wird mittels des einfachen Euler-Verfahrens die Differentialgleichung in C++ implementiert.

```
#include <iostream> //Ein-/Ausgabe (Include-Dateien)
#include <math.h> //Mathematisches
using namespace std; //Fuer cout

//Definition der Zustandsgleichung
double eos(double p)
{
    double e;
    e=pow(p/10,3.0/5);
    return e;
}

main(void) //Hauptprogramm
{
    //Variablendeklarationen
    double M,p,e,r,dM,dp,de,dr;
    double eos(double);

    //Variableninitialisierung
    M=0;
    r=pow(10,-14);
    p=10*pow(0.0005,5.0/3);
    dr=0.000001;

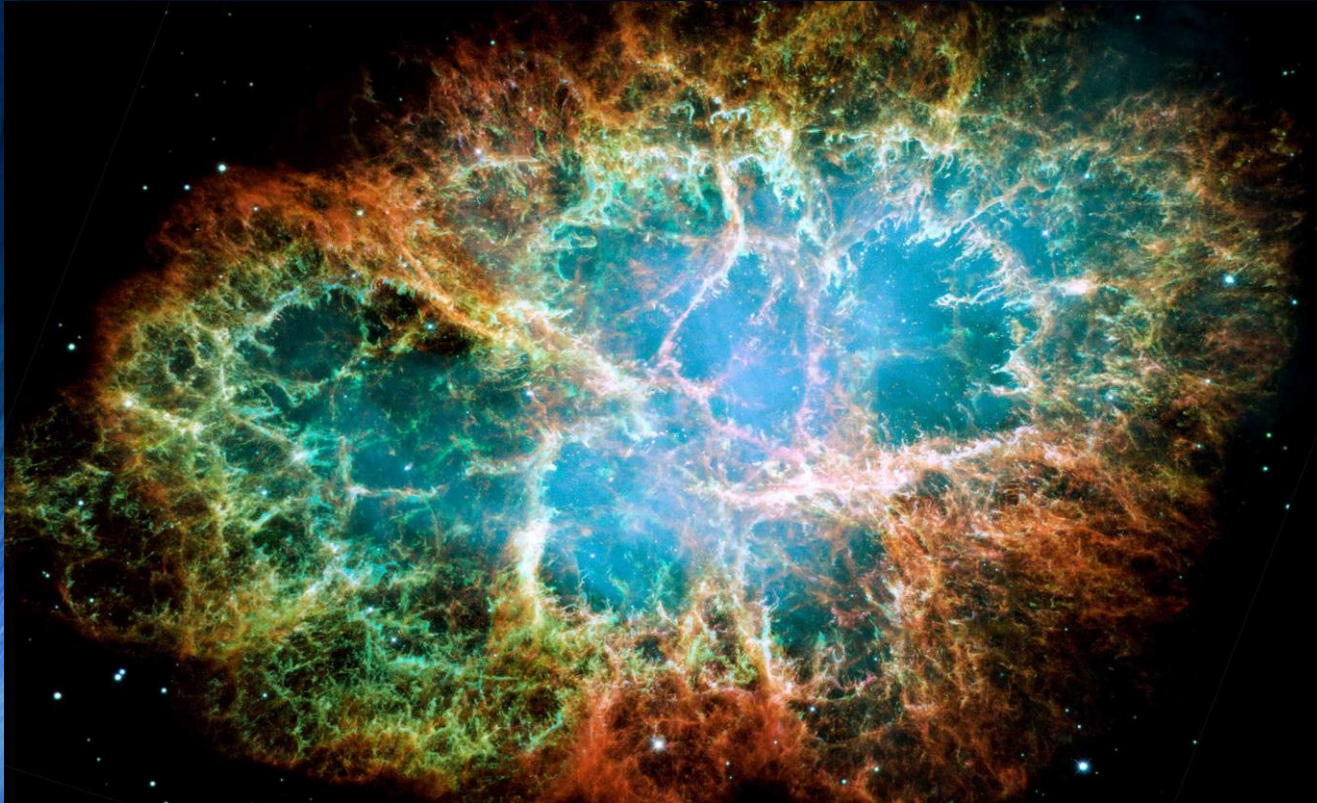
    //do-while Schleife (Numerische Lösung der TOV-Gleichung)
    do
    {
        e=eos(p); //Wert der Energiedichte bei momentanem Druck
        dM=4*M_PI*e*r*r*dr; //Massenzunahme bei momentanem r und Schrittweite dr
        dp=- (p+e)*(M+4*M_PI*r*r*p)/(r*(r-2*M))*dr; //Druckzunahme bei momentanem r und Schrittweite dr (TOV-Gleichung)
        r=r+dr; //momentaner Radius des Neutronensterns
        M=M+dM; //momentane Masse des Neutronensterns innerhalb des Radius r
        p=p+dp; //momentaner Druck des Neutronensterns innerhalb des Radius r
    }
    while(p>0);

    //Ausgabe der Masse und des Radius auf dem Bildschirm
    cout<<"Neutronensternradius [km] = "<<r<<"\n";
    cout<<"Neutronensternmasse [Sonnenmassen] = "<<M/1.4766<<"\n";

    return 0; //main beenden (Programmende)
}
```

