

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

*PC-POOL RAUM 01.120
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
24. APRIL, 2020*

MATTHIAS HANAUSKE

*FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK
D-60438 FRANKFURT AM MAIN
GERMANY*

Aufgrund der Corona Krise findet die Vorlesung und die freiwilligen Übungstermine in diesem Semester nur Online statt.

2. Vorlesung

Allgemeines zur Vorlesung

- Ort und Zeit:
Nur Online/Virtuell
Live-Streaming (synchrone Lehrangebote, Zoom Meetings):
Freitags von 15.15-16.45 Uhr: Vorlesungstermine
Freitags von 14.15-15.15 Uhr :freiwillige Übungstermine
- Vorlesungs-Materialien (asynchronen Lehrangebote):
<http://th.physik.uni-frankfurt.de/~harauske/VARTC/> bzw.
<http://th.physik.uni-frankfurt.de/~harauske/VARTC/VARTCorona.html>
- Übungsaufgaben auf der Online-Lernplattform Lon Capa:
<http://lon-capa.server.uni-frankfurt.de/>
- Generelles zur Vorlesung:
Bei erfolgreicher Teilnahme 3 Creditpoints
Benoteter Schein mittels einer mündlichen Prüfung (30 Min.)
- Plan für die heutige Vorlesung:
Motivation, Kurzer Überblick der Inhalte der Vorlesung, kleine Einführung in Maple

Teil I

Analytische Berechnungen und numerische Simulationen in Maple und Python

Basierend auf der Einstein- und Geodätengleichung, werden im ersten Teil der Vorlesung unterschiedliche Probleme der allgemeinen Relativitätstheorie analysiert.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi T_{\mu\nu}$$

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0$$

Nichtrotierende schwarze Löcher

Ereignishorizonte, was geschieht wenn ein Teilchen in ein schwarzes Loch fällt, Bewegung von Probekörpern und Lichtteilchen um ein schwarzes Loch,..

Eigenschaften von Neutronensternen

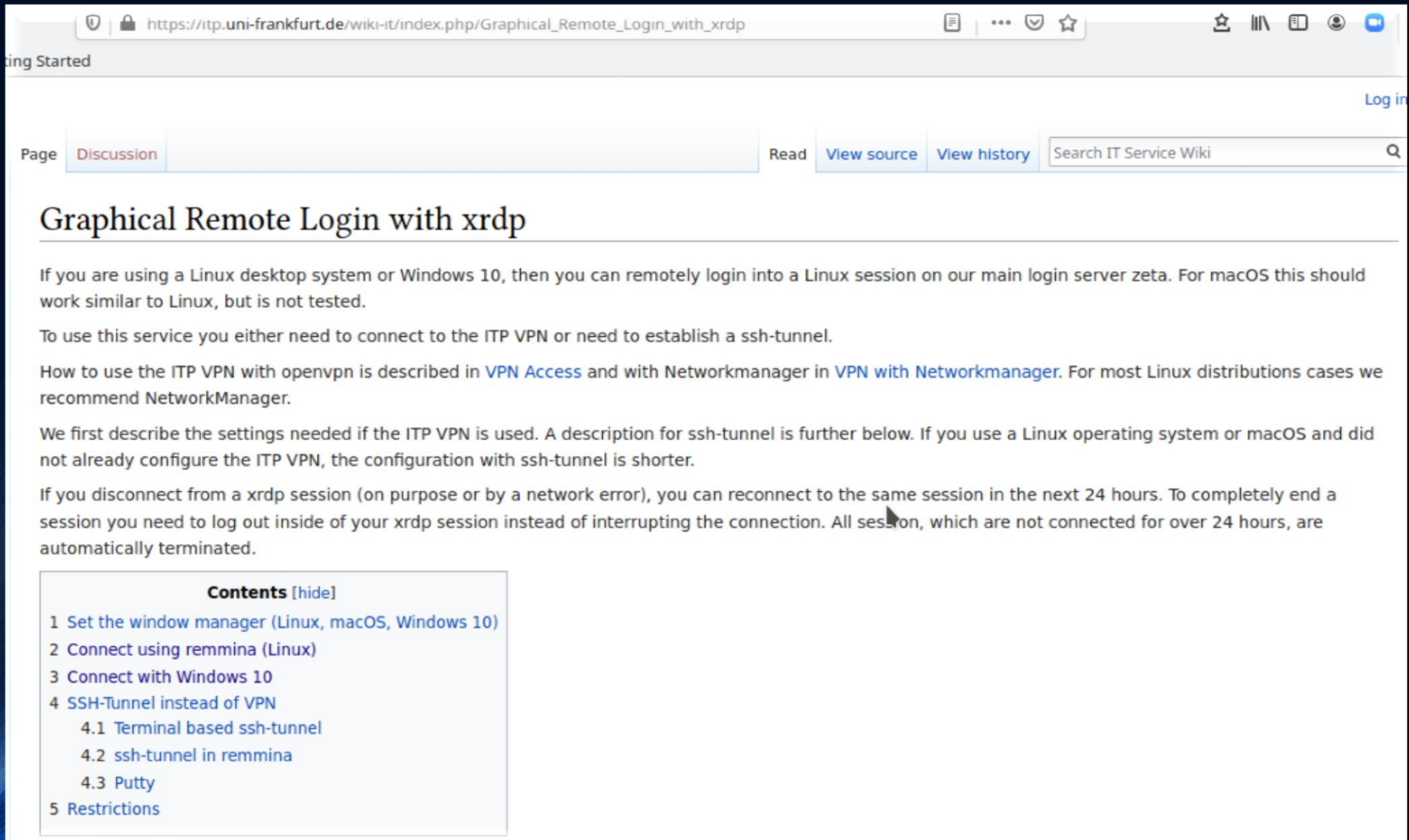
Verlauf der Dichte innerhalb eines NS, Masse-Radius Beziehung, Raumzeitkrümmung innerhalb und ausserhalb eines NS,..

Rotierende schwarzen Löchern

Mitführungseffekt der Raumzeit (frame-dragging),...

Vielleicht: Zeitliche Entwicklung des Universums
(Robertson-Walker-Metrik, Friedmann-Gleichung)

