

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

*PC-POOL RAUM 01.120
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
03. MAI, 2019*

MATTHIAS HANAUSKE

*FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK
D-60438 FRANKFURT AM MAIN
GERMANY*

2. Vorlesung

Allgemeines zur Vorlesung

- Ort und Zeit:
PC-Pool Raum 01.120, immer freitags von 15.00 bis 17.00 Uhr
- Übungstermine:
Zusätzlich zur Vorlesung werden ab dem 03.05.2019 freiwillige Übungstermine eingerichtet, die jeweils freitags, eine Stunde vor der Vorlesung im PC-Pool 01.120 stattfinden (Fr. 14-15.00 Uhr).
- Vorlesungs-Materialien:
<http://th.physik.uni-frankfurt.de/~harauske/VARTC/>
- Kurs auf der Online-Lernplattform Lon Capa:
<http://lon-capa.server.uni-frankfurt.de/>
- Plan für die heutige Vorlesung:
Grundlagen der ART, Berechnung von Christoffel Symbolen und Riemann Tensor mit Maple, Lon-Cappa Übungsaufgaben, Einführung in nichtrotierende schwarze Löcher, die Schwarzschild-Metrik, Raumzeitdiagramme, Geodätengleichung in der Schwarzschild-Raumzeit für einen radial einfallenden Probekörper mit Maple lösen

Vorlesung besteht aus drei Teilen

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer von Dr.phil.nat.Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

[Home](#) [Research](#) [Contact](#)

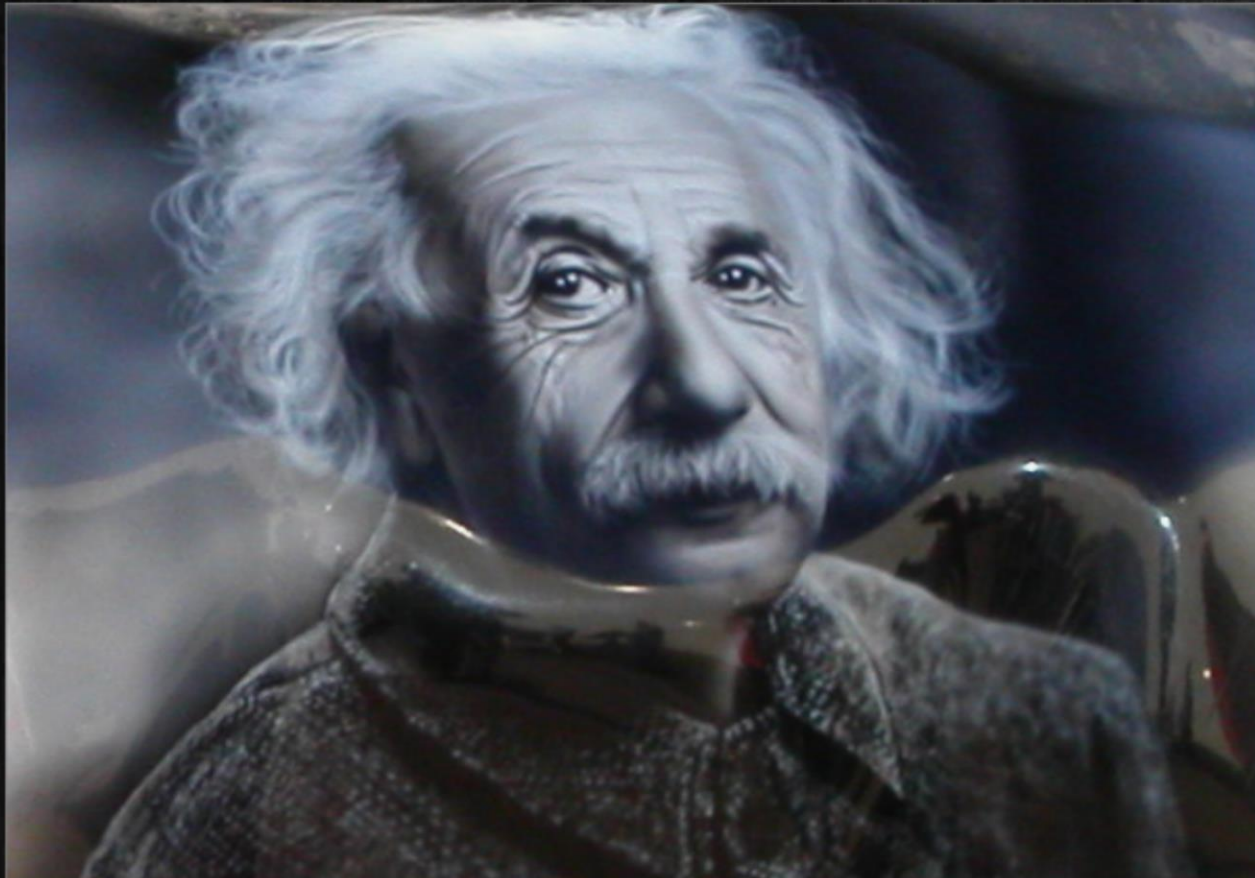
[Einführung](#)

[Teil I](#)

[Teil II](#)

[Teil III](#)

[E-Learning](#)



www.fias.uni-frankfurt/~hanauske/VARTC/

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer (General Theory of Relativity on the Computer) Vorlesung SS 2016, Mo. 16-18.00 Uhr, PC-Pool 01.120

In dieser Vorlesung werden die mathematisch anspruchsvollen Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) in diversen Programmierumgebungen analysiert. Im ersten Teil des Kurses erlernen die Studierenden die Verwendung von Computeralgebra-Systemen (Maple und Mathematica). Die oft komplizierten und zeitaufwendigen Berechnungen der tensoriellen Gleichungen der ART können mit Hilfe dieser Programme erleichtert werden. Diverse Anwendungen der Einstein- und Geodätengleichung werden in Maple implementiert, quasi analytische Berechnungen durchgeführt und entsprechende Lösungen berechnet und visualisiert. Der zweite Teil des Kurses befasst sich mit der numerischen Berechnung von Neutronensternen und Weißen Zwergen mittels eines C/C++ Programms. Nach einer kurzen Auffrischung der grundlegenden Programmierkenntnisse, erstellen die Studierenden, gemeinsam mit dem Betreuer, ein Programm, das die Tolman-Oppenheimer-Volkov-Gleichung numerisch löst und visualisieren die Ergebnisse. Zusätzlich wird hierbei in die Grundkonzepte der parallelen Programmierung eingeführt und eine MPI- und OpenMP-Version des C/C++ Programms erstellt. Im dritten Teil des Kurses werden zeitabhängige numerische Simulationen der ART mittels des Einstein Toolkit durchgeführt und deren Ergebnisse mittels Python/Matplotlib visualisiert. Inhaltlich wird hierbei ebenfalls auf den, dem Programm zugrunde liegenden (3+1)-Split der ART eingegangen und, abhängig von den Vorkenntnissen der Studierenden, mehrere fortgeschrittene, astrophysikalisch relevante Probleme simuliert. Mögliche Themen dieses abschließenden Teils könnten die folgenden Systeme

Teil I

Analytische Berechnungen und numerische Simulationen in Maple

Basierend auf der Einstein- und Geodätengleichung, werden im ersten Teil der Vorlesung unterschiedliche Probleme der allgemeinen Relativitätstheorie analysiert.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi T_{\mu\nu}$$

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0$$

Nichtrotierende schwarze Löcher

Ereignishorizonte, was geschieht wenn ein Teilchen in ein schwarzes Loch fällt, Bewegung von Probekörpern und Lichtteilchen um ein schwarzes Loch,..

Eigenschaften von Neutronensternen

Verlauf der Dichte innerhalb eines NS, Masse-Radius Beziehung, Raumzeitkrümmung innerhalb und ausserhalb eines NS,..

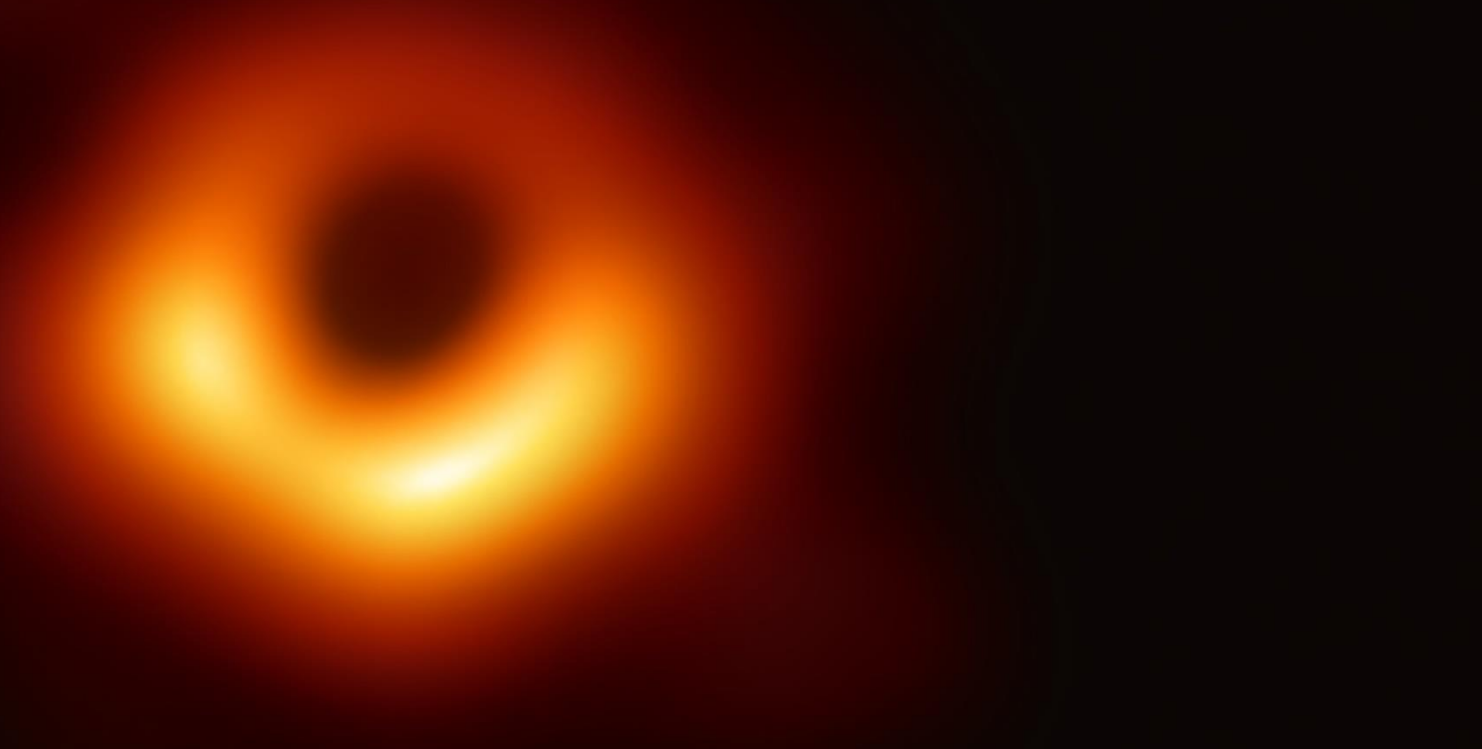
Rotierende schwarzen Löchern

Mitführungseffekt der Raumzeit (frame-dragging),...