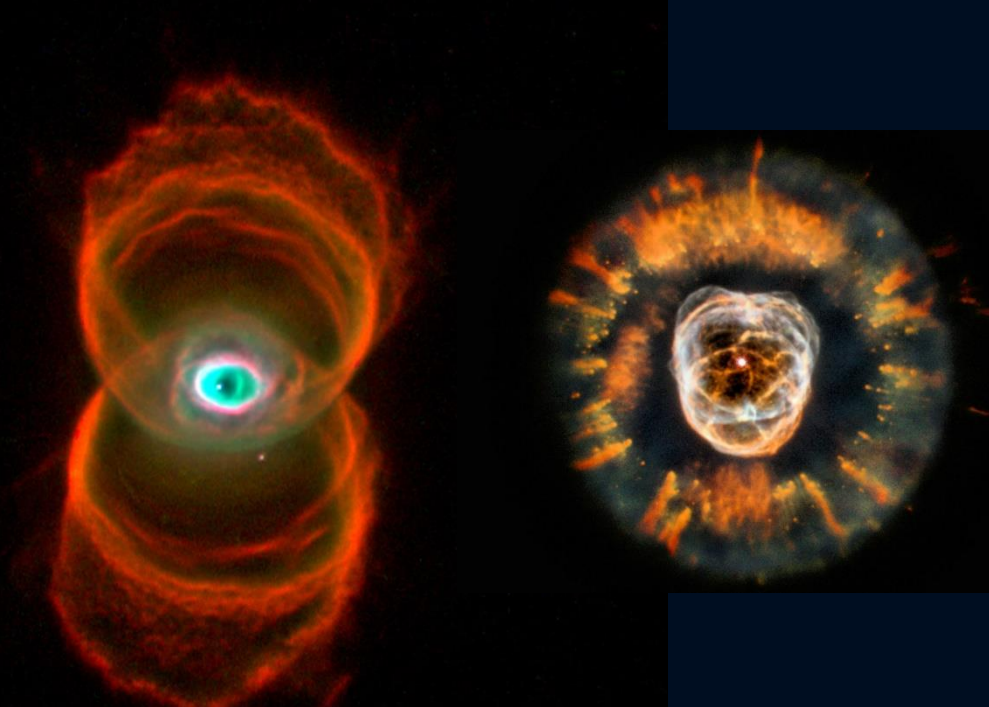
Was sind Neutronensterne?

Neutronensterne entstehen in einer Supernova Explosion.
Sonnensysteme, die mindestens 8-mal schwerer als unsere Sonne sind explodieren
am Ende ihrer Lebenszeit in einer Supernova Explosion –
im Zentrum bleibt ein Neutronenstern oder ein schwarzes Loch zurück.



Supernova Explosion, Krabben-Nebel

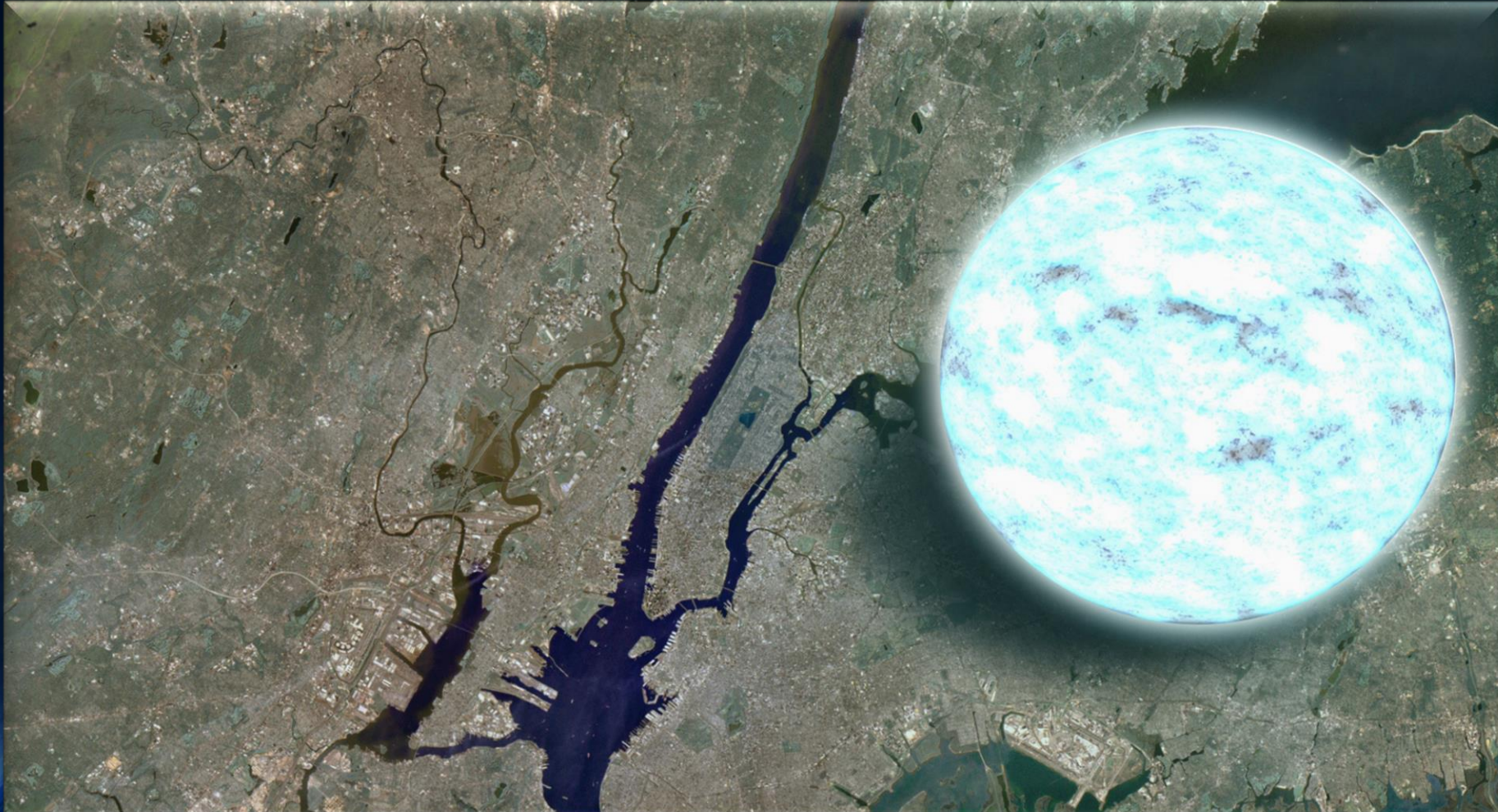
Zwei planetarische Nebel
Endstadium leichter Sonnen (weißer Zwerg)