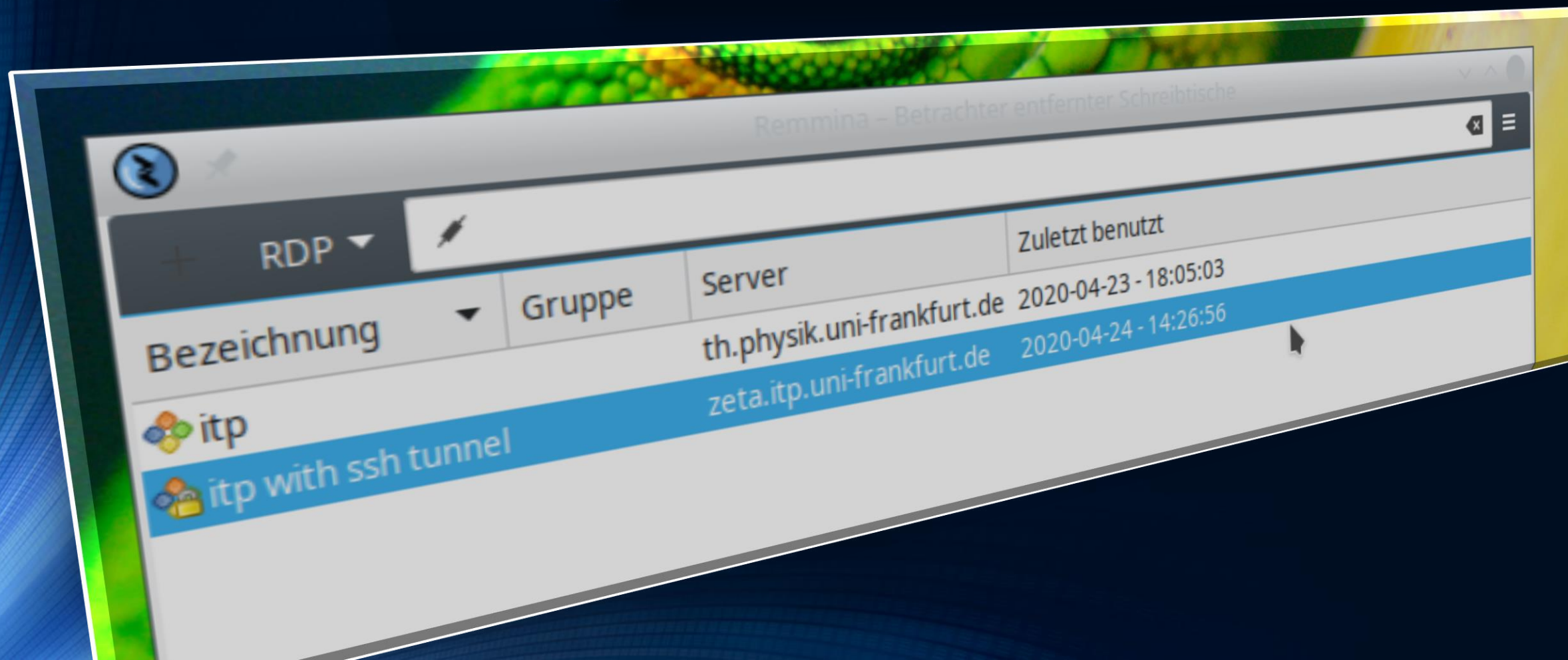
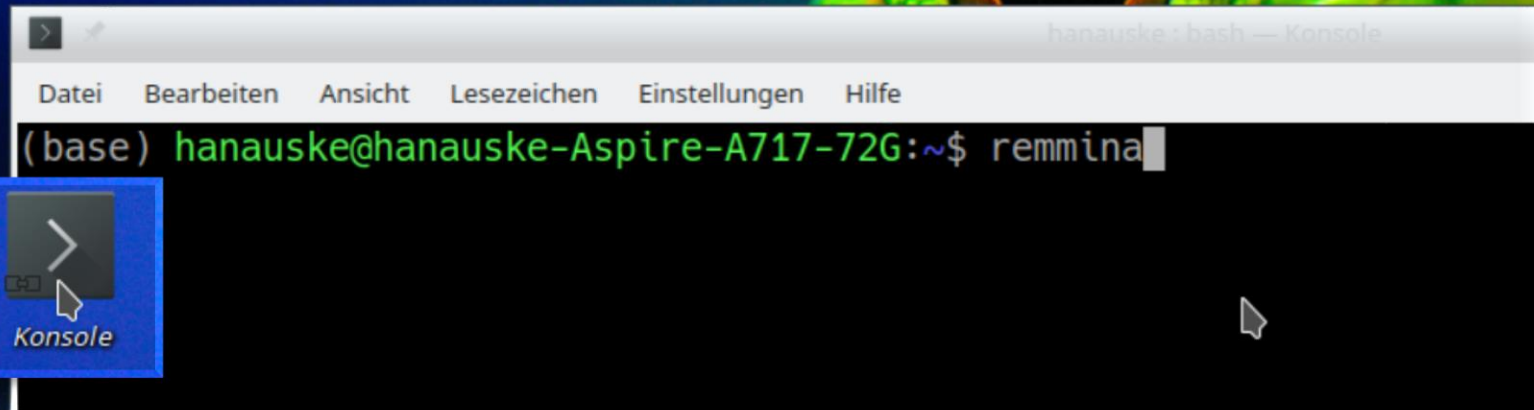
Zunächst jedoch:
„Wie mache ich von zuhause einen
„Remote Login“ auf den Server des ITP
(Institut für Theoretische Physik der Goethe Universität)?



The screenshot shows a web browser window with the address bar displaying `https://itp.uni-frankfurt.de/wiki-it/index.php/Graphical_Remote_Login_with_xrdp`. The page content includes a navigation bar with tabs for 'Discussion', 'View source', and 'View history', and a search box labeled 'Search IT Service Wiki'. The main heading is 'Graphical Remote Login with xrdp'. The text explains that users can remotely login to a Linux session on the main login server 'zeta' from Linux desktop systems or Windows 10. It also provides instructions on how to use the ITP VPN with OpenVPN or NetworkManager, and describes the settings needed for the ITP VPN. A 'Contents' section is visible at the bottom, listing the following topics:

- 1 Set the window manager (Linux, macOS, Windows 10)
- 2 Connect using remmina (Linux)
- 3 Connect with Windows 10
- 4 SSH-Tunnel instead of VPN
 - 4.1 Terminal based ssh-tunnel
 - 4.2 ssh-tunnel in remmina
 - 4.3 Putty
- 5 Restrictions

Unter Linux
benutzt man am
besten remmina



Die folgenden Sachen müssen in remmina eingestellt werden

Einstellungen für entfernte Arbeitsflächen

Profil

Bezeichnung: itp with ssh tunnel

Gruppe: []

Protokoll: RDP - Remote Desktop Protokoll

Befehl vorher: command %h %u %t %U %p %g --option

Befehl nachher: /path/to/command -opt1 arg %h %u %t -opt2 %U %p %g

Grundlegend Erweitert SSH Tunnel

Server: zeta.itp.uni-frankfurt.de

Benutzername: []

Benutzerpasswort: []

Domain: []

Bildschirmauflösung: Auflösung des Klienten verwenden
 Benutzerdefiniert 640x480

Farbtiefe: Hohe Farbtiefe (15 bpp)

Ordner freigeben: (keine)

Automatische Verbindungswiederherstellung abschalten

Abbrechen Als Vorgabe speichern Speichern Verbinden Speichern und verbinden

Die folgenden Sachen müssen in remmina eingestellt werden

Einstellungen für entfernte Arbeitsflächen

Profil

Bezeichnung: itp with ssh tunnel

Gruppe:

Protokoll: RDP - Remote Desktop Protokoll

Befehl vorher: command %h %u %t %U %p %g --option

Befehl nachher: /path/to/command -opt1 arg %h %u %t -opt2 %U %p %g

Grundlegend | Erweitert | **SSH Tunnel**

Qualität: Niedrig (schnell)

Klang: Aus

Sicherheit: Verhandeln

RD-Zugangs-Server:

RD-Zugangsbenutzername:

RD-Zugangspasswort:

RD-Zugangsdomäne:

Klientname:

Startprogramm:

Startpfad:

Abbrechen | Als Vorgabe speichern | Speichern | Verbinden | Speichern und verbinden

Die folgenden Sachen müssen in remmina eingestellt werden

Hier bitte Ihren Login-Account eintragen

The screenshot shows the 'Einstellungen für angelegte Arbeitsflächen' (Settings for created workspaces) window in Remmina. The 'SSH Tunnel' tab is active, showing options to activate the SSH tunnel and select the authentication method. The 'Benutzername' (Username) field is filled with 'vartc2020-25'. The 'SSH-Agent (automatisch)' option is selected. The 'Abbrechen' (Cancel) button is highlighted.

Profil

Bezeichnung: itp with ssh tunnel

Gruppe: [Empty]

Protokoll: RDP - Remote Desktop Protokoll

Befehl vorher: command %h %u %t %U %p %g --option

Befehl nachher: /path/to/command -opt1 arg %h %u %t -opt2 %U %p %g

SSH Tunnel

SSH-Tunnel aktivieren Tunnel über Loopback-Adresse

Selber Server an Port 22

Benutzerdefiniert

Zeichensatz: [Empty]

SSH-Legitimierung

Benutzername: vartc2020-25

SSH-Agent (automatisch)

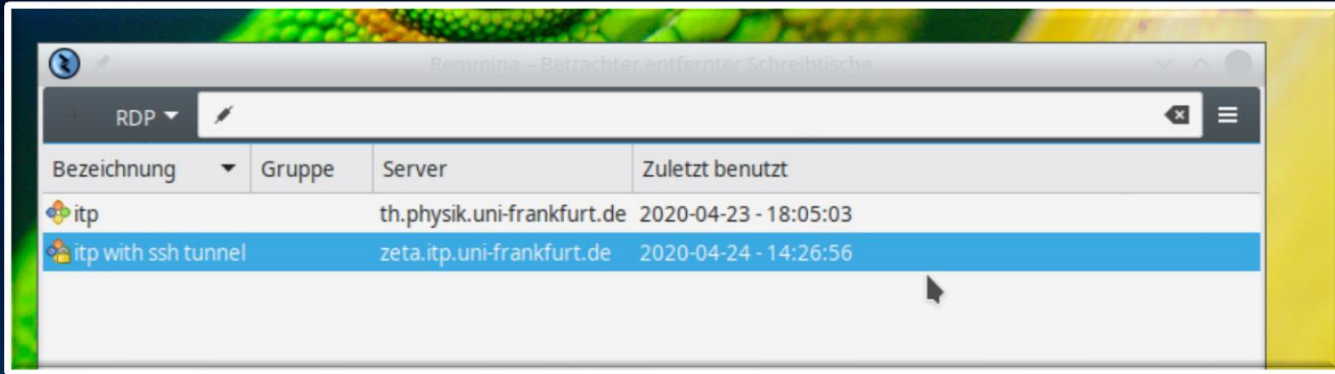
Passwort

Öffentlicher Schlüssel (automatisch)