Vielleicht: Zeitliche Entwicklung des Universums
(Robertson-Walker-Metrik, Friedmann-Gleichung)

Die ersten Bilder eines Schwarzen Lochs

Ein wenig mehr als hundert Jahre nachdem Albert Einstein seine Feldgleichungen der *Allgemeine Relativitätstheorie* der Öffentlichkeit präsentierte, und er damit die Grundlage für Gravitationswellen und schwarzer Löcher formulierte, ist seit einigen Wochen ein Meilenstein in der Geschichte der Astronomie in aller Munde (erstes Bild eines schwarzen Lochs, siehe rechte Abbildung).



YouTube Video: https://www.youtube.com/watch?v=Zh5p9Sro_VU&list=PLn5gYfEKlag8nps1GKLqUW35AOgQY7aM2

Anlässlich der bahnbrechenden Aufnahme des ersten Bildes eines schwarzen Lochs im Zentrum unserer Nachbargalaxie M87, wurde am 17. April 2019 um 20 Uhr ein öffentlicher, populärwissenschaftlicher Abendvortrag im Otto Stern Zentrum (OSZ H1) am Campus Riedberg der Goethe Universität gehalten. Es sprachen die drei Principal Investigators des europäischen Black Hole Cam-Projekts (L.Rezzolla, M.Kramer und H.Falke).

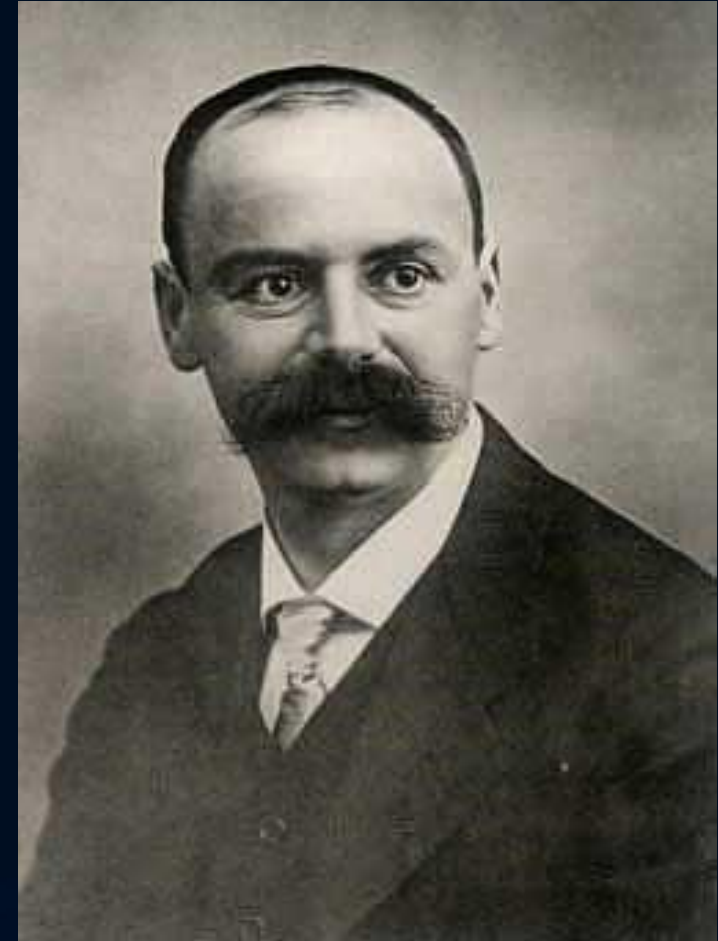
Die Schwarzschild Lösung

1915 Einsteins Gravitation:
Krümmung der „Raumzeit“

1916 Karl Schwarzschild:

... geboren 1873 in Frankfurt nahe dem Haus der Rothschild's. Erste Lösung der ART – drei Monate nach Einsteins Artikel! Aussenraummetrik eines nichtrotierenden schwarzen Loches.

Schwarzschild stirbt einen Monat später an einer Infektion die er sich an der russischen Front einfing...



Herleitung der Schwarzschild Metrik

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{\nu(r,t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda(r,t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

$$ds^2 = c^2 e^{\nu(r,t)} dt^2 - e^{\lambda(r,t)} dr^2 - r^2 (\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2) \quad (2.27)$$

Die Masse eines kugelsymmetrischen schwarzen Loches befindet sich (wie wir im folgenden sehen werden) konzentriert im Ursprungspunkt bei $r = 0$, so dass der gesamte Raum (ohne den Punkt $r = 0$) materiefrei ist. Der Energieimpulstensor verschwindet demnach im Außenraum identisch $T_{\mu\nu} \equiv 0$, so dass sich die Einsteingleichung (Gl. 2.23) wie folgt vereinfacht:

$$\begin{aligned} R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} &= 8\pi\kappa T^{\mu\nu} = 0 \\ \Rightarrow R^{\mu\nu} &= 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Herleitung der Schwarzschild Metrik

wird als Schwarzschildradius bezeichnet

$$R_S = \frac{2G M}{c^2} . \quad (2.36)$$

Die Schwarzschildmetrik und das zugehörige Weglängenelement nimmt nun die folgende Form an

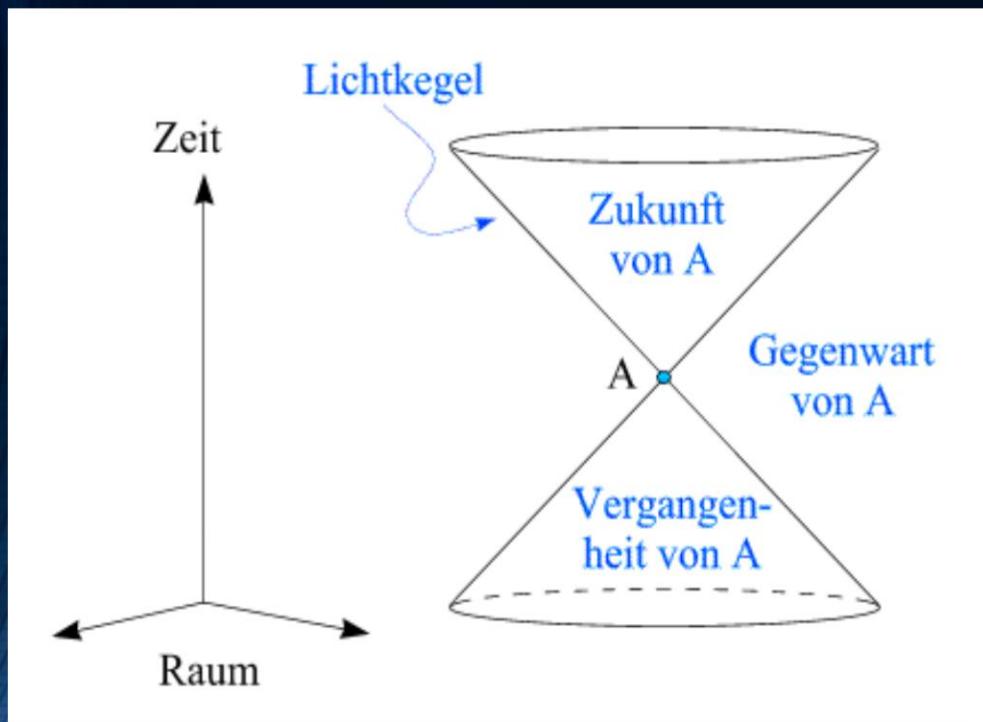
$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2) .$$

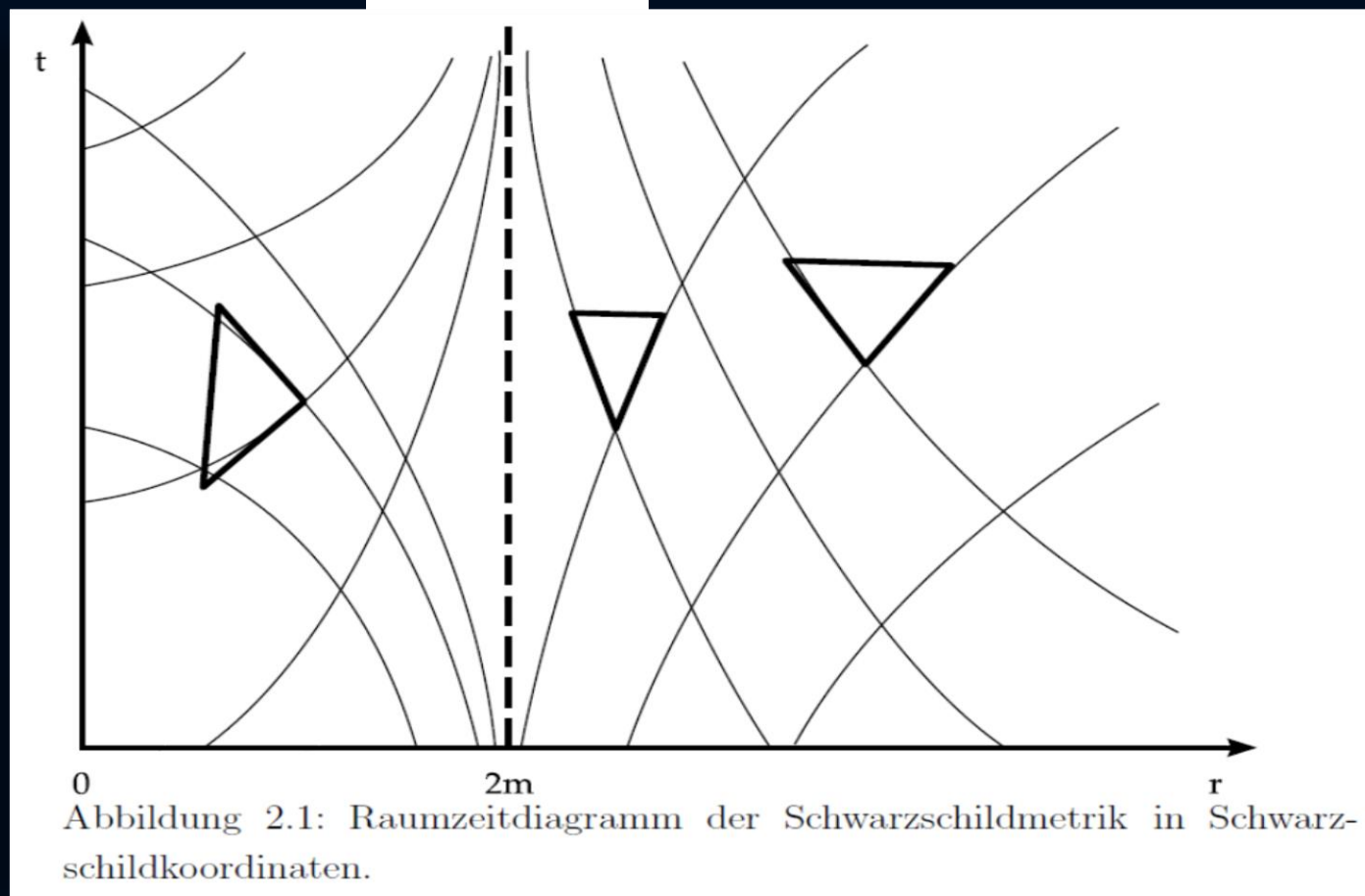
Raumzeit-Diagramm eines schwarzen Loches