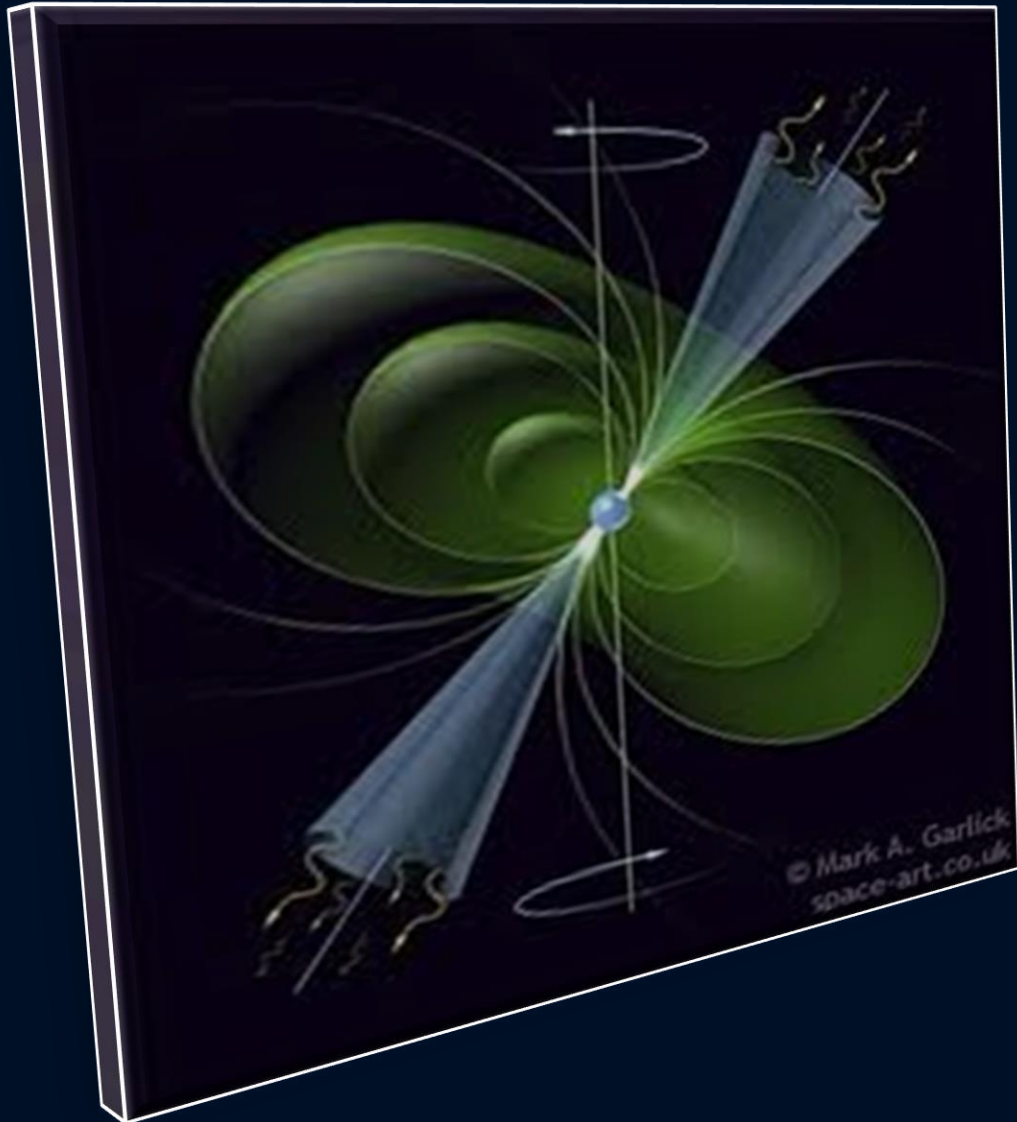
Neutronensterne: Sehr klein und sehr schwer

Radius ~ 10 km, Masse ~ 1 -2 Sonnenmassen

Riesige Magnetfelder $\sim 10^{11}$ Tesla, schnell rotierend (bis zu 716 Hz)



Pulsare := Rotierende Neutronensterne mit starkem Magnetfeld



In den letzten 50 Jahren konnten mittels Radioteleskopen ca. 3000 rotierende Neutronensterne (Pulsare) gefunden werden.

Der erste Pulsar wurde im Jahre 1967 entdeckt (PSR 1919+21, Bell)

Man unterscheidet
Sekundenpulsare und
Millisekunden-Pulsare



PSR B0329+54 (0.715 s)



PSR B0531+21 (33.5 ms)



PSR B1937+21 (1.56 ms)

Binäre Neutronenstern Systeme

Zurzeit kennt man ca. 25
binäre Neutronenstern Systeme

Beispiel:

Der **Double Pulsar**

(PSR J0737-3039A/B):