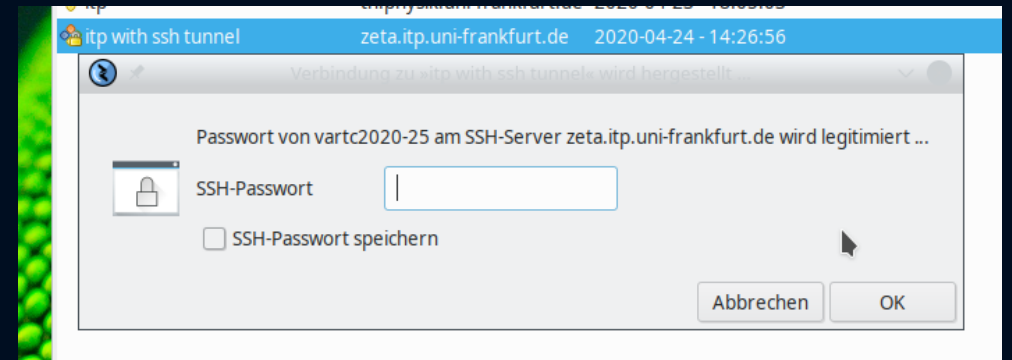
Identitätsdatei: (keine)

Buttons: Abbrechen, Als Vorgabe speichern, Speichern, Verbinden, Speichern und verbinden

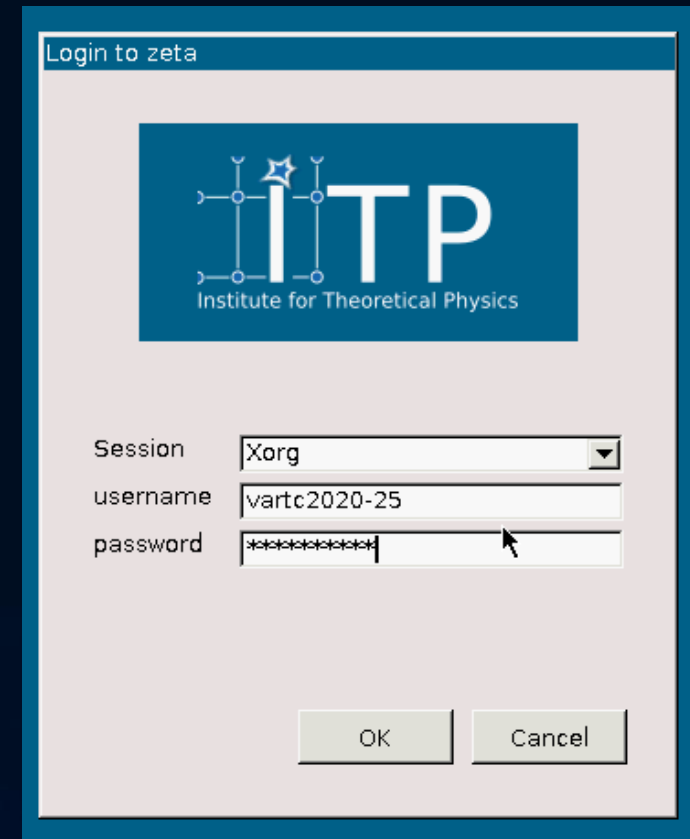
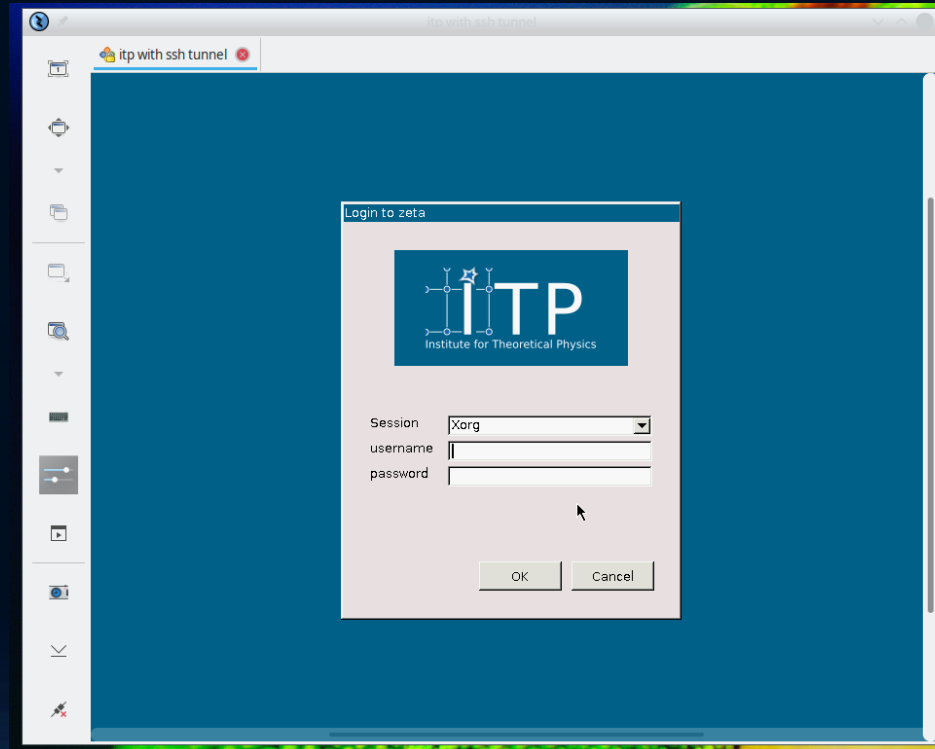
Doppelklick