Sichtweise ruhender Beobachter im Unendlichen

Ereignis-
horizont



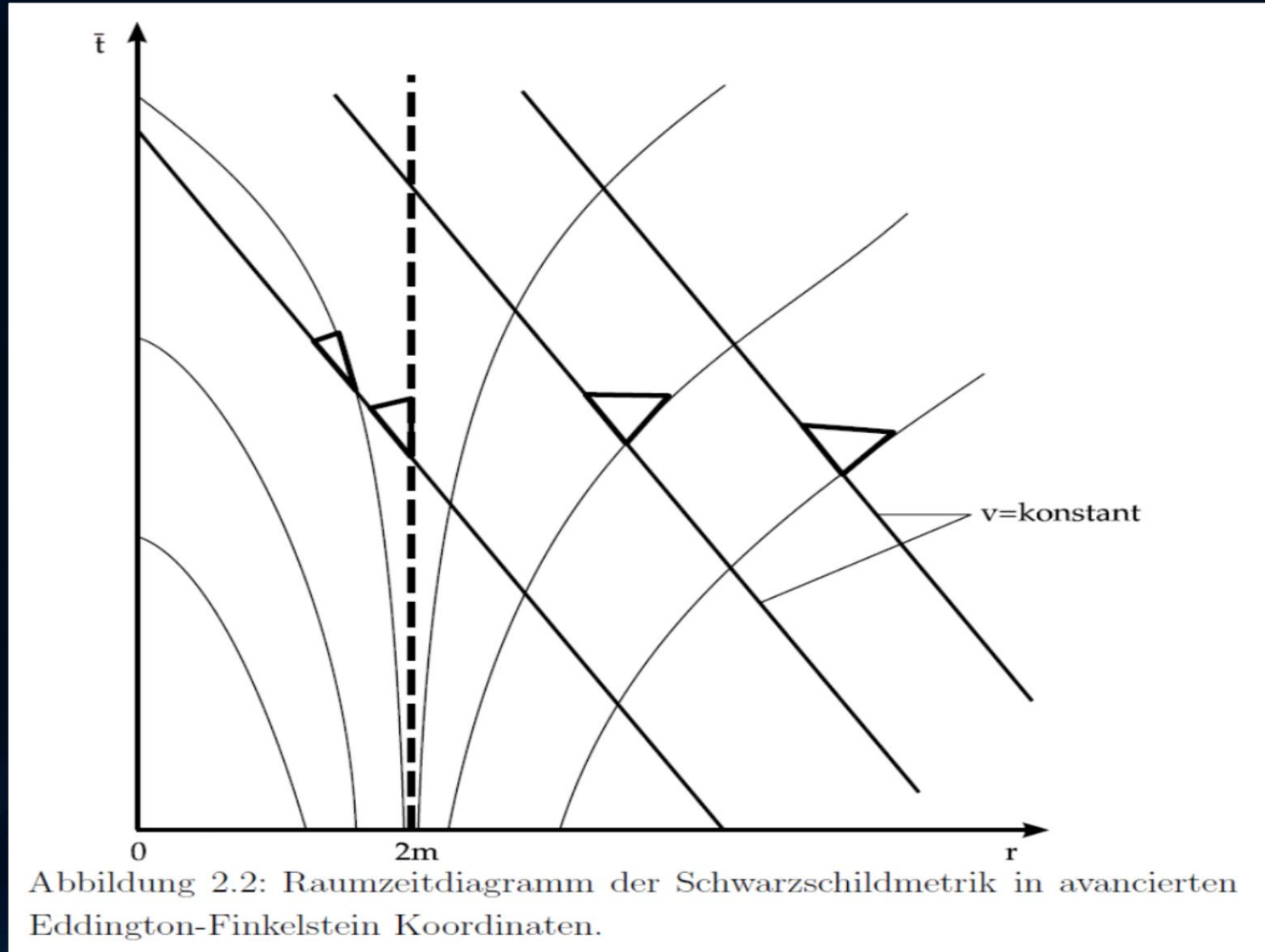
Raumzeit-Struktur
im flachen Raum



Raumzeit-Struktur um ein schwarzes Loch

Raumzeit-Diagramm eines schwarzen Loches

Sichtweise eines in das schwarze Loch fallenden Beobachters



Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. [Matthias Hanauske](#)

[Home](#) [Research](#) [Contact](#)

[Einführung](#)

[Teil I: Analytische Berechnungen
und numerische Simulationen in
Maple](#)

[Teil II: Paralleles Programmieren mit
C++ und OpenMP/MPI](#)

[Teil III: Computersimulationen mit
dem Einstein-Tool](#)

[Aufgaben](#)

[Download Maple Worksheed](#)

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

General Theory of Relativity on the Computer

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main (Sommersemester 2016)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 11.04.2016

interaktiven Vorlesung liegt sowohl auf der Allgemeine Relativitätstheorie als auch auf der Vermittlung spezieller Programmierkenntnisse.

Grundlegende Größen der Allgemeinen Relativitätstheorie

Im folgenden werden die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie und im besonderen die Einsteingleichung

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi T_{\mu\nu}$$

und die Geodatengleichung

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0$$

als bekannt vorausgesetzt. Die griechischen, raumzeitlichen Indices μ, ν, ρ, \dots laufen von 0..3, wobei, falls nicht anders angegeben, diese den folgenden kartesischen Raumzeitkoordinaten entsprechen: $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$.

Im folgenden werden einige grundlegende Größen der allgemeinen Relativitätstheorie am Beispiel der allgemeinen statischen, isotropen Metrik erläutert und aufgezeigt, wie man diese in Maple berechnet. Zunächst wird das "tensor"-Paket eingebunden. Die mit roter Schrift gekennzeichneten Wörter stellen die vom User eingegebenen Befehle dar und die blauen Wörter sind die vom Maple-Program ausgegebenen Größen. Hier werden im speziellen die im "tensor"-Paket neu definierten Befehle ausgegeben. Möchte man die eingegebenen Befehle zwar ausführen, aber nicht ausgeben lassen, so hat man am Ende des Befehls einen Doppelpunkt und kein Semikolon zu schreiben.

```
> restart:
with( tensor );
```


*frame, geodesic_eqns, get_char, get_compts, get_rank, init, invars, invert, lin_com, lower,
npscurve, npspin, partial_diff, permute_indices, petrov, prod, raise, symmetrize,
tensorsGR, transform]*

Die Definition eines Tensors in Maple erfolgt über den Befehl "create". Wir definieren nun die kovarianten Metrik einer allgemeinen statischen, isotropen Raumzeit $g_{\mu\nu}$, wobei wir ein sphärisches Koordinatensystem benutzen:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{wobei: } x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$$

```
> coord := [t, r, theta, phi]:
g_compts := array(symmetric, sparse, 1..4, 1..4):
g_compts[1,1] := A(r): g_compts[2,2] := -B(r):
g_compts[3,3] := -r^2: g_compts[4,4] := -r^2*sin(theta)^2:
g := create( [-1,-1], eval(g_compts));
```

$$g := \text{table} \left(\text{index_char} = [-1, -1], \text{compts} = \begin{pmatrix} A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin(\theta)^2 \end{pmatrix} \right) \quad (2.2)$$

Berechnung der kontravarianten Metrik $g^{\mu\nu}$:

```
> ginv := invert( g, 'detg' );
```

$$ginv := \text{table} \left(\text{index_char} = [1, 1], \text{compts} = \begin{pmatrix} \frac{1}{A(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{B(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \sin(\theta)^2} \end{pmatrix} \right) \quad (2.3)$$

Berechnung der ersten partiellen Ableitung der Metrik $g_{\mu\nu|\rho} := \partial_\rho g_{\mu\nu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}$. Die ausgegebenen Größen entsprechen den einzelnen Komponenten des entstehenden kovarianten Tensors dritter Stufe. Beachten Sie hierbei, dass die in Maple definierten Indices nicht von 0..3, sondern von 1..4 laufen.

```
> D1g := d1metric ( g, coord );
```

$$D1g := \text{table} \left(\left[\text{index_char} = [-1, -1, -1], \text{compts} = \text{ARRAY} \left(\text{cf1}, [1..4, 1..4, 1..4] \right) \right] \left[\begin{array}{l} (1, 1, 1) \\ = 0, (1, 1, 2) = \frac{d}{dr} A(r), (1, 1, 3) = 0, (1, 1, 4) = 0, (1, 2, 1) = 0, (1, 2, 2) = 0, (1, 2, 3) \\ = 0, (1, 2, 4) = 0, (1, 3, 1) = 0, (1, 3, 2) = 0, (1, 3, 3) = 0, (1, 3, 4) = 0, (1, 4, 1) = 0, (1, \end{array} \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 &= 0, (3, 2, 4) = 0, (3, 3, 1) = 0, (3, 3, 2) = -2r, (3, 3, 3) = 0, (3, 3, 4) = 0, (3, 4, 1) = 0, \\
 &(3, 4, 2) = 0, (3, 4, 3) = 0, (3, 4, 4) = 0, (4, 1, 1) = 0, (4, 1, 2) = 0, (4, 1, 3) = 0, (4, 1, 4) \\
 &= 0, (4, 2, 1) = 0, (4, 2, 2) = 0, (4, 2, 3) = 0, (4, 2, 4) = 0, (4, 3, 1) = 0, (4, 3, 2) = 0, (4, \\
 &3, 3) = 0, (4, 3, 4) = 0, (4, 4, 1) = 0, (4, 4, 2) = -2r \sin(\theta)^2, (4, 4, 3) = \\
 &-2r^2 \sin(\theta) \cos(\theta), (4, 4, 4) = 0]]))
 \end{aligned}$$

Berechnung der Christoffel Symbole erster Art $\Gamma_{\mu\nu\rho}$ (kontravariante Form):

$$\Gamma_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu} \right) = \frac{1}{2} \left(g_{\nu\rho|\mu} + g_{\mu\rho|\nu} - g_{\mu\nu|\rho} \right)$$

Beispiel Γ_{100} :

$$\Gamma_{100} = \frac{1}{2} \left(g_{00|1} + g_{10|0} - g_{10|0} \right) = \frac{1}{2} g_{00|1} = \frac{1}{2} \frac{dA(r)}{dr}$$

In Maple entspricht dies der unten angegebenen Komponente $(2, 1, 1) = \frac{1}{2} \frac{dA(r)}{dr}$.

> Cf1 := Christoffel1 (Dlg);

$$\begin{aligned}
 &Cf1 := \text{table} \left(\left[\text{index_char} = [-1, -1, -1], \text{compts} = \text{ARRAY} \left(\text{cf1}, [1..4, 1..4, 1..4], \left[(1, 1, 1) \right. \right. \right. \right. \\
 &= 0, (1, 1, 2) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dr} A(r), (1, 1, 3) = 0, (1, 1, 4) = 0, (1, 2, 1) = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} A(r), (1, 2, 2) \\
 &= 0, (1, 2, 3) = 0, (1, 2, 4) = 0, (1, 3, 1) = 0, (1, 3, 2) = 0, (1, 3, 3) = 0, (1, 3, 4) = 0, (1, \\
 &4, 1) = 0, (1, 4, 2) = 0, (1, 4, 3) = 0, (1, 4, 4) = 0, (2, 1, 1) = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} A(r), (2, 1, 2) = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (3, 3, 3) = 0, (3, 3, 4) = 0, (3, 4, 1) = 0, (3, 4, 2) = 0, (3, 4, 3) = 0, (3, 4, 4) = \\
 & -r^2 \sin(\theta) \cos(\theta), (4, 1, 1) = 0, (4, 1, 2) = 0, (4, 1, 3) = 0, (4, 1, 4) = 0, (4, 2, 1) = 0, \\
 & (4, 2, 2) = 0, (4, 2, 3) = 0, (4, 2, 4) = -r \sin(\theta)^2, (4, 3, 1) = 0, (4, 3, 2) = 0, (4, 3, 3) \\
 & = 0, (4, 3, 4) = -r^2 \sin(\theta) \cos(\theta), (4, 4, 1) = 0, (4, 4, 2) = r \sin(\theta)^2, (4, 4, 3) \\
 & = r^2 \sin(\theta) \cos(\theta), (4, 4, 4) = 0]]
 \end{aligned}$$