Entdeckt im Jahre 2003

Eccentricity: 0.088

Pulsar A: $P=23$ ms, $M=1.3381(7)$

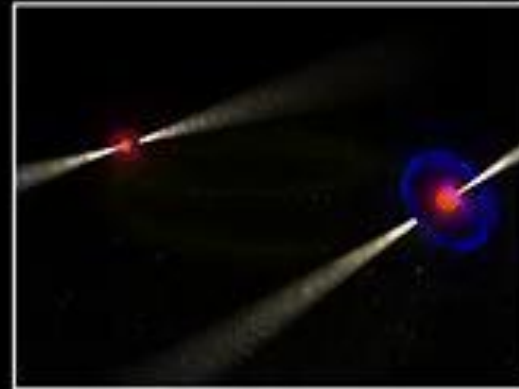
Pulsar B: $P=2.7$ s, $M=1.2489(7)$

Abstand zwischen den Sternen nur
800,000 km

Orbitale Periode: 147 Minuten

Abstand verkleinert sich langsam
aufgrund der Abstrahlung von
Gravitationswellen

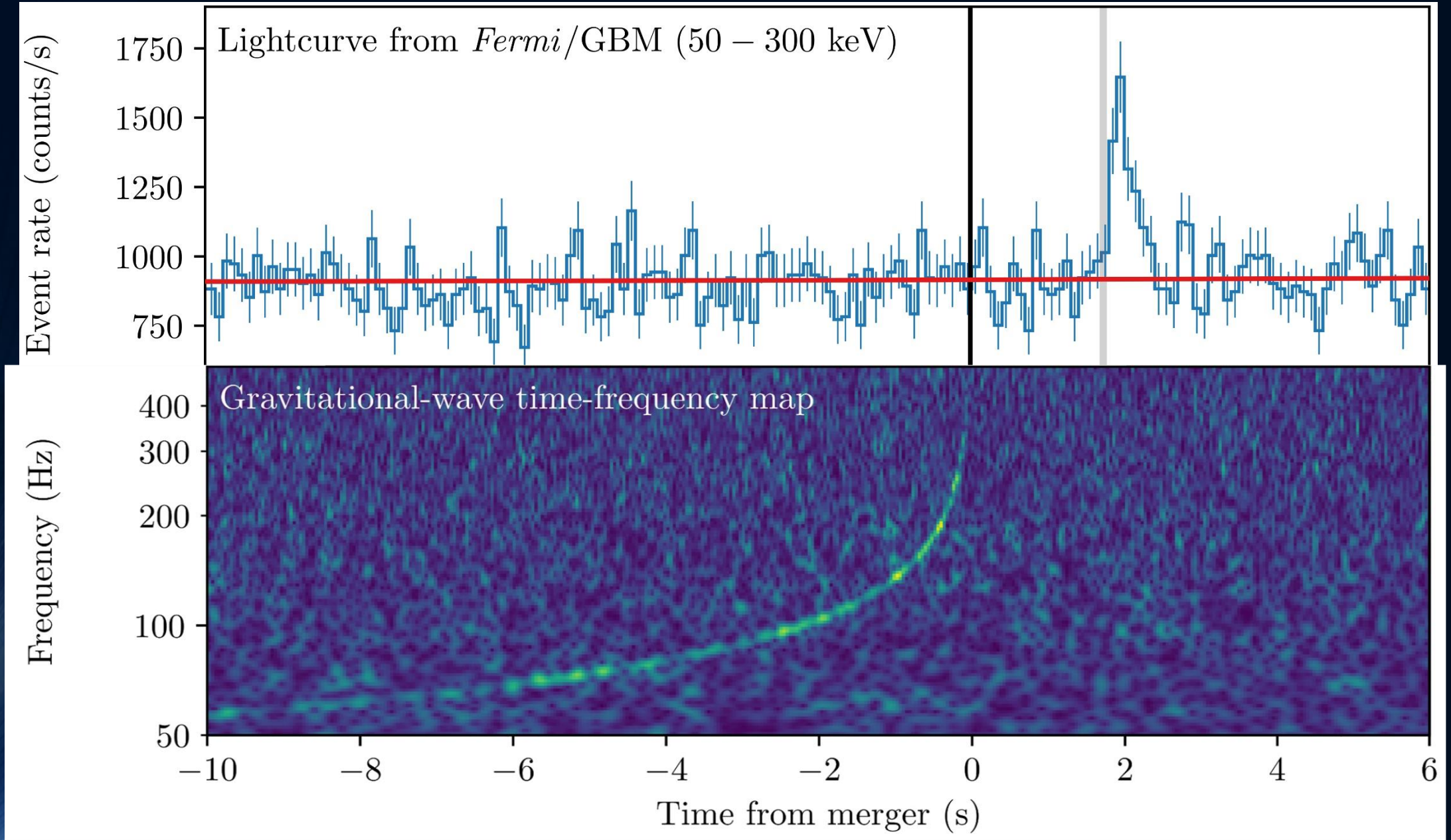
Die beiden Neutronensterne
werden erst in 85 Millionen
Jahren kollidieren