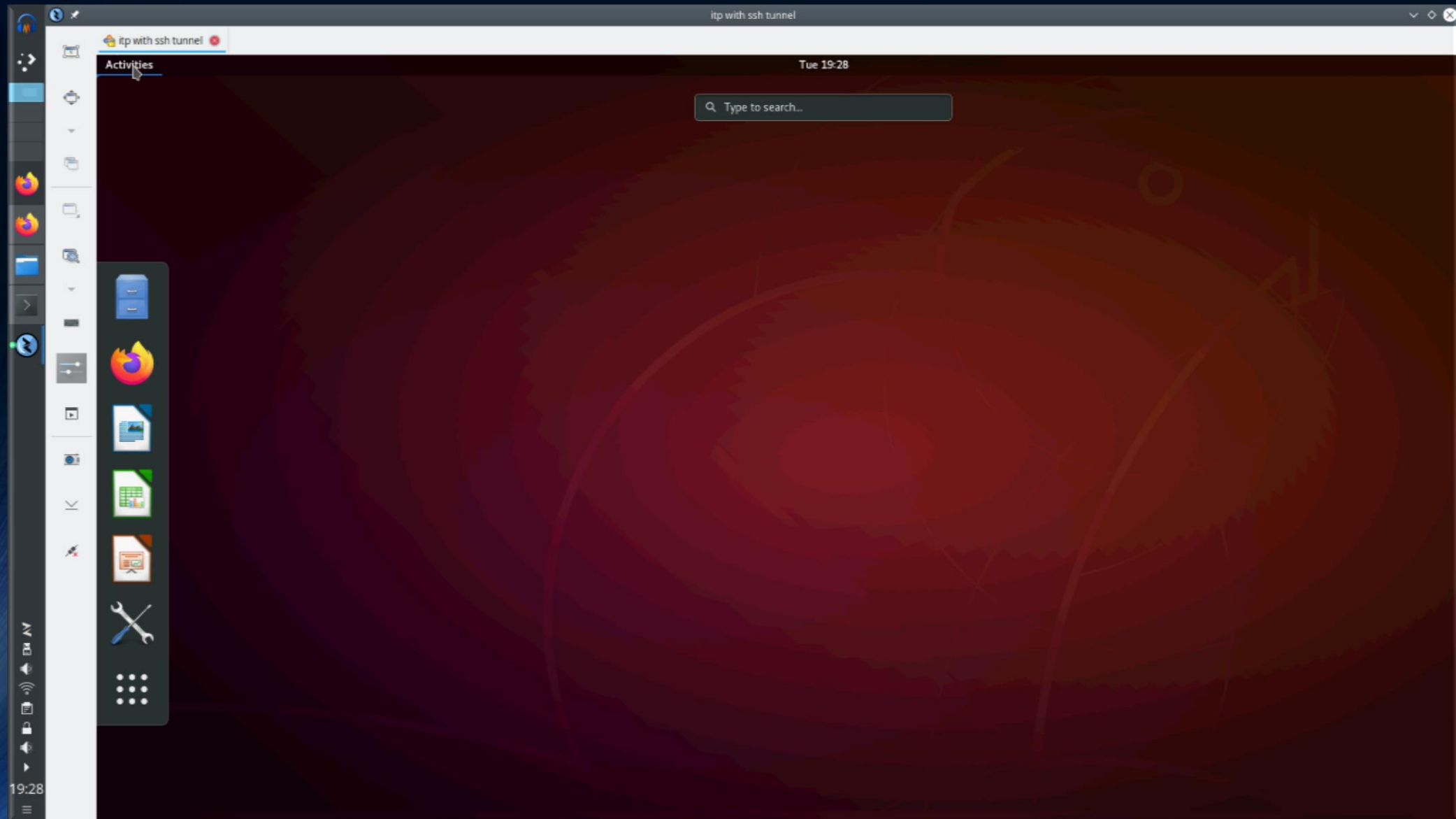
Passwort eingeben



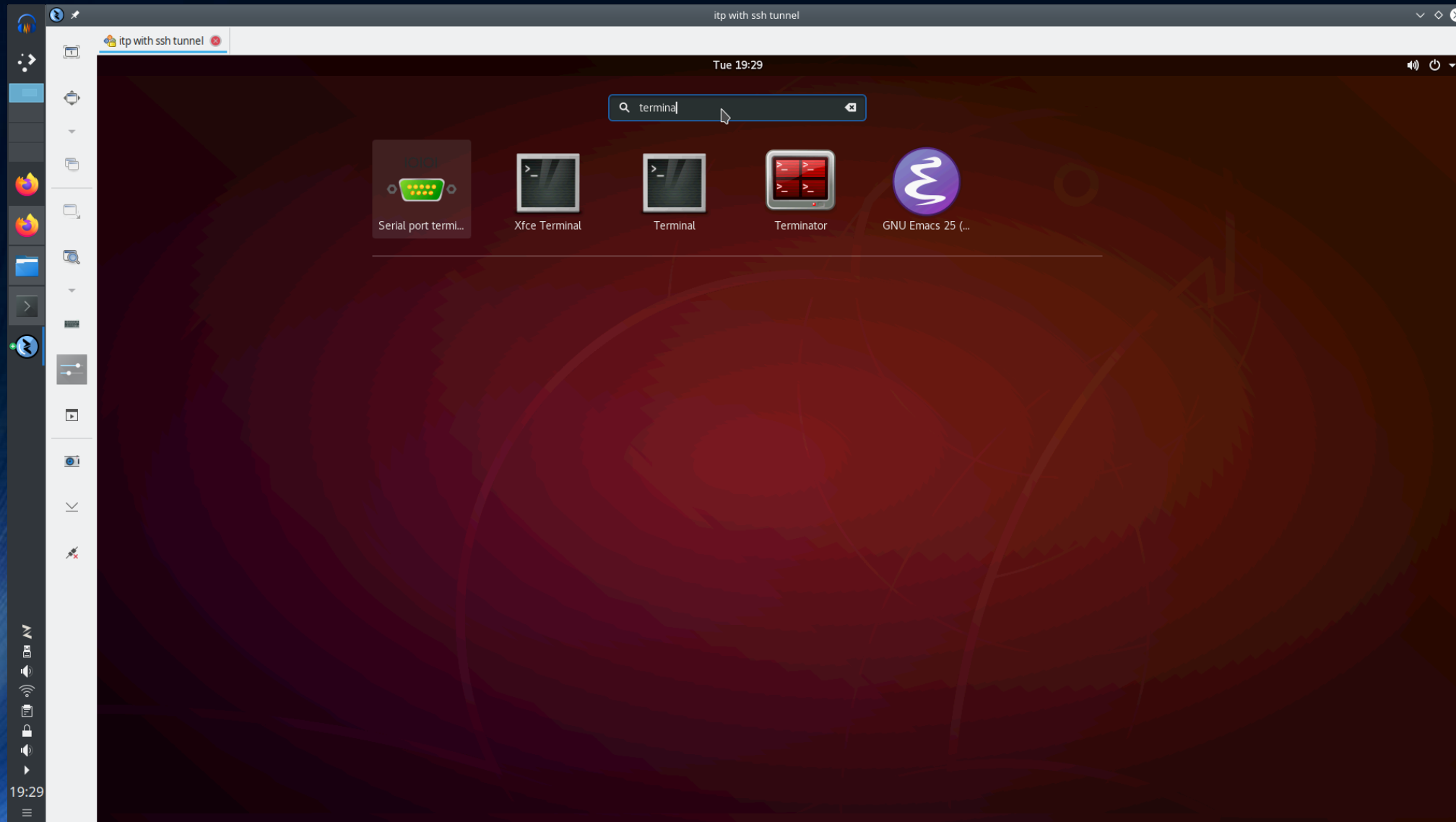
Dann nochmals den
Account Namen
und das
Passwort eingeben



Geschafft!
Sie sind auf dem Server des ITP !