Berechnung der Christoffel Symbole zweiter Art $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ (erster Index kontravariant, zweiter und dritter kovariant):

$$\Gamma_{\nu\rho}^\mu = g^{\mu\delta} \Gamma_{\nu\rho\delta} = \frac{1}{2} g^{\mu\delta} (g_{\delta\nu|\rho} + g_{\delta\rho|\nu} - g_{\nu\rho|\delta})$$

Beispiel Γ_{00}^1 :

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} g^{1\delta} (g_{\delta 0|0} + g_{\delta 0|0} - g_{00|\delta}) \quad \rightarrow \text{man verwendet: } g^{1\delta} = g^{11} = -\frac{1}{B(r)} \\
 &= \frac{1}{2} g^{11} (2g_{10|0} - g_{00|1}) = -\frac{1}{2B(r)} (2g_{10|0} - g_{00|1}) \quad \rightarrow \text{man verwendet: } g_{10} \equiv 0 \\
 &= \frac{1}{2B(r)} g_{00|1} = \frac{1}{2B(r)} \frac{dA(r)}{dr}
 \end{aligned}$$

In Maple entspricht dies der unten angegebenen Komponente $(2, 1, 1) = \frac{1}{2} \frac{dA(r)}{B(r)}$.

```
> Cf2:= Christoffel2( ginv, Cf1 );
```

```
Cf2:= table( index_char = [1, -1, -1], compts = ARRAY [cf2, [1..4, 1..4, 1..4], (1, 1, 1)
```


$$= \left. \left. \left. \left. \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}, (4, 4, 1) = 0, (4, 4, 2) = \frac{1}{r}, (4, 4, 3) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}, (4, 4, 4) = 0 \right. \right. \right. \right. \Bigg| \Bigg| \Bigg| \Bigg|$$

Die Angabe einzelner Komponenten eines Tensors erfolgt mit dem Befehl "get_compts". Zum Beispiel wird im folgenden die (2,3,3)-Komponente des Christoffel Symbole zweiter Art Γ_{22}^1 ausgegeben:

```
> get_compts(Cf2)[2,3,3];
```

$$-\frac{r}{B(r)} \tag{2.7}$$

Berechnung des Riemann Tensors $R_{\rho\nu\alpha\beta} = g_{\rho\mu} R^{\mu}_{\nu\alpha\beta}$, wobei:

$$R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}_{\nu\beta|\alpha} - \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha|\beta} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\alpha} \Gamma^{\lambda}_{\nu\beta} - \Gamma^{\mu}_{\lambda\beta} \Gamma^{\lambda}_{\nu\alpha}$$

```
> D2g := d2metric ( D1g, coord );
RMN := Riemann( ginv, D2g, Cf1 );
```

```
RMN:=table( ( index_char = [-1, -1, -1, -1], compts = ARRAY( cov_riemann, [1..4, 1..4, 1
```

$$= \frac{r^2 (\cos(\theta)^2 B(r) - B(r) + 1 - \cos(\theta)^2)}{B(r)}, (4, 3, 4, 4) = 0, (4, 4, 1, 1) = 0, (4, 4, 1, 2) = 0, (4, 4, 1, 3) = 0, (4, 4, 1, 4) = 0, (4, 4, 2, 1) = 0, (4, 4, 2, 2) = 0, (4, 4, 2, 3) = 0, (4, 4, 2, 4) = 0, (4, 4, 3, 1) = 0, (4, 4, 3, 2) = 0, (4, 4, 3, 3) = 0, (4, 4, 3, 4) = 0, (4, 4, 4, 1) = 0, (4, 4, 4, 2) = 0, (4, 4, 4, 3) = 0, (4, 4, 4, 4) = 0]]]$$

Berechnung des Ricci Tensors $R_{\mu\nu} := g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu}$:

> RICCI := Ricci(ginv, RMN);

$$\begin{aligned}
 \text{RICCI} := & \text{table} \left(\left[\text{index_char} = [-1, -1], \text{compts} = \left[\left[\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \frac{1}{B(r)^2 A(r) r} \left(2 r \left(\frac{d^2}{dr^2} A(r) \right) A(r) B(r) - r \left(\frac{d}{dr} A(r) \right)^2 B(r) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - r \left(\frac{d}{dr} A(r) \right) \left(\frac{d}{dr} B(r) \right) A(r) + 4 \left(\frac{d}{dr} A(r) \right) B(r) A(r) \right), 0, 0, 0 \right], \right. \right. \\ & \left[0, -\frac{1}{4} \frac{1}{A(r)^2 B(r) r} \left(-2 r \left(\frac{d^2}{dr^2} A(r) \right) A(r) B(r) + r \left(\frac{d}{dr} A(r) \right)^2 B(r) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + r \left(\frac{d}{dr} A(r) \right) \left(\frac{d}{dr} B(r) \right) A(r) + 4 \left(\frac{d}{dr} B(r) \right) A(r)^2 \right), 0, 0 \right], \right. \\ & \left[0, 0, -\frac{1}{2} \frac{\left(\frac{d}{dr} B(r) \right) r A(r) + 2 B(r)^2 A(r) - \left(\frac{d}{dr} A(r) \right) r B(r) - 2 A(r) B(r)}{B(r)^2 A(r)}, 0 \right], \\ & \left[0, 0, 0, \frac{1}{2} \frac{1}{A(r) B(r)^2} \left(\left(\frac{d}{dr} A(r) \right) r B(r) - \left(\frac{d}{dr} A(r) \right) r B(r) \cos(\theta)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{d}{dr} B(r) \right) r A(r) + \left(\frac{d}{dr} B(r) \right) r A(r) \cos(\theta)^2 + 2 A(r) B(r)^2 \cos(\theta)^2 - 2 B(r)^2 A(r) \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 A(r) B(r) - 2 A(r) B(r) \cos(\theta)^2 \right) \right] \right] \right] \right)
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Berechnung des Ricci Skalars $R := g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$:

> RS := Ricciscalar(ginv, RICCI);

$$\begin{aligned}
 RS := \text{table} \left(\left[\text{index_char} = [], \text{compts} = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 B(r)^2 A(r)^2} \left(-2 r^2 \left(\frac{d^2}{dr^2} A(r) \right) A(r) B(r) \right. \right. \right. \\
 \left. \left. + r^2 \left(\frac{d}{dr} A(r) \right)^2 B(r) + r^2 \left(\frac{d}{dr} A(r) \right) \left(\frac{d}{dr} B(r) \right) A(r) - 4 A(r) \left(\frac{d}{dr} A(r) \right) r B(r) \right. \right. \\
 \left. \left. + 4 \left(\frac{d}{dr} B(r) \right) r A(r)^2 + 4 B(r)^2 A(r)^2 - 4 A(r)^2 B(r) \right) \right] \right)
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Berechnung des Einstein Tensors $G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$:

> Estn := Einstein(g, RICCI, RS);

$$\begin{aligned}
 Estn := \text{table} \left(\left[\text{index_char} = [-1, -1], \text{compts} = \left[\left[-\frac{A(r) \left(\left(\frac{d}{dr} B(r) \right) r + B(r)^2 - B(r) \right)}{r^2 B(r)^2}, 0, \right. \right. \right. \right. \\
 \left. \left. \left. 0, 0, \right. \right. \right. \\
 \left. \left. \left[0, \frac{-\left(\frac{d}{dr} A(r) \right) r + A(r) B(r) - A(r)}{A(r) r^2}, 0, 0, \right. \right. \right. \\
 \left. \left. \left[0, 0, \frac{1}{4} \frac{1}{B(r)^2 A(r)^2} \left(r \left(2 \left(\frac{d}{dr} B(r) \right) A(r)^2 - 2 \left(\frac{d}{dr} A(r) \right) B(r) A(r) \right) \right) \right. \right. \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & 0, 0, \\
 & \left[0, \frac{-\left(\frac{d}{dr} A(r)\right) r + A(r) B(r) - A(r)}{A(r) r^2}, 0, 0 \right], \\
 & \left[0, 0, \frac{1}{4} \frac{1}{B(r)^2 A(r)^2} \left(r \left(2 \left(\frac{d}{dr} B(r) \right) A(r)^2 - 2 \left(\frac{d}{dr} A(r) \right) B(r) A(r) \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - 2 r \left(\frac{d^2}{dr^2} A(r) \right) A(r) B(r) + r \left(\frac{d}{dr} A(r) \right)^2 B(r) + r \left(\frac{d}{dr} A(r) \right) \left(\frac{d}{dr} B(r) \right) A(r) \right) \right), \right. \\
 & \left. 0 \right]
 \end{aligned} \right\} \tag{2.11}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[0, 0, 0, -\frac{1}{4} \frac{1}{B(r)^2 A(r)^2} \left(r \left(2 \left(\frac{d}{dr} A(r) \right) B(r) A(r) \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - 2 A(r) \left(\frac{d}{dr} A(r) \right) B(r) \cos(\theta)^2 - 2 \left(\frac{d}{dr} B(r) \right) A(r)^2 + 2 \left(\frac{d}{dr} B(r) \right) A(r)^2 \cos(\theta)^2 \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + 2 r \left(\frac{d^2}{dr^2} A(r) \right) A(r) B(r) - 2 r \left(\frac{d^2}{dr^2} A(r) \right) A(r) B(r) \cos(\theta)^2 - r \left(\frac{d}{dr} A(r) \right)^2 B(r) \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + r \left(\frac{d}{dr} A(r) \right)^2 B(r) \cos(\theta)^2 - r \left(\frac{d}{dr} A(r) \right) \left(\frac{d}{dr} B(r) \right) A(r) \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + r \left(\frac{d}{dr} A(r) \right) \left(\frac{d}{dr} B(r) \right) A(r) \cos(\theta)^2 \right) \right) \right] \tag{2.12}
 \end{aligned}$$

Berechnung des infinitesimalen Weglängenelements $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx^\mu dx_\mu$:

```

> dx:=create([1], array([dt,dr,dtheta,dphi]));
ds2:=get_compts(prod(dx,lower(g,dx,1)],[1,1]));
ds2:=collect(simplify(ds2), [dt,dr,dtheta,dphi]);
    
```

$$ds2 := dt^2 A(r) - dr^2 B(r) - dtheta^2 r^2 + (r^2 \cos(\theta)^2 - r^2) dphi^2 \tag{2.12}$$

Definition der kovarianten Raumzeit-Metrik eines schwarzen Lochs der Masse M in Schwarzschildkoordinaten:

```
> coord := [t, r, theta, phi];  
g_compts := array(symmetric,sparse, 1..4, 1..4):  
g_compts[1,1] := 1-2*M/r: g_compts[2,2] := -1/g_compts[1,1]:  
g_compts[3,3] := -r^2: g_compts[4,4] := -r^2*sin(theta)^2:  
g := create( [-1,-1], eval(g_compts));
```

$$g := \text{create} \left(\begin{array}{c} [-1, -1] \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 - \frac{2M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin(\theta)^2 \end{array} \right) \end{array} \right) \quad (4.1.1)$$

Berechnung des infinitesimalen Weglängenelements ds²:

```
> dx:=create([1], array([dt,dr,dtheta,dphi])):  
ds2:=get_compts(prod(dx,lower(g,dx,1),[1,1])):  
ds2:=collect(simplify(ds2),[dt,dr,dtheta,dphi]):
```

Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. [Matthias Hanauske](#)

[Home](#) [Research](#) [Contact](#)

[Einführung](#)

[Teil I: Analytische Berechnungen und numerische Simulationen in Maple](#)

[Teil II: Paralleles Programmieren mit C++ und OpenMP/MPI](#)

[Teil III: Computersimulationen mit dem Einstein-Toolkit](#)

[Aufgaben](#)

Aufgaben im Kurs allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

Aufgaben im Teil I: Analytische Berechnungen und numerische Simulationen in Maple

[Berechnung von Christoffelsymbolen der Schwarzschild-Metrik](#)

[Berechnung des Riemann Tensors der Schwarzschild-Metrik](#)

[Probekörper fällt radial in ein nichtrotierendes schwarzes Loch](#)

[Geodätische Bewegung eines Probekörpers um ein nichtrotierendes schwarzes Loch](#)

[Radialer Wurf eines Probekörpers in der Nähe eines nichtrotierenden schwarzen Lochs](#)

[Berechnung eines Neutronensterns](#)

[Berechnung eines Weißen Zwergs](#)

Webmail at FIAS | LON-CAPA Christoffelsymbole

https://lon-capa.server.uni-frankfurt.de/res/ufm/hanauske/Versuch1/T1/Aufgaben/T1V1a.problem

Ihr Firefox ist veraltet - dies gefährdet Ihre Sicherheit. Aktualisieren Sie Firefox, um sich zu schützen. [Jetzt aktualisieren](#)

Matthias Hanauske (Kurs-Koordinator) **Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer - General Theory of Relativity on the Computer** (M.Hanauske: VARTC 2018) (Mehr ...)