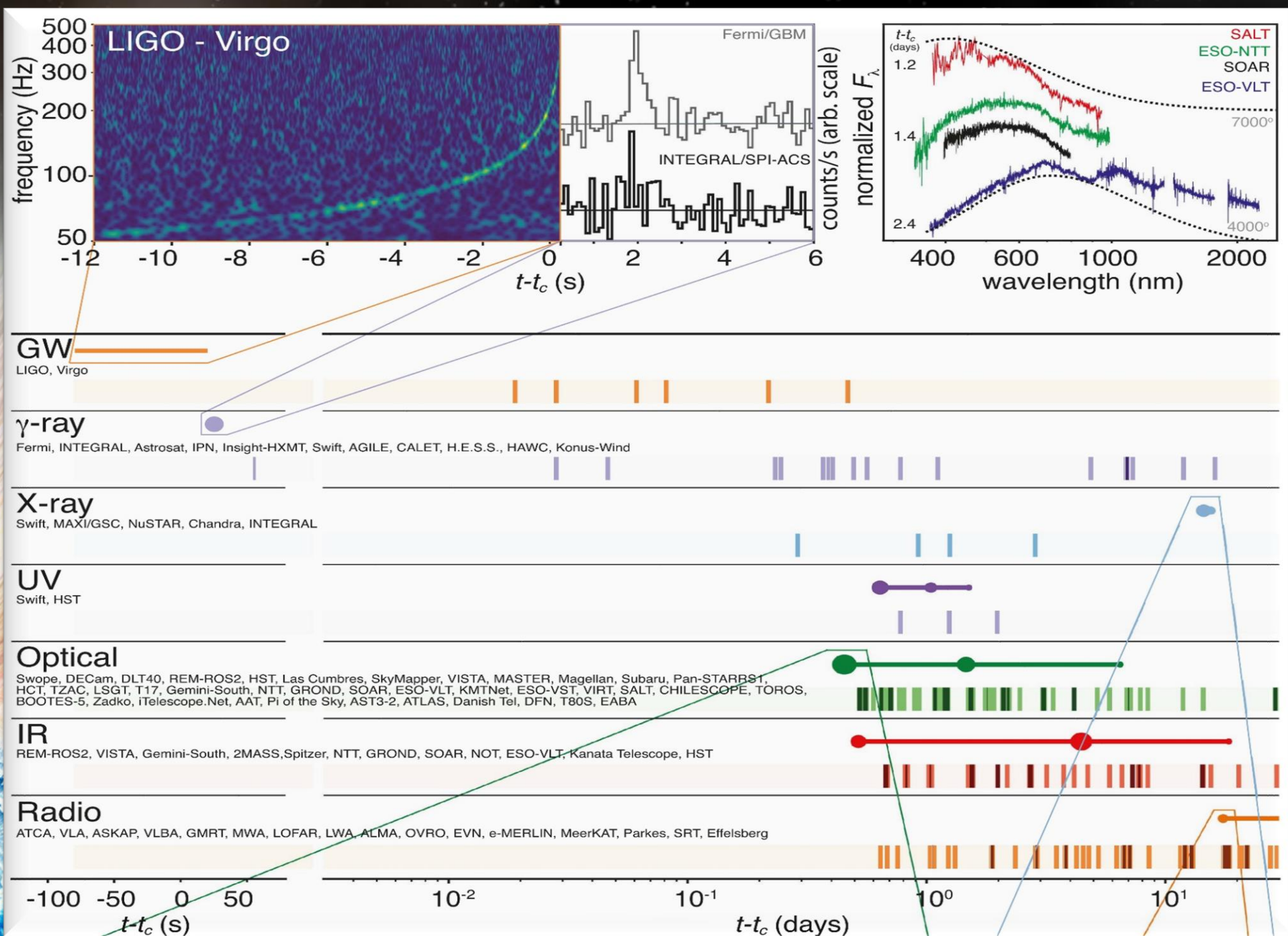
The long-awaited event GW170817

	Low-spin priors ($ \chi \leq 0.05$)	High-spin priors ($ \chi \leq 0.89$)
Primary mass m_1	$1.36-1.60 M_\odot$	$1.36-2.26 M_\odot$
Secondary mass m_2	$1.17-1.36 M_\odot$	$0.86-1.36 M_\odot$
Chirp mass \mathcal{M}	$1.188^{+0.004}_{-0.002} M_\odot$	$1.188^{+0.004}_{-0.002} M_\odot$
Mass ratio m_2/m_1	$0.7-1.0$	$0.4-1.0$
Total mass m_{tot}	$2.74^{+0.04}_{-0.01} M_\odot$	$2.82^{+0.47}_{-0.09} M_\odot$
Radiated energy E_{rad}	$> 0.025 M_\odot c^2$	$> 0.025 M_\odot c^2$
Luminosity distance D_L	40^{+8}_{-14} Mpc	40^{+8}_{-14} Mpc
Viewing angle Θ	$\leq 56^\circ$	$\leq 56^\circ$
Using NGC 4993 location	$\leq 28^\circ$	$\leq 28^\circ$
Combined dimensionless tidal deformability $\tilde{\Lambda}$	≤ 800	≤ 700
Dimensionless tidal deformability $\Lambda(1.4M_\odot)$	≤ 800	≤ 1400