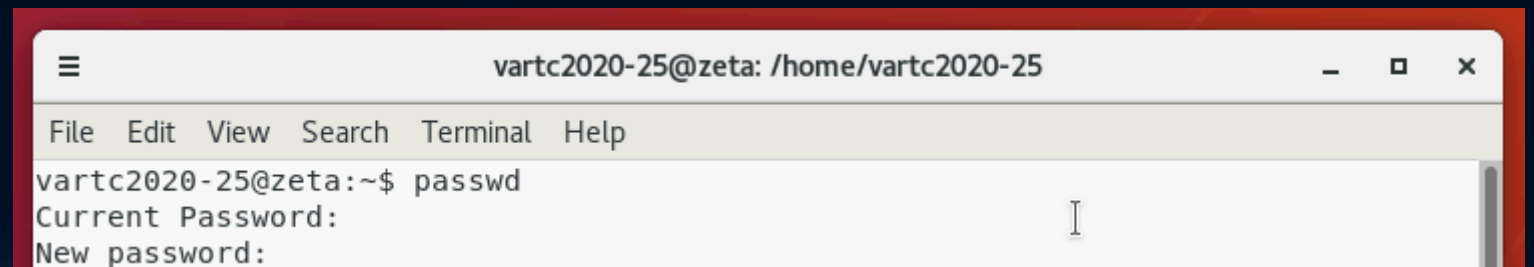
Öffnen Sie ein Linux Terminal



Und ändern Sie zunächst bitte Ihr Passwort

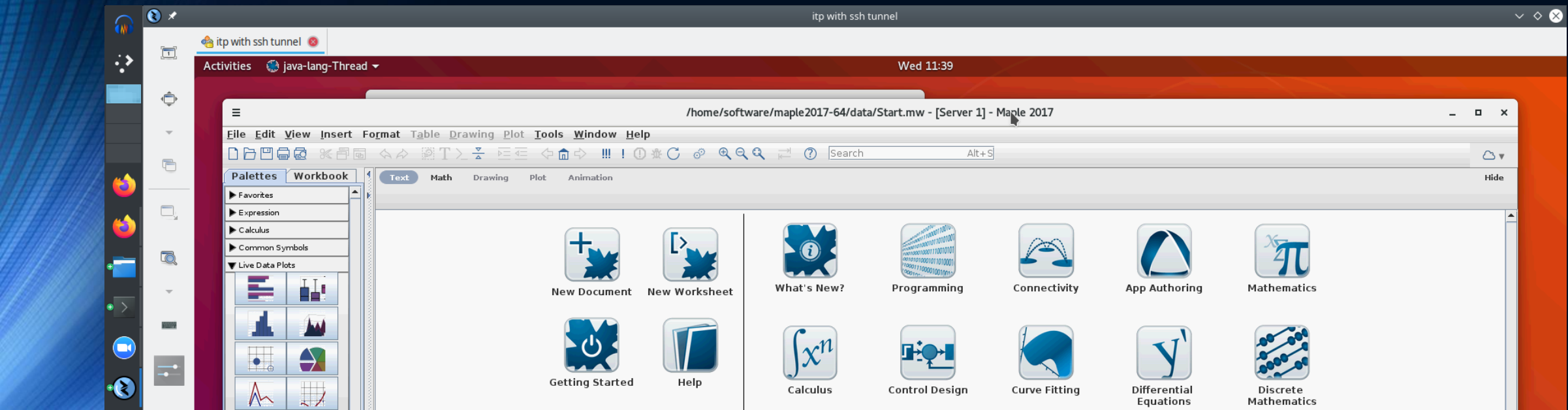
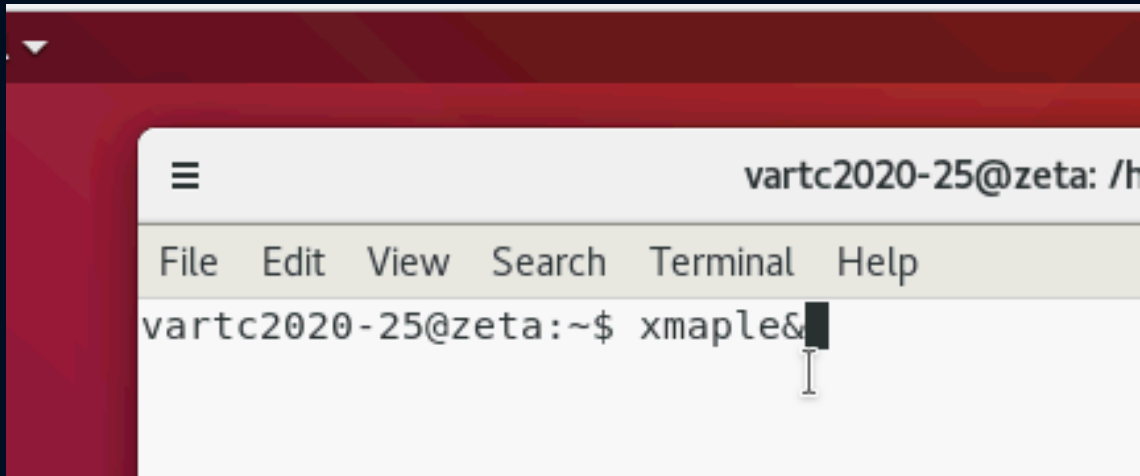
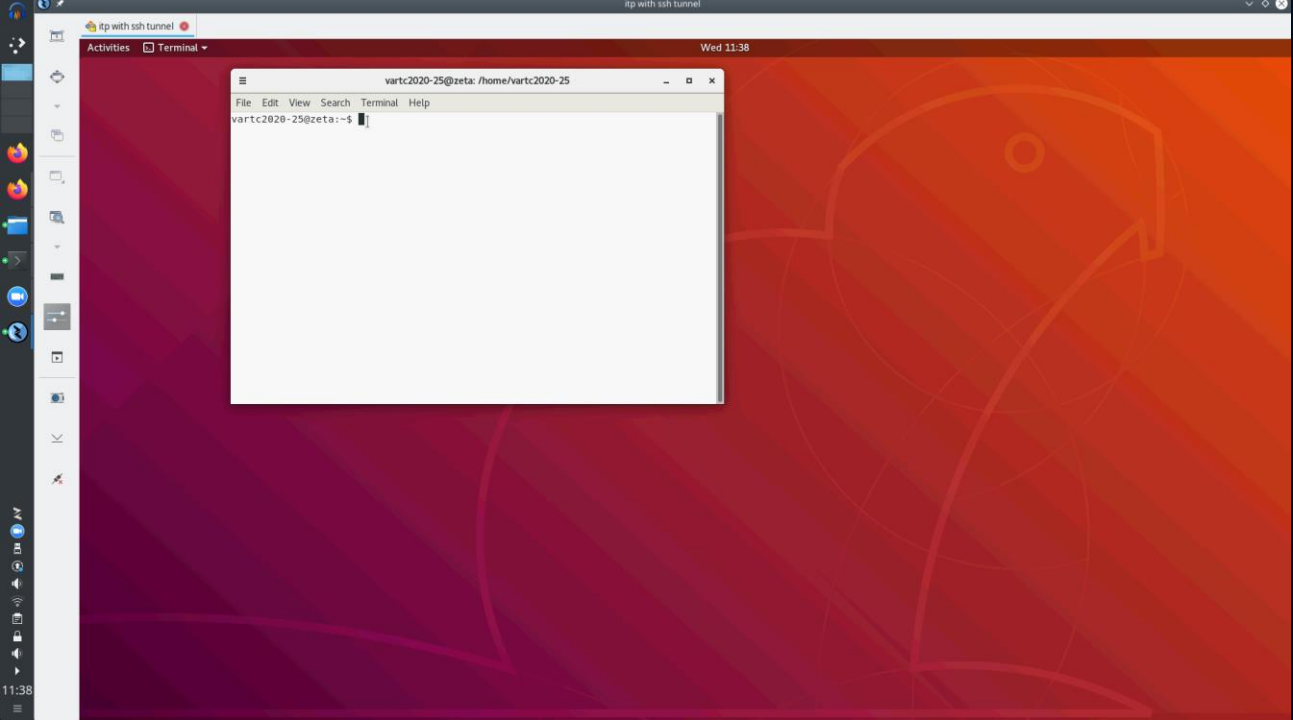


```
vartc2020-25@zeta: /home/vartc2020-25  
File Edit View Search Terminal Help  
vartc2020-25@zeta:~$ passwd
```



```
vartc2020-25@zeta: /home/vartc2020-25  
File Edit View Search Terminal Help  
vartc2020-25@zeta:~$ passwd  
Current Password:  
New password:
```

Und starten
im Terminal Maple
(xmaple)



Führen Sie die folgenden weiteren Schritte aus

The image displays a sequence of three screenshots from a Linux desktop environment, showing the Maple 2017 software interface. The desktop background is a blue and white abstract pattern. The screenshots are arranged in a slightly overlapping manner, showing the progression of steps to be taken.

First Screenshot (Left): Shows the Maple 2017 interface with the 'Tools' menu open. The 'Options' option is highlighted. Below the menu, there are icons for 'Getting Started' and 'Help'. A text box titled 'Start' is overlaid on the interface, containing the following text:

Start

Use the icons on this page to create a new document or worksheet, view help pages, or find sample worksheets to help you get started with your own projects.

[Learn how to create your own start page.](#)

Second Screenshot (Middle): Shows the 'Options' dialog box open. The 'General' tab is selected. The dialog box contains various settings, including:

- Input display: Maple Notation
- Output display: 2-D Math Notation
- Typesetting level: Extended
- Assumed variables: Trailing Tildes
- Plot anti-aliasing: Enabled
- Font anti-aliasing: Default
- Plot display: Inline
- Default Point Probe mode: None
- Show task variables on insert: Only On Naming Conflict
- Task content to insert: Standard Content