Hauptmenü | Inhalt | Kurs-Editor | Was gibt's Neues | Bewertungen | Personen | Einstellungen | Öffentlich | Rolle wechseln

Inhaltsverzeichnis » ... » Aufgaben » **Christoffelsymbole der Schwarzschild-Metrik**

Notizen | Linksammlung | Evaluieren | Feedback | Drucken | Info

Funktionen | Editor | Inhaltsbewertungen | Inhaltseinstellungen | Verzeichnis bearbeiten

Neue Nachrichten | Rollen | Hilfe | Logout

Die folgende Metrik beschreibt die raumzeitliche Struktur eines nichtrotierenden schwarzen Loch (Schwarzschildmetrik in Schwarzschildkoordinaten):

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

Die griechischen, raumzeitlichen Indices μ, ν laufen von 0..3 und entsprechen den folgenden sphärischen Koordinaten: $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \phi)$. Berechnen Sie den Wert des Christoffelsymbols Γ_{01}^0 , wobei die Masse M des schwarzen Loch und der radiale Abstand r den folgenden Werten entspricht:

M=15 , r=4.6

-0.128380691543992

Korrekt!
Ihre Nachweis-Nr. ist 163-3507

[Bisherige Antworten](#)

Webmail at FIAS | LON-CAPA Riemann Tensor

https://lon-capa.server.uni-frankfurt.de/res/ufm/hanauske/Versuch1/T1/Aufgaben/T1V1b.problem?symb=uploaded%2fufm%2f6W295110537c25a6eufml1%2fdefault_1459765405.sequence__4__ufm% 150% Suchen

Ihr Firefox ist veraltet – dies gefährdet Ihre Sicherheit. Aktualisieren Sie Firefox, um sich zu schützen. [Jetzt aktualisieren](#)

Matthias Hanauske (Kurs-Koordinator) **Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer - General Theory of Relativity on the Computer** (M.Hanauske: VARTC 2018) (Mehr ...) [Neue Nachrichten](#) Rollen Hilfe [Logout](#)

Hauptmenü Inhalt Kurs-Editor Was gibt's Neues Bewertungen Personen Einstellungen Öffentlich Rolle wechseln

Inhaltsverzeichnis » ... » Aufgaben » **Riemann Tensor der Schwarzschild-Metrik** Notizen Linksammlung Evaluieren Feedback Drucken Info

Funktionen Editor Inhaltsbewertungen Inhaltseinstellungen Verzeichnis bearbeiten

Die folgende Metrik beschreibt die raumzeitliche Struktur eines nichtrotierendes schwarzes Loch (Schwarzschildmetrik in Schwarzschildkoordinaten):

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

Die griechischen, raumzeitlichen Indices μ, ν laufen von 0..3 und entsprechen den folgenden sphärischen Koordinaten:
 $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \phi)$. Berechnen Sie den Wert des Riemann Tensors R_{0101} , wobei die Masse M des schwarzen Loch und der radiale Abstand r den folgenden Werten entspricht:

M=40 , r=4.9

Antwort einreichen Versuche 0/20

Diskussionsbeitrag abschicken [Feedback geben](#)

https://lon-capa.server.uni-frankfurt.de/adm/logout

Die folgende Metrik beschreibt die homogene, isotrope zeitliche Entwicklung des Universums (Robertson-Walker Metrik):

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a(t)^2}{1 - k r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

Die Funktion $a(t)$ bezeichnet den Skalenfaktor des Universums zur Zeit t und der Parameter k kennzeichnet den Krümmungsparameter des Universums. Die griechischen, raumzeitlichen Indices μ, ν laufen von 0..3 und entsprechen den folgenden sphärischen Koordinaten: $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \phi)$. Berechnen Sie das Christoffelsymbols Γ_{11}^0 und geben Sie an welcher der unten stehende Ausdrücke richtig ist:

- $\Gamma_{11}^0 = \frac{k r}{1 - k r^2}$
- $\Gamma_{11}^0 = \frac{\frac{da(t)}{dt}}{1 - k r^2}$
- $\Gamma_{11}^0 = -\frac{a(t)}{1 - k r^2}$
- $\Gamma_{11}^0 = \frac{2 a(t) \frac{da(t)}{dt}}{1 - k r^2}$
- $\Gamma_{11}^0 = \frac{a(t) \frac{da(t)}{dt}}{1 - k r^2}$

Antwort einreichen | Versuche 0/2

Diskussionsbeitrag abschicken

Feedback geben


```

with(plots):
with(plottools):
Definition der Robertson Walker Metrik
> coord := [t, r, theta, phi]:
g_compts := array(symmetric,sparse, 1..4, 1..4):
g_compts[1,1] := 1:
g_compts[2,2] := -a(t)^2/(1-k*r^2):
g_compts[3,3] := -a(t)^2*r^2:
g_compts[4,4] := -a(t)^2*r^2*sin(theta)^2:
g := create( [-1,-1], eval(g_compts));
    
```

$$g := \text{table} \left(\text{index_char} = [-1, -1], \text{compts} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a(t)^2}{1-k r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 \sin(\theta)^2 \end{pmatrix} \right) \quad (1.1)$$

```

Kontravariante Raumzeit-Metrik:
> ginv := invert( g, 'detg' );
    
```

$$\text{ginv} := \text{table} \left(\text{index_char} = [1, 1], \text{compts} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1+k r^2}{a(t)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 a(t)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sin(\theta)^2 r^2 a(t)^2} \end{pmatrix} \right) \quad (1.2)$$

```

Raumzeit-Metrik mit gemischten Komponenten:
> raise(ginv,g,1);
    
```

$$\text{table} \left(\text{index_char} = [1, -1], \text{compts} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \quad (1.3)$$

```

Erste partielle Ableitung der Metrik:
> Dig := d1metric ( g, coord );
    
```

$$Dig := \text{table} \left(\text{index_char} = [-1, -1, -1], \text{compts} = \text{ARRAY} \left[\text{cf1}, [1..4, 1..4, 1..4], \begin{matrix} (1, 1, 1) = 0, (1, 1, 2) = 0, (1, 1, 3) = 0, (1, 1, 4) = 0, (1, 2, 1) = 0, (1, 2, 2) = 0, (1, 2, 3) = 0, (1, 2, 4) = 0, (1, 3, 1) = 0, (1, 3, 2) = 0, (1, 3, 3) = 0, (1, 3, 4) = 0, (1, 4, 1) = 0, (1, 4, 2) = 0, (1, 4, 3) = 0, (1, 4, 4) = 0, (2, 1, 1) = 0, (2, 1, 2) = 0, (2, 1, 3) = 0, (2, 1, 4) = 0, (2, 2, 1) = \frac{2 a(t) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right)}{2}, (2, 2, 2) = -\frac{2 a(t)^2 k r}{2}, (2, 2, 3) = 0, (2, 2, 4) = 0, (2, 3, 1) = 0, (2, 3, 2) = 0, (2, 3, 3) = 0, (2, 3, 4) = 0, (2, 4, 1) = 0, (2, 4, 2) = 0, (2, 4, 3) = 0, (2, 4, 4) = 0 \end{matrix} \right] \right) \quad (1.4)$$

Maple interface toolbar with icons for file operations, editing, and navigation.

Maple interface menu bar: Text, Math, Drawing, Plot, Animation. Style settings: Maple Input, Monospaced, 12. Formatting icons: Bold, Italic, Underline, Bulleted List, Numbered List, Indent, Decrease Indent, Increase Indent, Paragraph, Text Color, Background Color, Font Color, Font Size, Font Style, Font Weight, Font Color, Background Color, Font Color, Font Size, Font Style, Font Weight.

Maple interface sidebar with tool categories: Favorites, Handwriting, Expression, Units (SI), Units (FPS), Common Symbols, Matrix, Components, Greek, Arrows, Relational, Relational Round, Negated, Large Operators, Operators, Open Face, Fraktur, Script, Miscellaneous.

Christoffel Symbole (kontravariante Form):

```
> Cf1 := Christoffel1 ( Dig );
```

$$Cf1 := \text{table} \left(\left[\text{index_char} = [-1, -1, -1], \text{compts} = \text{ARRAY} \left(cf1, [1..4, 1..4, 1..4], \left[\begin{aligned} &(1, 1, 1) = 0, (1, 1, 2) = 0, (1, 1, 3) = 0, (1, 1, 4) = 0, (1, 2, 1) = 0, (1, 2, 2) = \frac{a(t) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right)}{-1 + k r^2}, (1, 2, 3) = 0, (1, 2, 4) = 0, (1, 3, 1) = 0, (1, 3, 2) = 0, (1, 3, 3) = -a(t) r^2 \left(\frac{d}{dt} a(t) \right), (1, 3, 4) = 0, (1, 4, 1) = 0, (1, 4, 2) = 0, (1, 4, 3) = 0, (1, 4, 4) = -a(t) r^2 \sin(\theta)^2 \left(\frac{d}{dt} a(t) \right), (2, 1, 1) = 0, (2, 1, 2) = \frac{a(t) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right)}{-1 + k r^2}, (2, 1, 3) = 0, (2, 1, 4) = 0, (2, 2, 1) = -\frac{a(t) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right)}{-1 + k r^2}, (2, 2, 2) = -\frac{a(t)^2 k r}{(-1 + k r^2)^2}, (2, 2, 3) = 0, (2, 2, 4) = 0, (2, 3, 1) = 0, (2, 3, 2) = 0, (2, 3, 3) = -a(t)^2 r, (2, 3, 4) = 0, (2, 4, 1) = 0, (2, 4, 2) = 0, (2, 4, 3) = 0, (2, 4, 4) = -a(t)^2 r \sin(\theta)^2, (3, 1, 1) = 0, (3, 1, 2) = 0, (3, 1, 3) = -a(t) r^2 \left(\frac{d}{dt} a(t) \right), (3, 1, 4) = 0, (3, 2, 1) = 0, (3, 2, 2) = 0, (3, 2, 3) = -a(t)^2 r, (3, 2, 4) = 0, (3, 3, 1) = a(t) r^2 \left(\frac{d}{dt} a(t) \right), (3, 3, 2) = a(t)^2 r, (3, 3, 3) = 0, (3, 3, 4) = 0, (3, 4, 1) = 0, (3, 4, 2) = 0, (3, 4, 3) = 0, (3, 4, 4) = -a(t)^2 r^2 \sin(\theta) \cos(\theta), (4, 1, 1) = 0, (4, 1, 2) = 0, (4, 1, 3) = 0, (4, 1, 4) = -a(t) r^2 \sin(\theta)^2 \left(\frac{d}{dt} a(t) \right), (4, 2, 1) = 0, (4, 2, 2) = 0, (4, 2, 3) = 0, (4, 2, 4) = -a(t)^2 r \sin(\theta)^2, (4, 3, 1) = 0, (4, 3, 2) = 0, (4, 3, 3) = 0, (4, 3, 4) = -a(t)^2 r^2 \sin(\theta) \cos(\theta), (4, 4, 1) = a(t) r^2 \sin(\theta)^2 \left(\frac{d}{dt} a(t) \right), (4, 4, 2) = a(t)^2 r \sin(\theta)^2, (4, 4, 3) = a(t)^2 r^2 \sin(\theta) \cos(\theta), (4, 4, 4) = 0 \right] \right] \right)$$