Gravitational Wave GW170817 and Gamma-Ray Emission GRB170817A

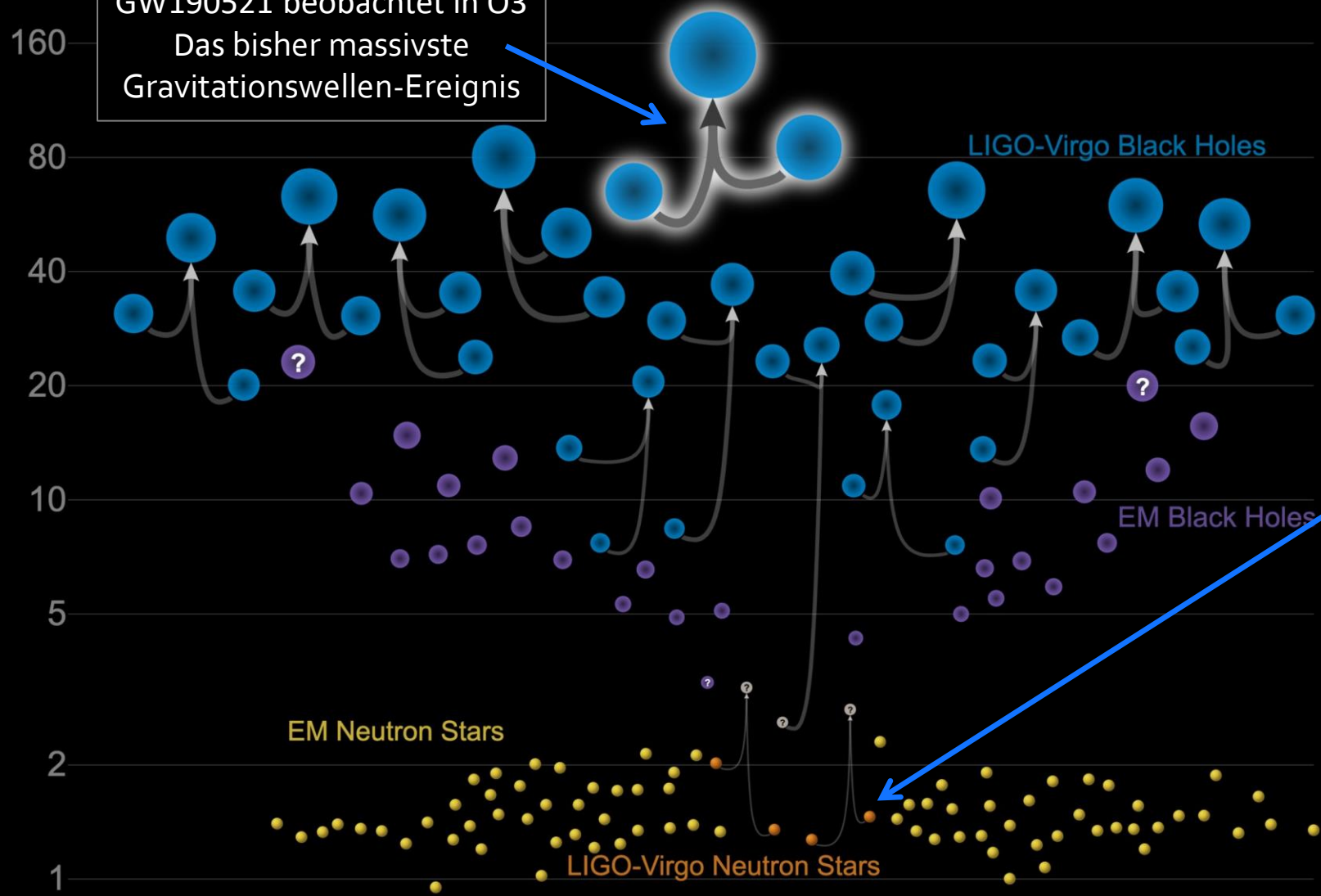


GW170817



Masses in the Stellar Graveyard

in Solar Masses



Detektierte Gravitationswellen

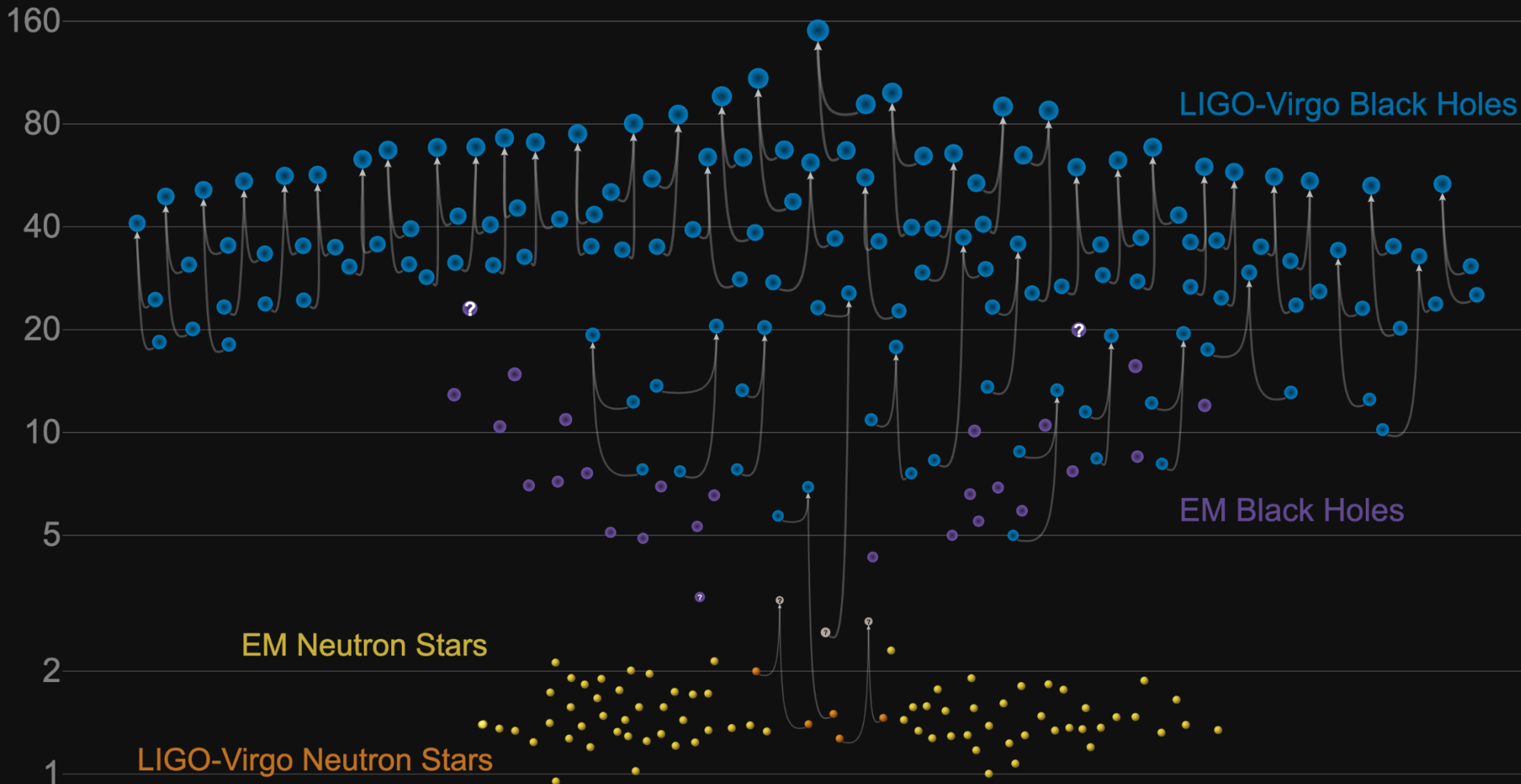
In den ersten beiden Beobachtungsläufen (O1+O2) konnten 11 Gravitationswellen detektiert werden, wobei einer dieser Gravitationswellen (GW170817) durch die Kollision zweier Neutronensterne verursacht wurde welche sich vor ungefähr 130 Millionen Jahren ereignete.