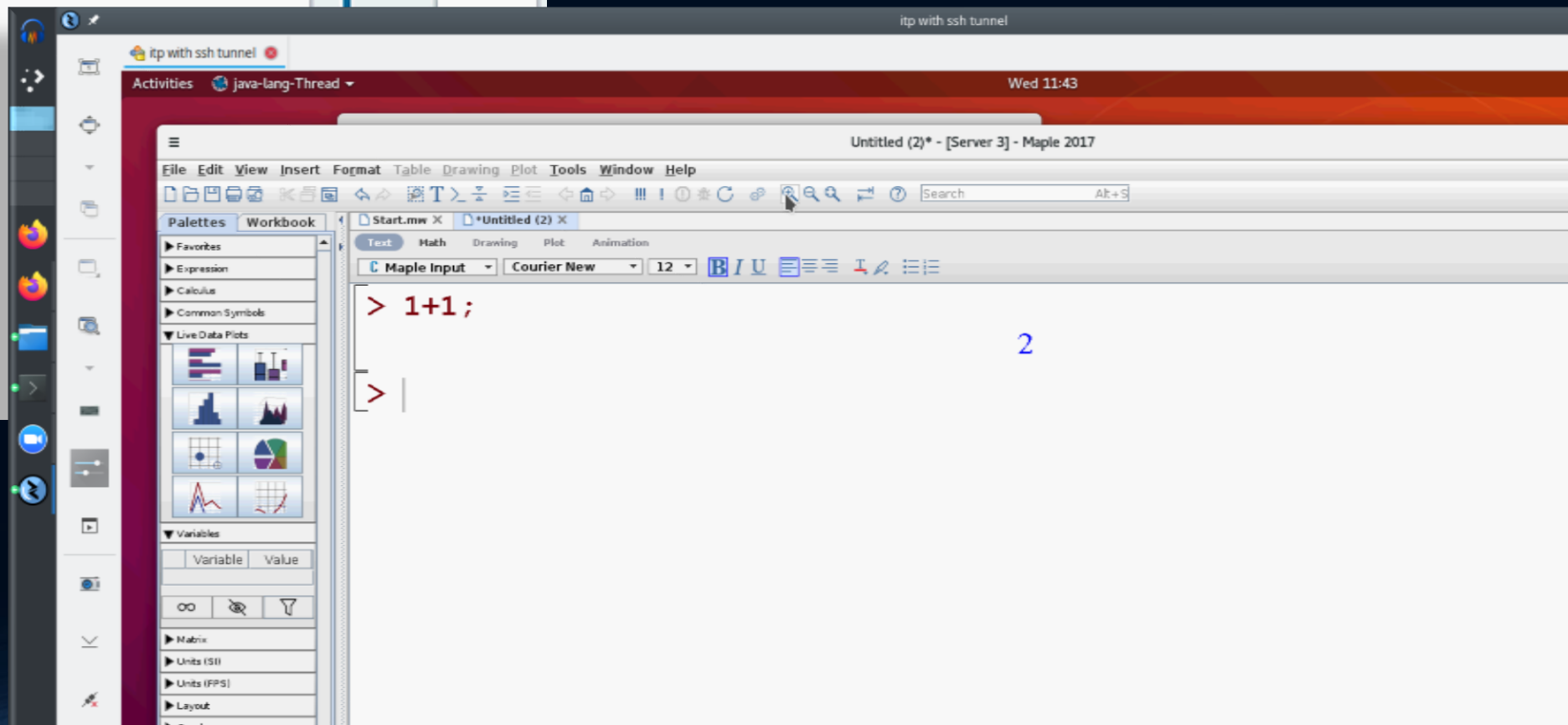
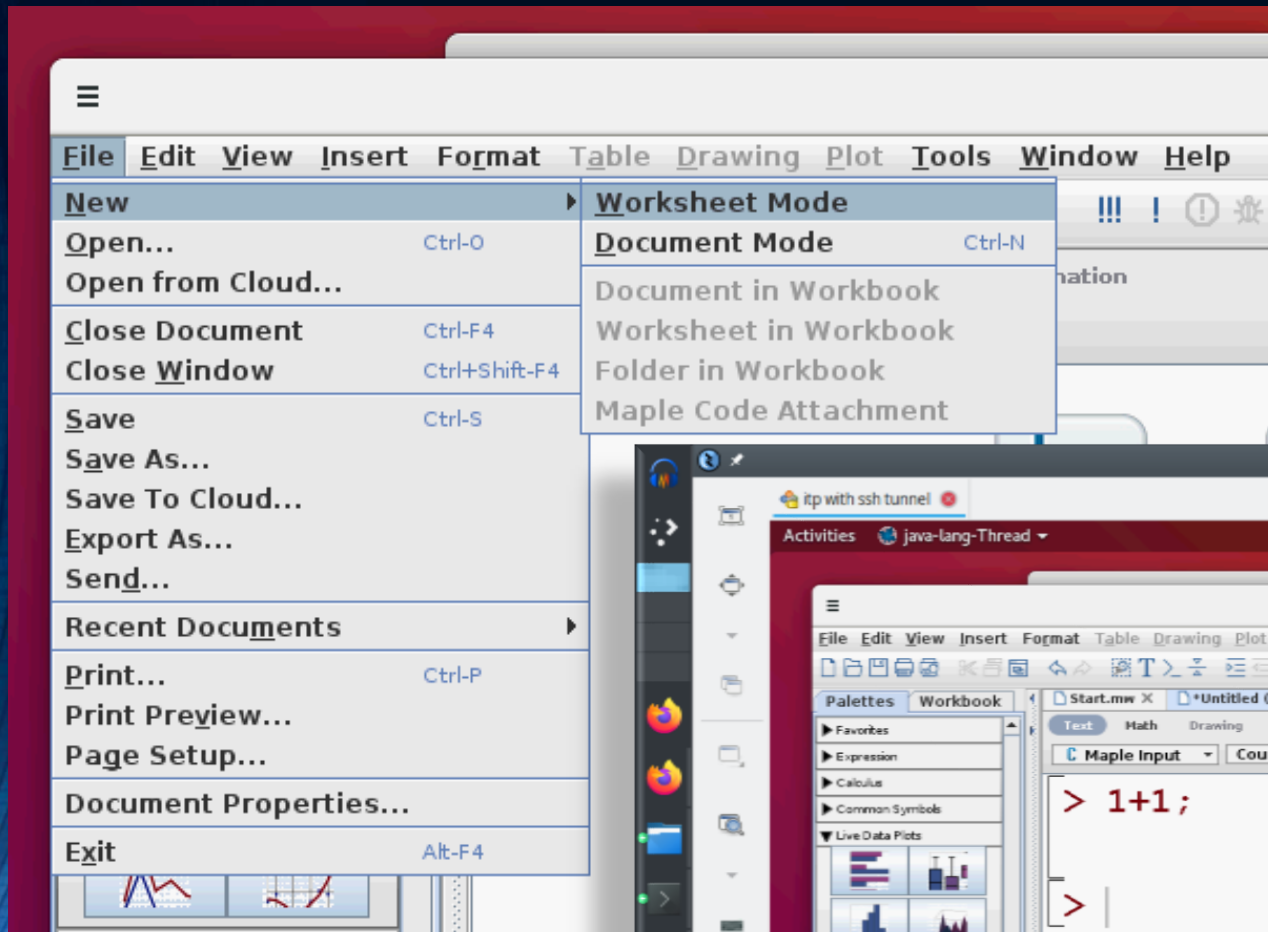
There are also several checkboxes for advanced options, such as 'Enable rollover highlighting in plots', 'Use hardware acceleration for plots', 'Always insert new execution group after executing', 'Show equation labels', 'Enable self-documenting context menu evaluations', and 'Expose commands inserted from Load/Unload Package menus'. The 'Apply to Session' and 'Apply Globally' buttons are visible at the bottom of the dialog box.

Third Screenshot (Right): Shows the 'Options' dialog box with the 'Display' tab selected. The dialog box contains various settings, including:

- Input display: Maple Notation
- Output display: 2-D Math Notation
- Typesetting level: Extended
- Assumed variables: Trailing Tildes
- Plot anti-aliasing: Enabled
- Font anti-aliasing: Default
- Plot display: Inline
- Default Point Probe mode: None
- Show task variables on insert: Only On Naming Conflict
- Task content to insert: Standard Content

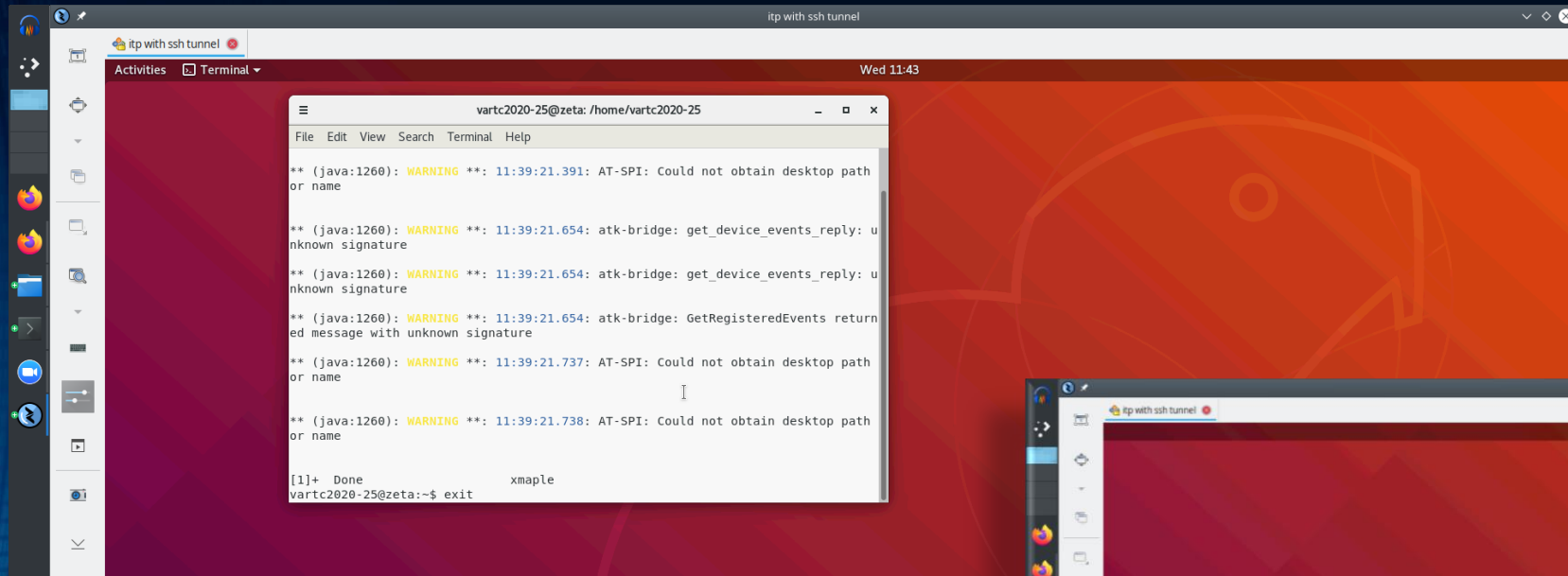
There are also several checkboxes for advanced options, such as 'Enable rollover highlighting in plots', 'Use hardware acceleration for plots', 'Always insert new execution group after executing', 'Show equation labels', 'Enable self-documenting context menu evaluations', and 'Expose commands inserted from Load/Unload Package menus'. The 'Apply to Session' and 'Apply Globally' buttons are visible at the bottom of the dialog box.

Öffnen Sie ein neues Maple Worksheet und ...