Christoffel Symbole (erster Index kontravariant, zweiter und dritter kontravariant):

```
> Cf2 := Christoffel2( ginv, Cf1 );
```

$$Cf2 := \text{table} \left(\left[\text{index_char} = [1, -1, -1], \text{compts} = \text{ARRAY} \left(cf2, [1..4, 1..4, 1..4], \left[\begin{aligned} &(1, 1, 1) = 0, (1, 1, 2) = 0, (1, 1, 3) = 0, (1, 1, 4) = 0, (1, 2, 1) = 0, (1, 2, 2) = -\frac{a(t) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right)}{-1 + k r^2}, (1, 2, 3) = 0, (1, 2, 4) = 0, (1, 3, 1) = 0, (1, 3, 2) = 0, (1, 3, 3) = a(t) r^2 \left(\frac{d}{dt} a(t) \right), (1, 3, 4) = 0, (1, 4, 1) = 0, (1, 4, 2) = 0, (1, 4, 3) = 0, (1, 4, 4) = a(t) r^2 \sin(\theta)^2 \left(\frac{d}{dt} a(t) \right), (2, 1, 1) = 0, (2, 1, 2) = \frac{\frac{d}{dt} a(t)}{a(t)}, (2, 1, 3) = 0, (2, 1, 4) = 0, (2, 2, 1) = \frac{\frac{d}{dt} a(t)}{a(t)}, (2, 2, 2) = -\frac{k r}{-1 + k r^2}, (2, 2, 3) = 0, (2, 2, 4) = 0, (2, 3, 1) = 0, (2, 3, 2) = 0, (2, 3, 3) = (-1 + k r^2) r, (2, 3, 4) = 0, (2, 4, 1) = 0, (2, 4, 2) = 0, (2, 4, 3) = 0, (2, 4, 4) = (-1 + k r^2) r \sin(\theta)^2, (3, 1, 1) = 0, (3, 1, 2) = 0, (3, 1, 3) = \frac{\frac{d}{dt} a(t)}{a(t)}, (3, 1, 4) = 0, (3, 2, 1) = 0, (3, 2, 2) = 0, (3, 2, 3) = \frac{1}{r}, (3, 2, 4) = 0, (3, 3, 1) = \frac{\frac{d}{dt} a(t)}{a(t)}, (3, 3, 2) = \frac{1}{r}, (3, 3, 3) = 0, (3, 3, 4) = 0, (3, 4, 1) = 0, (3, 4, 2) = 0, (3, 4, 3) = 0, (3, 4, 4) = -\sin(\theta) \cos(\theta), (4, 1, 1) = 0, (4, 1, 2) = 0, (4, 1, 3) = 0, (4, 1, 4) = \frac{\frac{d}{dt} a(t)}{a(t)}, (4, 2, 1) = 0, (4, 2, 2) = 0, (4, 2, 3) = 0, (4, 2, 4) = \frac{1}{r}, (4, 3, 1) = 0, (4, 3, 2) = 0, (4, 3, 3) = 0, (4, 3, 4) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}, (4, 4, 1) = \frac{\frac{d}{dt} a(t)}{a(t)}, (4, 4, 2) = \frac{1}{r}, (4, 4, 3) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}, (4, 4, 4) = 0 \right] \right] \right)$$

Die folgende Metrik beschreibt die homogene, isotrope zeitliche Entwicklung des Universums (Robertson-Walker Metrik):

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a(t)^2}{1 - k r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

Die Funktion $a(t)$ bezeichnet den Skalenfaktor des Universums zur Zeit t und der Parameter k kennzeichnet den Krümmungsparameter des Universums. Die griechischen, raumzeitlichen Indices μ, ν laufen von 0..3 und entsprechen den folgenden sphärischen Koordinaten: $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \phi)$. Berechnen Sie die $(1, 1)$ -Komponente des Einsteintensors $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$ und geben Sie an welcher der unten stehende Ausdrücke richtig ist:

- $G_{11} = G_{rr} = -\frac{3 \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 + k}{(a(t))^2}$
- $G_{11} = G_{rr} = -\frac{4 a(t) \frac{d^2 a(t)}{dt^2} + \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 + k}{1 - k r^2}$
- $G_{11} = G_{rr} = -\frac{2 a(t) \frac{d^2 a(t)}{dt^2} + 2 \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 + k}{1 - k r^2}$
- $G_{11} = G_{rr} = \frac{2 a(t) \frac{d^2 a(t)}{dt^2} + \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 + k}{1 - k r^2}$
- $G_{11} = G_{rr} = \frac{2 a(t) \frac{d^2 a(t)}{dt^2} + \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 + k}{1 - k r^4}$

4) = 0]]])

Angabe einzelner Komponenten eines Tensors:

```
> get_compts(RMN)[3,2,2,3];
```

$$-\frac{r^2 a(t)^2 \left(\left(\frac{d}{dt} a(t) \right)^2 + k \right)}{-1 + k r^2} \tag{1.9}$$

Ricci Tensor:

```
> RICCI := Ricci( ginv, RMN );
```

RICCI := table index_char = [-1, -1], compts

(1.10)

$$= \left[\left[\frac{3 \left(\frac{d^2}{dt^2} a(t) \right)}{a(t)}, 0, 0, 0 \right], \right.$$

$$\left[0, \frac{a(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} a(t) \right) + 2 \left(\frac{d}{dt} a(t) \right)^2 + 2 k}{-1 + k r^2}, 0, 0 \right],$$

$$\left[0, 0, -a(t) r^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} a(t) \right) - 2 \left(\frac{d}{dt} a(t) \right)^2 r^2 - 2 k r^2, 0 \right],$$

$$\left[0, 0, 0, r^2 \left(-a(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} a(t) \right) + a(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} a(t) \right) \cos(\theta)^2 - 2 \left(\frac{d}{dt} a(t) \right)^2 + 2 \left(\frac{d}{dt} a(t) \right)^2 \cos(\theta)^2 - 2 k \cos(\theta)^2 \right) \right] \right]$$

```
> get_compts(RICCI)[1,1];
```

$$\frac{3 \left(\frac{d^2}{dt^2} a(t) \right)}{a(t)} \tag{1.11}$$

Ricci Skalar:

- ▶ Favorites
- ▶ Handwriting
- ▶ Expression
- ▶ Units (SI)
- ▶ Units (FPS)
- ▶ Common Symbols
- ▶ Matrix
- ▶ Components
- ▶ Greek
- ▶ Arrows
- ▶ Relational
- ▶ Relational Round
- ▶ Negated
- ▶ Large Operators
- ▶ Operators
- ▶ Open Face
- ▶ Fraktur
- ▶ Script
- ▶ Miscellaneous

Ricci Skalar:
 > **RS := Ricciscalar(ginv, RICCI);**

$$RS := \text{table} \left(\left[\begin{array}{c} \text{index_char} = [], \text{compts} = \frac{6 \left(a(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} a(t) \right) + \left(\frac{d}{dt} a(t) \right)^2 + k \right)}{a(t)^2} \end{array} \right] \right) \quad (1.12)$$

Überprüfung:
 > **RICCIOU:=raise(ginv,RICCI,1);**
 > **contract(RICCIOU, [1, 2]);**

$$RICCIOU := \text{table} \left(\left[\begin{array}{c} \text{index_char} = [1, -1], \text{compts} = \begin{pmatrix} 3 \left(\frac{d^2}{dt^2} a(t) \right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} a(t) \right) + 2 \left(\frac{d}{dt} a(t) \right)^2 + 2k}{a(t)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} a(t) \right) + 2 \left(\frac{d}{dt} a(t) \right)^2 + 2k}{a(t)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} a(t) \right) + 2 \left(\frac{d}{dt} a(t) \right)^2 + 2k}{a(t)^2} \end{pmatrix} \end{array} \right] \right)$$

$$\text{table} \left(\left[\begin{array}{c} \text{index_char} = [], \text{compts} = \frac{6 \left(a(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} a(t) \right) + \left(\frac{d}{dt} a(t) \right)^2 + k \right)}{a(t)^2} \end{array} \right] \right) \quad (1.13)$$

Einsteintensor:
 > **Estn := Einstein(g, RICCI, RS);**

$$Estn := \text{table} \left(\left[\begin{array}{c} \text{index_char} = [-1, -1], \text{compts} \end{array} \right] \right) \quad (1.14)$$

> **Estn := Einstein(g, RICCI, RS);**

$$Estn := table \quad index_char = [-1, -1], \text{compts}$$

$$= \left[\left[\begin{array}{c} 3 \left(\left(\frac{d}{dt} a(t) \right)^2 + k \right) \\ a(t)^2 \end{array}, 0, 0, 0 \right], \right.$$

$$\left. \left[0, - \frac{2 a(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} a(t) \right) + \left(\frac{d}{dt} a(t) \right)^2 + k}{-1 + k r^2}, 0, 0 \right], \right.$$

$$\left. \left[0, 0, 2 a(t) r^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} a(t) \right) + \left(\frac{d}{dt} a(t) \right)^2 r^2 + k r^2, 0 \right], \right.$$

$$\left. \left[0, 0, 0, -r^2 \left(-2 a(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} a(t) \right) + 2 a(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} a(t) \right) \cos(\theta)^2 - \left(\frac{d}{dt} a(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} a(t) \right)^2 \cos(\theta)^2 - k + k \cos(\theta)^2 \right) \right] \right]$$

Überprüfung:

> **lin_com(1, RICCI, - 1/2*get_compts(RS), g);**

$$table \quad index_char = [-1, -1], \text{compts}$$

(1.14)

(1.15)

Die folgende Metrik beschreibt die homogene, isotrope zeitliche Entwicklung des Universums (Robertson-Walker Metrik):

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a(t)^2}{1 - k r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

Die Funktion $a(t)$ bezeichnet den Skalenfaktor des Universums zur Zeit t und der Parameter k kennzeichnet den Krümmungsparameter des Universums. Die griechischen, raumzeitlichen Indices μ, ν laufen von 0..3 und entsprechen den folgenden sphärischen Koordinaten: $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \phi)$. Berechnen Sie die $(0, 0)$ -Komponente des folgenden zusammengesetzten Tensors $Q^\mu{}_\nu = R^{\alpha\beta\gamma\mu} R_{\alpha\beta\gamma\nu} - \frac{1}{4} R^{\alpha\beta\gamma\lambda} R_{\alpha\beta\gamma\lambda} g^\mu{}_\nu$ und geben Sie an welcher der unten stehende Ausdrücke richtig ist:

- $Q^0{}_0 = Q^t{}_t = \frac{3 \left((a(t))^4 \left(\frac{d^2 a(t)}{dt^2} \right)^2 - \left(\frac{da(t)}{dt} \right)^2 - 2 k \left(\frac{da(t)}{dt} \right)^2 - k^2 \right)}{(a(t))^4}$
- $Q^0{}_0 = Q^t{}_t = \frac{3 \left((a(t))^2 \left(\frac{d^2 a(t)}{dt^2} \right)^2 - \left(\frac{da(t)}{dt} \right)^4 - 2 k \left(\frac{da(t)}{dt} \right)^2 - k^2 \right)}{(a(t))^4}$
- $Q^0{}_0 = Q^t{}_t = \frac{2 \left((a(t))^2 \left(\frac{d^2 a(t)}{dt^2} \right)^2 - \left(\frac{da(t)}{dt} \right)^4 - 4 k \left(\frac{da(t)}{dt} \right)^2 - k^2 \right)}{(a(t))^4}$
- $Q^0{}_0 = Q^t{}_t = \frac{3 \left((a(t))^2 \left(\frac{d^2 a(t)}{dt^2} \right)^2 - \left(\frac{da(t)}{dt} \right)^4 - 2 k \left(\frac{da(t)}{dt} \right)^2 - k^2 \right)}{1 - k r^2}$

Berechnung des infinitesimalen Weglängenelements ds²:

```
> dx:=create([1], array([dt,dr,dtheta,dphi]));
ds2:=get_compts(prod(dx,lower(g,dx,1),[1,1]));
ds2:=collect(simplify(ds2), [dt,dr,dtheta,dphi]);
```

$$ds2 := dt^2 + \frac{dr^2 a(t)^2}{-1 + kr^2} + \frac{(a(t)^2 r^2 - a(t)^2 r^4 k) dtheta^2}{-1 + kr^2} + \frac{(a(t)^2 r^4 k \cos(\theta)^2 + a(t)^2 r^2 - a(t)^2 r^4 k - a(t)^2 r^2 \cos(\theta)^2) dphi^2}{-1 + kr^2} \quad (1.16)$$

Quadratischer Beitrag in der alternativen ART-Theorie von Prof. Struckmeier (FIAS Frankfurt)

```
> RMNinv:= raise(ginv,RMN,1,2,3,4):
Eins:=raise(ginv,g,1):
EqQuad:=1in_com(1,prod(RMNinv,RMN,[1,1],[2,2],[3,3]),- 1/4,prod(Eins,prod(RMNinv,RMN,[1,1],[2,2],[3,3],[4,4]))):
```

$$EqQuad := table \left(\left[\begin{array}{c} index_char = [1, -1], \\ compts = \left[\begin{array}{c} 3 \left(\left(\frac{d^2}{dt^2} a(t) \right)^2 a(t)^2 - \left(\frac{d}{dt} a(t) \right)^4 - 2 \left(\frac{d}{dt} a(t) \right)^2 k - k^2 \right) \\ a(t)^4 \end{array} \right], 0,0,0 \end{array} \right] \right) \quad (1.17)$$

$$\left[\begin{array}{c} \left(\frac{d^2}{dt^2} a(t) \right)^2 a(t)^2 - \left(\frac{d}{dt} a(t) \right)^4 - 2 \left(\frac{d}{dt} a(t) \right)^2 k - k^2 \\ a(t)^4 \end{array} \right], 0,0$$

$$0,0, \left[\begin{array}{c} \left(\frac{d^2}{dt^2} a(t) \right)^2 a(t)^2 - \left(\frac{d}{dt} a(t) \right)^4 - 2 \left(\frac{d}{dt} a(t) \right)^2 k - k^2 \\ a(t)^4 \end{array} \right], 0$$

$$0,0,0, \left[\begin{array}{c} \left(\frac{d^2}{dt^2} a(t) \right)^2 a(t)^2 - \left(\frac{d}{dt} a(t) \right)^4 - 2 \left(\frac{d}{dt} a(t) \right)^2 k - k^2 \\ a(t)^4 \end{array} \right] \right]$$

Die Bewegung eines Probekörpers um ein nichtrotierendes schwarzes Loch wird mittels der Geodätengleichung beschrieben:

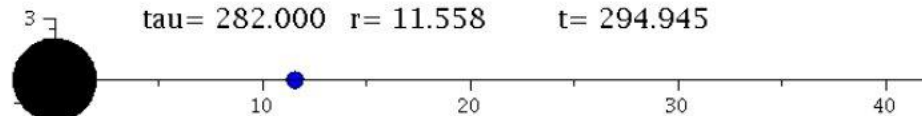
$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^0 \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}$$

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^1 \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}$$

$$\frac{d^2 \theta}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^2 \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}$$

$$\frac{d^2 \phi}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^3 \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}$$



wobei τ ein affiner Parameter (z.B. die Eigenzeit), t , r , θ und ϕ die Schwarzschildkoordinaten und $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ die Christoffel Symbole zweiter Art darstellen. Lösen Sie, unter Verwendung des Computeralgebra-Systems Maple, die Geodätengleichung eines radial in ein schwarzes Loch einfallenden Probekörpers. Verwenden Sie die folgenden Anfangsbedingungen: Zur Eigenzeit $\tau=0$ sei der Probekörper bei $r=50.5$, $\theta=0$ und $\phi=0$; die Anfangsgeschwindigkeiten seien: $\frac{dr}{d\tau}=0$, $\frac{d\theta}{d\tau}=0$, $\frac{d\phi}{d\tau}=0$ und die Masse des schwarzen Lochs betrage $M=1$. Berechnen Sie wo sich der Probekörper bei $\tau = 300 \approx 1$ [ms] befindet und geben Sie den Radius $r(300)$ in [km] an.

Die Geodätengleichung

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0$$

Maple Ausgabe bei festgelegter Schwarzschild-Raumzeit

$$\begin{aligned} \text{eqns} := & \left\{ \frac{d^2}{d\lambda^2} \tau(\lambda) - \frac{2M \left(\frac{d}{d\lambda} \tau(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right)}{r(-r+2M)} = 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} \phi(\lambda) \right. \\ & + \frac{2 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)}{r} + \frac{2 \cos(\theta) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)}{\sin(\theta)} = 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} \theta(\lambda) \\ & + \frac{2 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right)}{r} - \sin(\theta) \cos(\theta) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)^2 = 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} r(\lambda) \\ & - \frac{(-r+2M)M \left(\frac{d}{d\lambda} \tau(\lambda) \right)^2}{r^3} + \frac{M \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right)^2}{r(-r+2M)} + (-r+2M) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right)^2 + (\\ & \left. -r+2M) \sin(\theta)^2 \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)^2 = 0 \right\} \end{aligned}$$

wobei die $\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}$ die Christoffel Symbole zweiter Art und λ ein affiner Parameter (z.B. die Eigenzeit) darstellen.

Radial in ein schwarzes Loch einfallender Probekörper

```
> restart:
with( tensor ):
with(plots):
with(plottools):
```

Definition der kovarianten Raumzeit-Metrik eines schwarzen Lochs der Masse M in Schwarzschildkoordinaten:

```
> coord := [t, r, theta, phi]:
g_compts := array(symmetric,sparse, 1..4, 1..4):
g_compts[1,1] := 1-2*M/r: g_compts[2,2] := -1/g_compts[1,1]:
g_compts[3,3] := -r^2: g_compts[4,4] := -r^2*sin(theta)^2:
g := create( [-1,-1], eval(g_compts));
```

$$g := \text{table} \left(\begin{array}{c} \text{index_char} = [-1, -1], \text{compts} \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 - \frac{2M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

(2.1.1)

Berechnung der kontravarianten Metrik und der Christoffel Symbole:

```
> ginv := invert( g, 'detg' ):
D1g := d1metric( g, coord ):
D2g := d2metric( D1g, coord ):
Cf1 := Christoffel1( D1g ):
Cf2:= Christoffel2( ginv, Cf1 ):
```


Berechnung der Geodätengleichung als Funktion des affinen Parameters λ : Die Geodätengleichung ist ein System gekoppelter Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d^2 t}{d\lambda^2} &= -\Gamma_{\nu\rho}^0 \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \\ \frac{d^2 r}{d\lambda^2} &= -\Gamma_{\nu\rho}^1 \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \\ \frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} &= -\Gamma_{\nu\rho}^2 \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \\ \frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} &= -\Gamma_{\nu\rho}^3 \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \end{aligned} ,$$

wobei λ ein affiner Parameter (z.B. die Eigenzeit), t, r, θ und ϕ die Schwarzschildkoordinaten und $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ die Christoffel Symbole zweiter Art darstellen.

```
> eqns:=geodesic_eqns( coord, lambda, Cf2 );
```

$$\begin{aligned} eqns := & \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2}{d\lambda^2} t(\lambda) - \frac{2M}{r(-r+2M)} \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) &= 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} \phi(\lambda) \\ + \frac{2 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)}{r} + \frac{2 \cos(\theta) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)}{\sin(\theta)} &= 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} \theta(\lambda) \\ + \frac{2 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right)}{r} - \sin(\theta) \cos(\theta) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)^2 &= 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} r(\lambda) \\ - \frac{(-r+2M)M \left(\frac{d}{d\lambda} t(\lambda) \right)^2}{r^3} + \frac{M \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right)^2}{r(-r+2M)} + (-r+2M) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right)^2 + & \\ -r+2M \sin(\theta)^2 \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)^2 &= 0 \end{aligned} \right. \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Wir lassen nur radiale Bewegung zu und setzen die Masse des schwarzen Lochs auf M=1:

```
> eq1:=subs({diff(phi(lambda), lambda)=0, diff(theta(lambda), lambda)=0, M=1}, eqns[1]):
eq2:=subs({diff(phi(lambda), lambda)=0, diff(theta(lambda), lambda)=0, M=1}, eqns[2]):
eq3:=subs({diff(phi(lambda), lambda)=0, diff(theta(lambda), lambda)=0, M=1}, eqns[3]):
eq4:=subs({diff(phi(lambda), lambda)=0, diff(theta(lambda), lambda)=0, M=1}, eqns[4]):
eq1:=simplify(subs({r=r(lambda)}, eq1)):
eq4:=simplify(subs({r=r(lambda)}, eq4)):
```

$$\begin{aligned}
 eq1 &:= \frac{\left(\frac{d^2}{d\lambda^2} r(\lambda)\right) r(\lambda)^2 - 2 \left(\frac{d^2}{d\lambda^2} r(\lambda)\right) r(\lambda) + 2 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda)\right) \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda)\right)}{r(\lambda) (r(\lambda) - 2)} = 0 \\
 eq4 &:= \frac{1}{r(\lambda)^3 (r(\lambda) - 2)} \left(\left(\frac{d^2}{d\lambda^2} r(\lambda)\right) r(\lambda)^4 - 2 \left(\frac{d^2}{d\lambda^2} r(\lambda)\right) r(\lambda)^3 \right. \\
 &\quad + \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda)\right)^2 r(\lambda)^2 - 4 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda)\right)^2 r(\lambda) + 4 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda)\right)^2 \\
 &\quad \left. - \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda)\right)^2 r(\lambda)^2 \right) = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.1.3}$$

Anfangswerte:

Zur Zeit $t=0$ sei der fallende Körper bei einem Radius von $r=10=5*$ (Schwarzschildradius), die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers sei 0. Wir beschreiben den Fall aus der Sichtweise eines im unendlichen ruhenden Beobachters. Bemerkung: Der Anfangswert dt_0 ergibt sich hierbei aus der Bedingung des infinitesimalen Weglängenelements $\frac{ds^2}{d\lambda^2} = u^\mu u_\mu = 1$, wobei hierbei der affine Parameter λ als Eigenzeit τ interpretiert wird und u^μ die 4er-Geschwindigkeit des Körpers darstellt.