Updated 2020-09-02

LIGO-Virgo | Frank Elavsky, Aaron Geller | Northwestern

Masses in the Stellar Graveyard

in Solar Masses

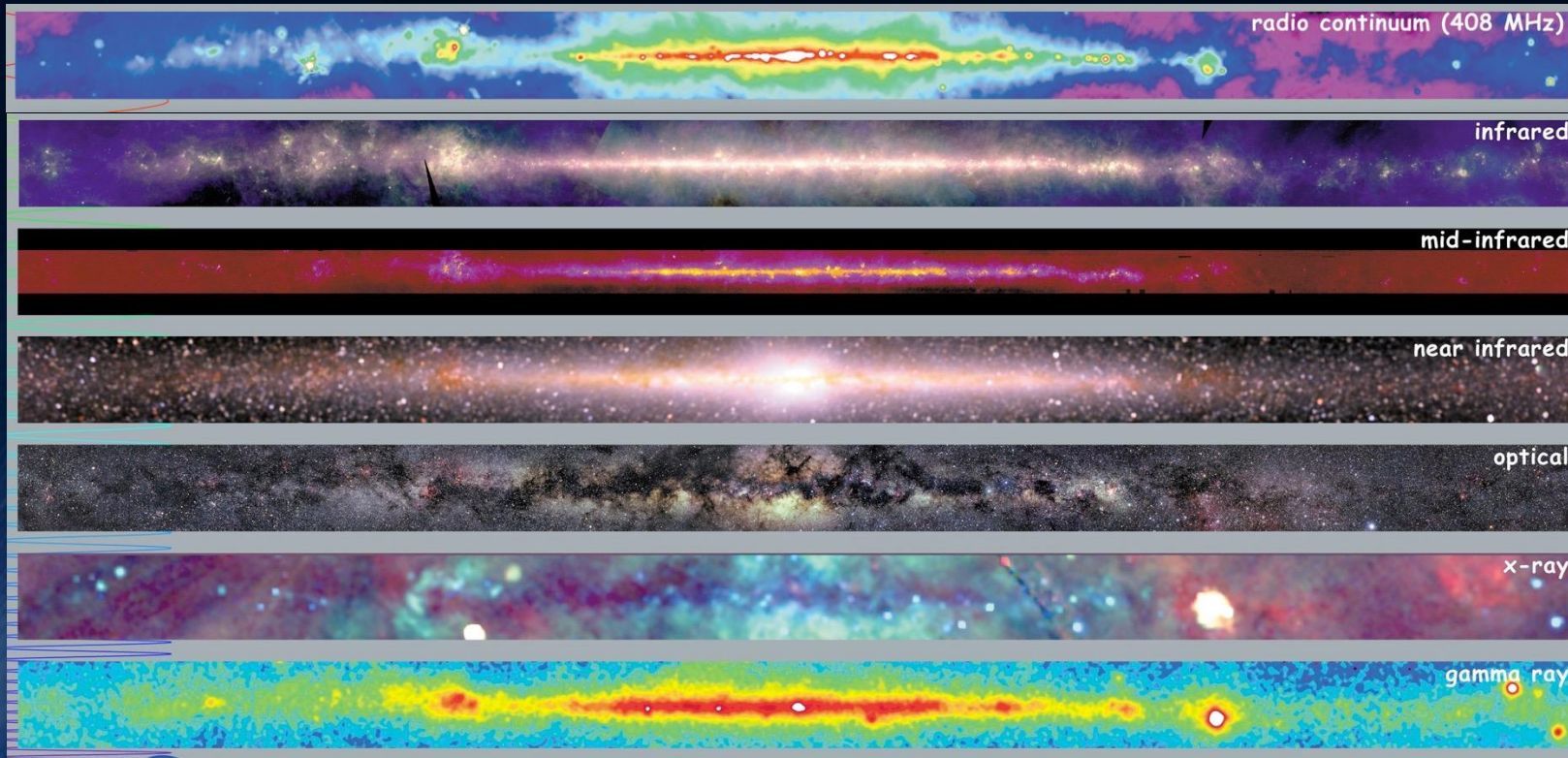


Am 28. Oktober 2020 gaben die LIGO Scientific Collaboration und die Virgo Collaboration die Ergebnisse ihrer Suche nach Gravitationswellen aus kollidierenden kompakten Objekten in der ersten Hälfte ihres dritten Beobachtungslaufs (O3a) vom 1. 04.2019 bis 1.10.2019 bekannt. 39 Ereignisse wurden hier gemeldet. Zusammen mit den 11 Ereignissen im ersten Gravitationswellen-Transientenkatalog (GWTC-1), erhöht sich die Gesamtzahl der gemeldeten LIGO / Virgo-Gravitationswellen-Ereignissen auf 50.

Die neue Art unser Universum zu betrachten

Lange Zeit über war das Studium von astrophysikalischen Vorgängen auf den mit den Augen sichtbaren Bereich limitiert und optische Teleskope entwickelten sich erst ab dem 16. Jahrhundert. Die Wahrnehmung des Universums in den anderen Frequenzbereichen der elektromagnetischen Strahlung wurde durch die Radio, Infrared and X-ray telescopes möglich und entwickelte sich erst im 20. Jahrhundert.

GSFC/NASA



Radio

w-IR

m-IR

n-IR

Optisch

Röntgen

Gamma

Gravitations-
wellen

Erkenntnisse mittels
elektromagnetische Strahlung

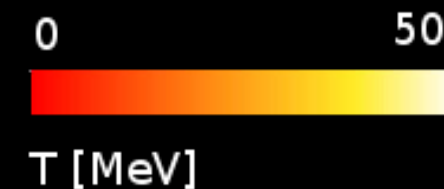
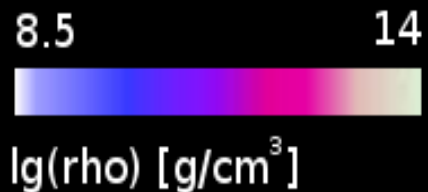
Es ist so als ob die Menschheit eine neue wundersame Brille hat, ein neues Sinnesorgan, mit denen sie zuvor unbeobachtbare Ereignisse in unserem Universum wahrnehmen kann.