Beenden Sie Maple und das Terminal (exit)

... und loggen sich dann wieder vom ITP Server aus



```
vartc2020-25@zeta: /home/vartc2020-25
File Edit View Search Terminal Help

** (java:1260): WARNING **: 11:39:21.391: AT-SPI: Could not obtain desktop path or name

** (java:1260): WARNING **: 11:39:21.654: atk-bridge: get_device_events_reply: unknown signature

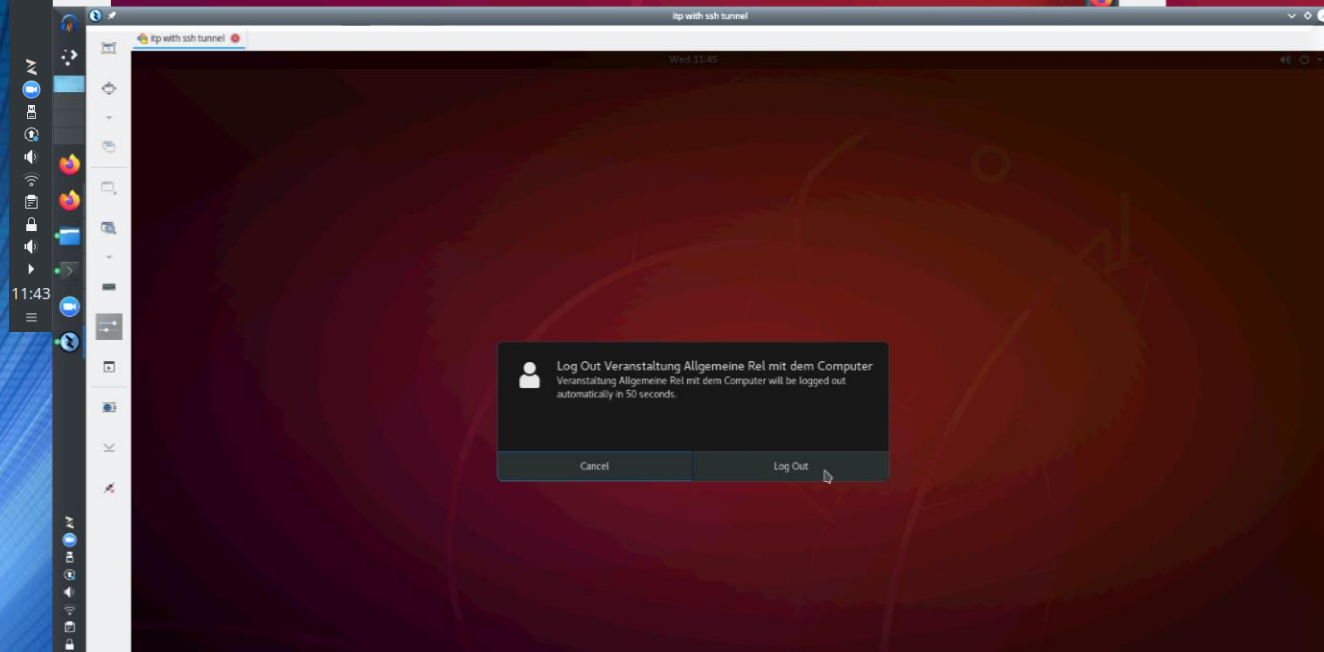
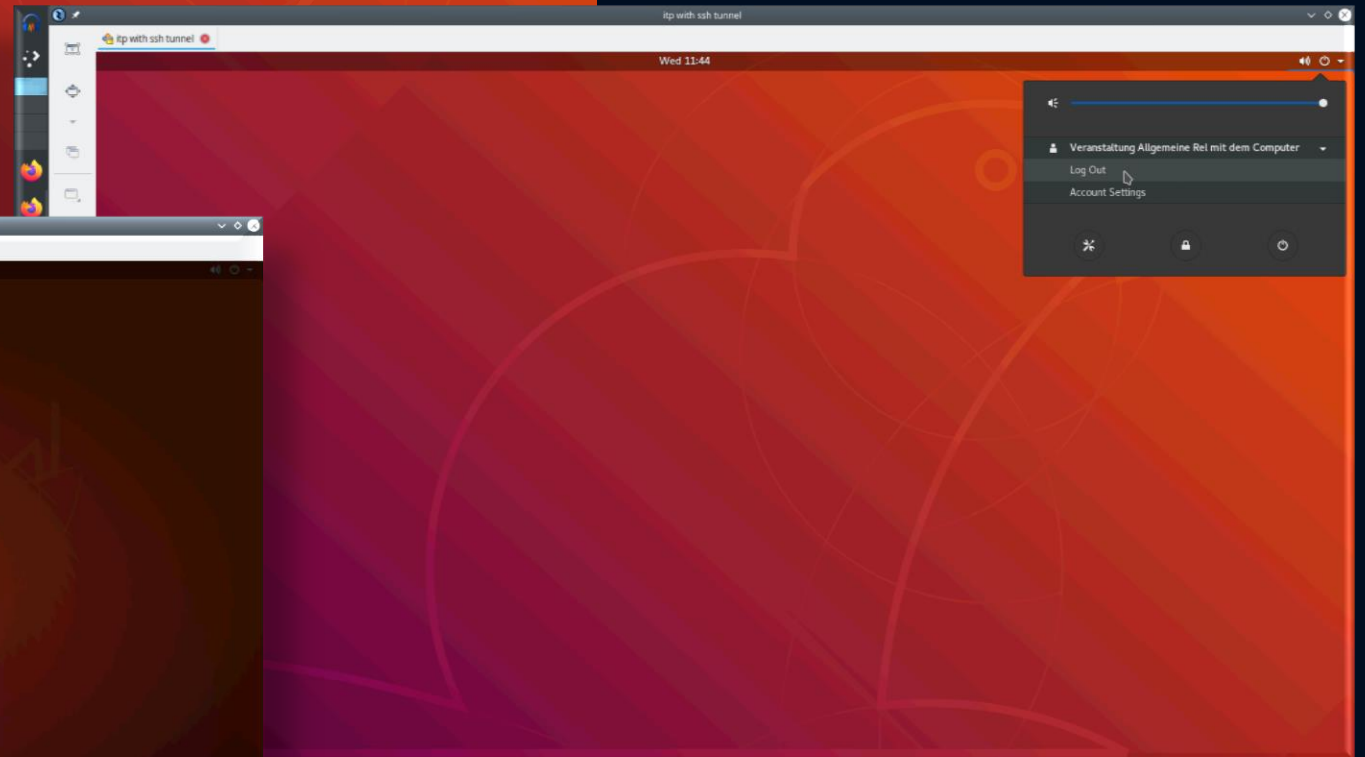
** (java:1260): WARNING **: 11:39:21.654: atk-bridge: get_device_events_reply: unknown signature

** (java:1260): WARNING **: 11:39:21.654: atk-bridge: GetRegisteredEvents returned message with unknown signature

** (java:1260): WARNING **: 11:39:21.737: AT-SPI: Could not obtain desktop path or name

** (java:1260): WARNING **: 11:39:21.738: AT-SPI: Could not obtain desktop path or name

[1]+  Done                  xmaple
vartc2020-25@zeta:~$ exit
```



Grundlagen von Berechnungen der Allgemeinen Relativitätstheorie in Maple

Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. [Matthias Hanauske](#)

[Home](#) [Research](#) [Contact](#)

[Einführung](#)

[Teil I: Analytische Berechnungen
und numerische Simulationen in
Maple](#)

[Teil II: Paralleles Programmieren mit
C++ und OpenMP/MPI](#)

[Teil III: Computersimulationen mit
dem Einstein-Tool](#)

[Aufgaben](#)

[Download Maple Worksheed](#)

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

General Theory of Relativity on the Computer

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main (Sommersemester 2016)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 11.04.2016

interaktiven Vorlesung liegt sowohl auf der Allgemeine Relativitätstheorie als auch auf der Vermittlung spezieller Programmierkenntnisse.

Grundlegende Größen der Allgemeinen Relativitätstheorie

Im folgenden werden die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie und im besonderen die Einsteingleichung

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi T_{\mu\nu}$$

und die Geodatengleichung

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0$$

als bekannt vorausgesetzt. Die griechischen, raumzeitlichen Indices μ, ν, ρ, \dots laufen von 0..3, wobei, falls nicht anders angegeben, diese den folgenden kartesischen Raumzeitkoordinaten entsprechen: $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$.