$$\frac{ds^2}{d\lambda^2} = 1 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{dr=d\theta=d\phi=0 \text{ bei } t=0} \quad \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt^2}{d\lambda^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}}$$

```

>      r0:=10:
      t0:=0:
      dr0:=0:
      dt0:=evalf(1/sqrt(1-2/r0)):
  
```

Numerisches Lösen der Geodätengleichung:

```

> Loes:=dsolve({eq1,eq4,t(0)=t0,r(0)=r0,D(r)(0)=0,D(t)(0)=dt0},{r(lambda),t(lambda)},type=numeric,output=listprocedure):
  
```

Zum Vergleich lösen wir auch die Bewegungsgleichung nach Newton:

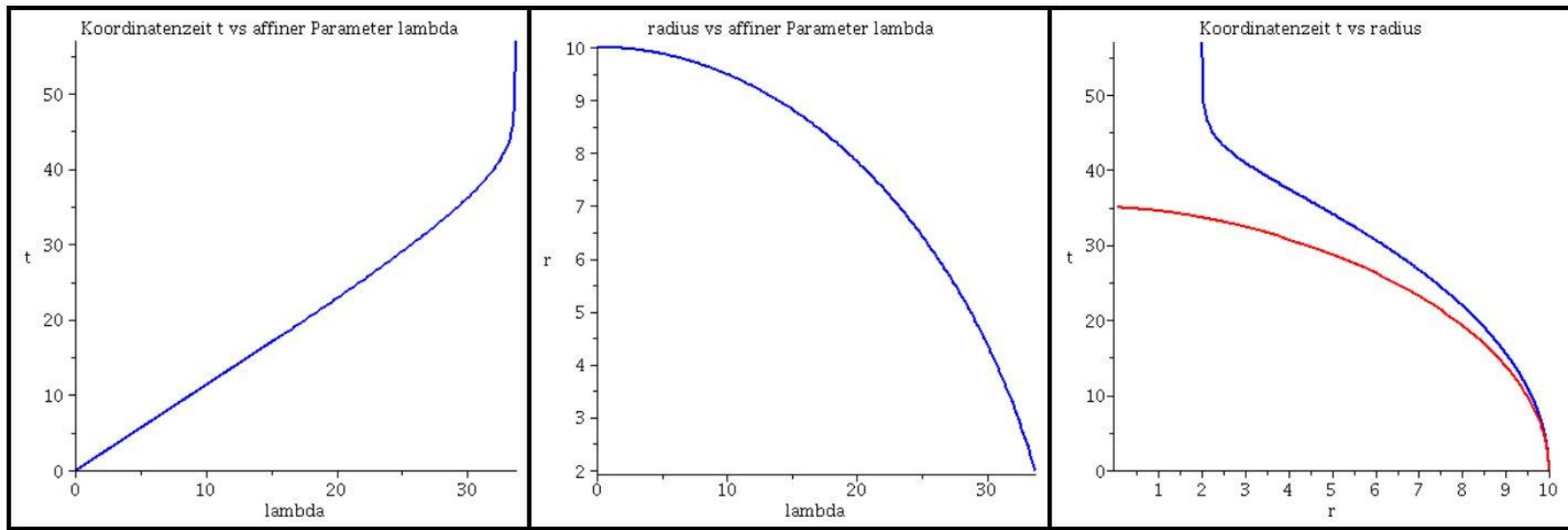
$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{1}{r^2}$$

Grafische Veranschaulichung der Lösung (rote Kurve ist die nach Newton berechnete):

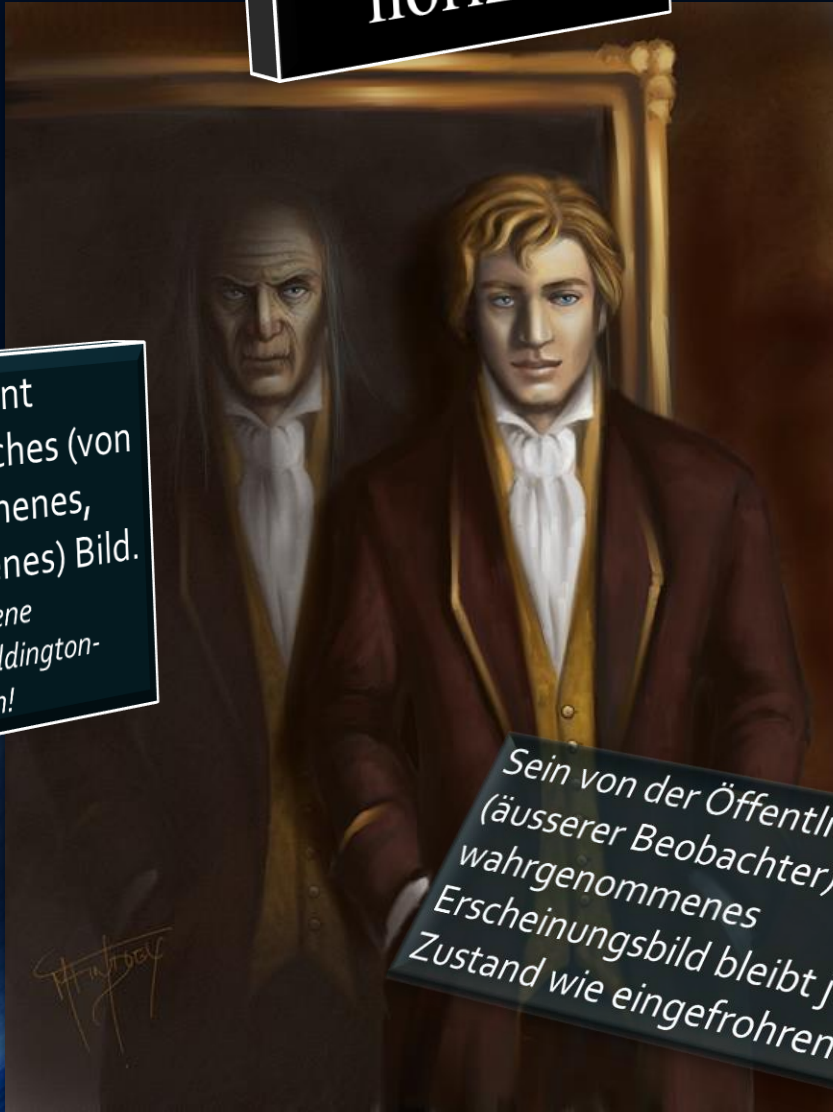
```

>
      lend:=33.7:
      lendn:=35.12:
Plot1:=odeplot(Loes, [lambda, t(lambda)], 0..lend, numpoints=200, color=blue, thickness=2, title="Koordinatenzeit t vs affiner Parameter
      lambda"):
Plot2:=odeplot(Loes, [lambda, r(lambda)], 0..lend, numpoints=200, color=blue, thickness=2, title="radius vs affiner Parameter lambda"):
Plot3:=odeplot(Loes, [r(lambda), t(lambda)], 0..lend, numpoints=700, color=blue, thickness=2, title="Koordinatenzeit t vs radius"):
Plot_newton:=odeplot(Loes_newton, [r(lambda), lambda], 0..lendn, numpoints=100, color=red, thickness=2):
display(Matrix(1, 3, [Plot1, Plot2, display(Plot3, Plot_newton)]));

```



Ereignis- horizont



Im Spiegel erscheint jedoch sein wirkliches (von ihm wahrgenommenes, moralisch verfallenes) Bild.
Transformation ins eigene Koordinatensystem, Eddington-Finkelstein Koordinaten!

Sein von der Öffentlichkeit (äusserer Beobachter) wahrgenommenes Erscheinungsbild bleibt jungen Zustand wie eingefrohren.

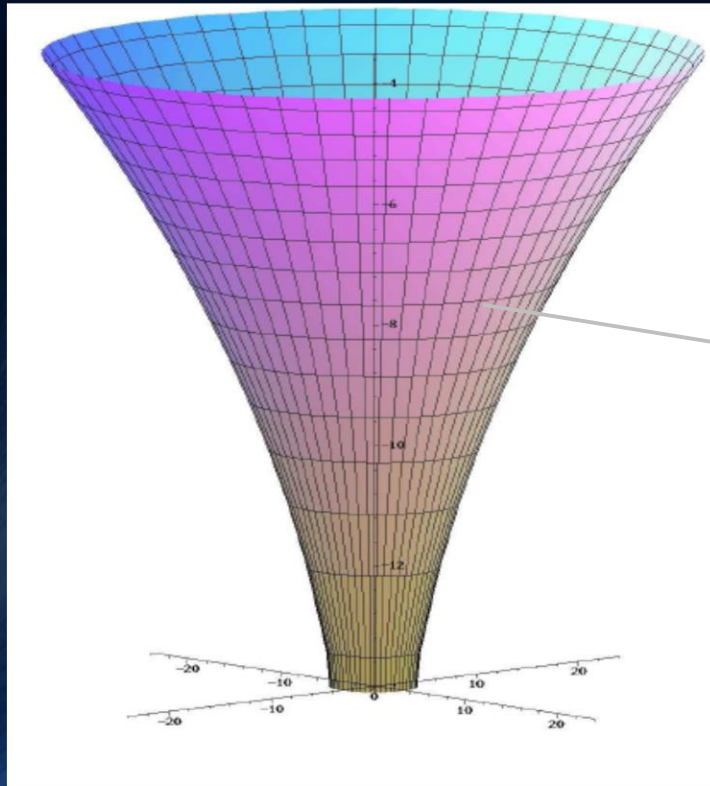
Für den äusseren Beobachter friert das Bild des Körpers, der in das schwarze Loch fällt, am Ereignishorizont ein. Der Körper selbst übertritt jedoch die Grenze und fällt weiter in die echte Singularität im Ursprung.

Dorian Gray wird in das schwarze Loch der moralischen Abgründe gezogen und übertritt eine Grenze von der aus er nicht mehr zurück kann.

Das Bildnis des schwarzen Loches

(die wohl beste Veranschaulichung der wesentlichen Eigenschaften eines schwarzen Loches)

Der Raumzeit-Trichter im Reichstagsgebäude



Das Bildnis des schwarzen Loches

(die wohl beste Veranschaulichung der wesentlichen Eigenschaften eines schwarzen Loches)



Ereignis-
horizont

Ereignishorizont

Echte Singularität

Black holes and the German Reichstag

One day a couple of years ago I was attending a meeting of the German Astronomical Society in Berlin, when I was gripped with an almost irrepressible sense of inner unrest. There was no other option – I simply had to leave the lecture halls of the Technical University and enjoy the gorgeous day outside. Before I left, however, I carefully taped my poster to the wall between the entrances to the men's and women's toilets, which seemed the perfect spot for it. Every congress delegate would now be forced – subliminally at least – to notice my creation.

After leaving the university buildings, I first soaked up the summer sunshine in the zoological gardens before heading towards the Reichstag – the home of the German parliament. As I did so, my thoughts wandered off in a different direction. What a waste of time, it occurred to me, all those boring lectures are. What physics desperately needs, I reasoned, is a new and exciting way of presenting the subject.

Unfortunately, modern physics is impossible to comprehend using intuition alone. How can bizarre concepts such as the curvature of space-time or the event horizon of a black hole be understood? What possible imagery could help non-scientists to grasp the significance and vital importance of some of the major insights of theoretical physics? Finding a simple way of conveying those ideas seemed an impossible task.



The funnel looks exactly like the diagrams used to illustrate the curvature of a black hole

Along the barrier are displayed various photographs of decisive events in German history that are designed to remind visitors of their responsibilities to the future. They are a warning against forgetfulness and against the repression of the Nazi era.

Suddenly I saw the significance of the information frozen on the pictures. Just as the politicians sit in the inner area of the black hole from which no useful information ever escapes, so the pictures represent external