Simulation einer Neutronenstern Kollision

Credits: Cosima Breu, David Radice und Luciano Rezzolla

Dichte der Neutronenstern-
Materie

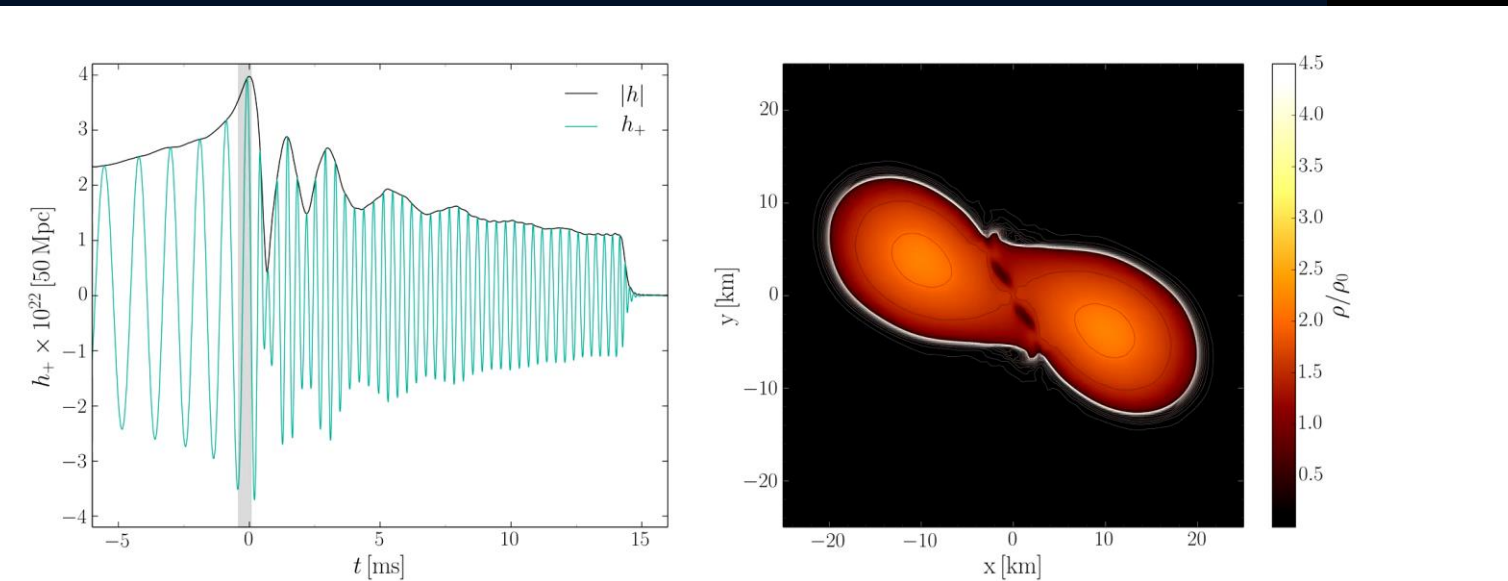
Temperatur der Neutronenstern
Materie



Teil III

Computersimulationen mit dem Einstein-Toolkit

In diesem Teil wird ein Einblick in die allgemeinrelativistische Simulation auf Supercomputern gegeben. Unter Zuhilfenahme des Einstein-Toolkits werden unterschiedliche, realistische Systeme betrachtet (z.B. Neutronenstern-Kollisionen mit Aussendung von Gravitationswellen)



Mögliche Vorlesungsprojekte

In den letzten drei Vorlesungseinheiten werden eigene Projekte bearbeitet. Die studentischen Projekte können alleine oder in Gruppen (bis zu drei Personen) durchgeführt werden und die Ergebnisse sollen am Ende kurz vorgestellt werden.

- Teil I: Simulationen und Berechnungen in Python
 - Weiterführende Themen der Kerr-Metrik
 - Weiterführende Themen der Kosmologie
 - Weiterführende Themen des Oppenheimer–Snyder Kollaps
- Teil II: C++ oder Python
 - Die Masse-Radius Beziehung von Zwillingsternen
 - Geodätengleichung mit C++ oder Python lösen (Paralleles Programmieren)
- Teil III: Simulationen mit dem Einstein Toolkit
 - Simulation einer Zwillingstern Oszillation
 - Neutronenstern Kollision (Visualisierung in Python)

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

General Theory of Relativity on the Computer

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main
(Sommersemester 2021)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 04.04.2021

Erster Vorlesungsteil: Allgemeine Relativitätstheorie mit Python

Eine kleine Einführung in Jupyter Notebooks

Einführung

In Jupyter Notebooks kann man die Programmiersprache Python in einer anwendungsfreundlichen Umgebung nutzen und die berechneten Ergebnisse auch gleich visualisieren. Sie sind somit in ihrem Erscheinungsbild den kommerziellen Software-Produkten Mathematica oder Maple sehr ähnlich.

Die in dieser Vorlesung bereitgestellten Jupyter Notebooks benutzen als Kernel Python 3. In diesem Notebook werden einige Python Module vorgestellt, die wir im Laufe der Vorlesung verwenden werden. Zunächst wird das Python Modul "sympy" eingebunden, das ein Computer-Algebra-System bereitstellt und symbolische Berechnungen und im speziellen Matrix/Tensor-Berechnungen relativ einfach ermöglicht. Sie es zunächst in Ihrer Python 3 Umgebung mit "pip3 install sympy".

Auf der OLAT Seite des Kurses
finden Sie die Jupyter Notebooks
zum Ansehen
und zum herunterladen

Jupyter Notebook

Einführung in Jupyter Notebooks

GOETHE
UNIVERSITÄT
FRANKFURT AM MAIN

Startseite | Lehren & Lernen | Kursangebote | Suche "Hanau..."

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

- Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer
 - Literaturverzeichnis
 - Einschreibung
 - Kursinhalt
 - Vorlesungsaufzeichnung
 - Aufgaben
 - Programme
 - Einführung in Jupyter Notebooks
 - Allgemeine Relativitätstheorie mit Python
 - Jupyter Notebooks
 - Mitteilungen
 - Forum
- Gruppen

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

General Theory of Relativity on the Computer

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main
(Sommersemester 2021)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 04.04.2021

Erster Vorlesungsteil: Allgemeine Relativitätstheorie mit Python

In diesem Python Jupyter Notebook werden die grundlegenden Größen der allgemeinen Relativitätstheorie (z.B. die Metrik der Raumzeit, Christoffel Symbole, Ricci- und Einstein-Tensor) am Beispiel einer allgemeinen statischen und isotropen Raumzeit in Python berechnet. Die oft komplizierten und zeitaufwendigen Berechnungen der tensoriellen Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie können mithilfe von Computeralgebra-Systemen erleichtert werden. Diverse Anwendungen der Einstein- und Geodätengleichung sind in schon vordefinierten Python Modulen implementiert, und analytische Berechnungen können durchgeführt und entsprechende Lösungen berechnet und visualisiert werden.

Es werden zwei unterschiedliche Python Module ([GraviPy](#) und [EinsteinPy](#)) vorgestellt, mit denen man die Berechnungen vereinfachen kann. Beide Module basieren auf dem Modul [SymPy](#), welches symbolische Berechnungen mit Python

Auf der OLAT Seite des Kurses finden Sie die Jupyter Notebooks zum Ansehen und zum Herunterladen

Jupyter Notebook

Allgemeine Relativitätstheorie mit Python



Startseite

Lehren & Lernen

Kursangebote

Suche "Hanauske"

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

Literaturverzeichnis

Einschreibung

Kursinhalt

Vorlesungsaufzeichnung

Aufgaben

Programme

Einführung in Jupyter Notebooks

Allgemeine Relativitätstheorie mit Python

Jupyter Notebooks

Mitteilungen

Forum

Gruppen