Im folgenden werden einige grundlegende Größen der allgemeinen Relativitätstheorie am Beispiel der allgemeinen statischen, isotropen Metrik erläutert und aufgezeigt, wie man diese in Maple berechnet. Zunächst wird das "tensor"-Paket eingebunden. Die mit roter Schrift gekennzeichneten Wörter stellen die vom User eingegebenen Befehle dar und die blauen Wörter sind die vom Maple-Program ausgegebenen Größen. Hier werden im speziellen die im "tensor"-Paket neu definierten Befehle ausgegeben. Möchte man die eingegebenen Befehle zwar ausführen, aber nicht ausgeben lassen, so hat man am Ende des Befehls einen Doppelpunkt und kein Semikolon zu schreiben.

```
> restart:
with( tensor );
```

*frame, geodesic_eqns, get_char, get_compts, get_rank, init, invars, invert, lin_com, lower,
npscurve, npspin, partial_diff, permute_indices, petrov, prod, raise, symmetrize,
tensorsGR, transform]*

Die Definition eines Tensors in Maple erfolgt über den Befehl "create". Wir definieren nun die kovarianten Metrik einer allgemeinen statischen, isotropen Raumzeit $g_{\mu\nu}$, wobei wir ein sphärisches Koordinatensystem benutzen:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{wobei: } x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$$

```
> coord := [t, r, theta, phi]:
g_compts := array(symmetric, sparse, 1..4, 1..4):
g_compts[1,1] := A(r): g_compts[2,2] := -B(r):
g_compts[3,3] := -r^2: g_compts[4,4] := -r^2*sin(theta)^2:
g := create( [-1,-1], eval(g_compts));
```

$$g := \text{table} \left(\text{index_char} = [-1, -1], \text{compts} = \begin{pmatrix} A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin(\theta)^2 \end{pmatrix} \right) \quad (2.2)$$

Berechnung der kontravarianten Metrik $g^{\mu\nu}$:

```
> ginv := invert( g, 'detg' );
```

$$ginv := \text{table} \left(\text{index_char} = [1, 1], \text{compts} = \begin{pmatrix} \frac{1}{A(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{B(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \sin(\theta)^2} \end{pmatrix} \right) \quad (2.3)$$

Berechnung der ersten partiellen Ableitung der Metrik $g_{\mu\nu|\rho} := \partial_\rho g_{\mu\nu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}$. Die ausgegebenen Größen entsprechen den einzelnen Komponenten des entstehenden kovarianten Tensors dritter Stufe. Beachten Sie hierbei, dass die in Maple definierten Indices nicht von 0..3, sondern von 1..4 laufen.

```
> D1g := d1metric ( g, coord );
```

$$D1g := \text{table} \left(\left[\text{index_char} = [-1, -1, -1], \text{compts} = \text{ARRAY} \left(\text{cf1}, [1..4, 1..4, 1..4], \left[\begin{array}{l} (1, 1, 1) \\ = 0, (1, 1, 2) = \frac{d}{dr} A(r), (1, 1, 3) = 0, (1, 1, 4) = 0, (1, 2, 1) = 0, (1, 2, 2) = 0, (1, 2, 3) \\ = 0, (1, 2, 4) = 0, (1, 3, 1) = 0, (1, 3, 2) = 0, (1, 3, 3) = 0, (1, 3, 4) = 0, (1, 4, 1) = 0, (1, \end{array} \right] \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= 0, (3, 2, 4) = 0, (3, 3, 1) = 0, (3, 3, 2) = -2r, (3, 3, 3) = 0, (3, 3, 4) = 0, (3, 4, 1) = 0, \\
 &(3, 4, 2) = 0, (3, 4, 3) = 0, (3, 4, 4) = 0, (4, 1, 1) = 0, (4, 1, 2) = 0, (4, 1, 3) = 0, (4, 1, 4) \\
 &= 0, (4, 2, 1) = 0, (4, 2, 2) = 0, (4, 2, 3) = 0, (4, 2, 4) = 0, (4, 3, 1) = 0, (4, 3, 2) = 0, (4, \\
 &3, 3) = 0, (4, 3, 4) = 0, (4, 4, 1) = 0, (4, 4, 2) = -2r \sin(\theta)^2, (4, 4, 3) = \\
 &-2r^2 \sin(\theta) \cos(\theta), (4, 4, 4) = 0]]))
 \end{aligned}$$

Berechnung der Christoffel Symbole erster Art $\Gamma_{\mu\nu\rho}$ (kontravariante Form):

$$\Gamma_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu} \right) = \frac{1}{2} \left(g_{\nu\rho|\mu} + g_{\mu\rho|\nu} - g_{\mu\nu|\rho} \right)$$

Beispiel Γ_{100} :

$$\Gamma_{100} = \frac{1}{2} \left(g_{00|1} + g_{10|0} - g_{10|0} \right) = \frac{1}{2} g_{00|1} = \frac{1}{2} \frac{dA(r)}{dr}$$

In Maple entspricht dies der unten angegebenen Komponente $(2, 1, 1) = \frac{1}{2} \frac{dA(r)}{dr}$.

> Cf1 := Christoffel1 (Dlg);

$$\begin{aligned}
 &Cf1 := \text{table} \left(\left[\text{index_char} = [-1, -1, -1], \text{compts} = \text{ARRAY} \left(\text{cf1}, [1..4, 1..4, 1..4], \left[(1, 1, 1) \right. \right. \right. \right. \\
 &= 0, (1, 1, 2) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dr} A(r), (1, 1, 3) = 0, (1, 1, 4) = 0, (1, 2, 1) = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} A(r), (1, 2, 2) \\
 &= 0, (1, 2, 3) = 0, (1, 2, 4) = 0, (1, 3, 1) = 0, (1, 3, 2) = 0, (1, 3, 3) = 0, (1, 3, 4) = 0, (1, \\
 &4, 1) = 0, (1, 4, 2) = 0, (1, 4, 3) = 0, (1, 4, 4) = 0, (2, 1, 1) = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} A(r), (2, 1, 2) = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (3, 3, 3) = 0, (3, 3, 4) = 0, (3, 4, 1) = 0, (3, 4, 2) = 0, (3, 4, 3) = 0, (3, 4, 4) = \\
 & -r^2 \sin(\theta) \cos(\theta), (4, 1, 1) = 0, (4, 1, 2) = 0, (4, 1, 3) = 0, (4, 1, 4) = 0, (4, 2, 1) = 0, \\
 & (4, 2, 2) = 0, (4, 2, 3) = 0, (4, 2, 4) = -r \sin(\theta)^2, (4, 3, 1) = 0, (4, 3, 2) = 0, (4, 3, 3) \\
 & = 0, (4, 3, 4) = -r^2 \sin(\theta) \cos(\theta), (4, 4, 1) = 0, (4, 4, 2) = r \sin(\theta)^2, (4, 4, 3) \\
 & = r^2 \sin(\theta) \cos(\theta), (4, 4, 4) = 0]]
 \end{aligned}$$

Berechnung der Christoffel Symbole zweiter Art $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ (erster Index kontravariant, zweiter und dritter kovariant):

$$\Gamma_{\nu\rho}^\mu = g^{\mu\delta} \Gamma_{\nu\rho\delta} = \frac{1}{2} g^{\mu\delta} (g_{\delta\nu|\rho} + g_{\delta\rho|\nu} - g_{\nu\rho|\delta})$$

Beispiel Γ_{00}^1 :

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} g^{1\delta} (g_{\delta 0|0} + g_{\delta 0|0} - g_{00|\delta}) \quad \rightarrow \text{man verwendet: } g^{1\delta} = g^{11} = -\frac{1}{B(r)} \\
 &= \frac{1}{2} g^{11} (2g_{10|0} - g_{00|1}) = -\frac{1}{2B(r)} (2g_{10|0} - g_{00|1}) \quad \rightarrow \text{man verwendet: } g_{10} \equiv 0 \\
 &= \frac{1}{2B(r)} g_{00|1} = \frac{1}{2B(r)} \frac{dA(r)}{dr}
 \end{aligned}$$

In Maple entspricht dies der unten angegebenen Komponente $(2, 1, 1) = \frac{1}{2} \frac{dA(r)}{B(r)}$.

```
> Cf2:= Christoffel2( ginv, Cf1 );
```

```
Cf2:= table( index_char = [1, -1, -1], compts = ARRAY [cf2, [1..4, 1..4, 1..4], (1, 1, 1)
```


$$= \frac{r^2 (\cos(\theta)^2 B(r) - B(r) + 1 - \cos(\theta)^2)}{B(r)}, (4, 3, 4, 4) = 0, (4, 4, 1, 1) = 0, (4, 4, 1, 2) = 0, (4, 4, 1, 3) = 0, (4, 4, 1, 4) = 0, (4, 4, 2, 1) = 0, (4, 4, 2, 2) = 0, (4, 4, 2, 3) = 0, (4, 4, 2, 4) = 0, (4, 4, 3, 1) = 0, (4, 4, 3, 2) = 0, (4, 4, 3, 3) = 0, (4, 4, 3, 4) = 0, (4, 4, 4, 1) = 0, (4, 4, 4, 2) = 0, (4, 4, 4, 3) = 0, (4, 4, 4, 4) = 0]]]$$

Berechnung des Ricci Tensors $R_{\mu\nu} := g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu}$:

> RICCI := Ricci(ginv, RMN);

$$\begin{aligned} \text{RICCI} := & \text{table}\left(\left[\text{index_char} = [-1, -1], \text{compts} = \left[\left[\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \frac{1}{B(r)^2 A(r) r} \left(2 r \left(\frac{d^2}{dr^2} A(r) \right) A(r) B(r) - r \left(\frac{d}{dr} A(r) \right)^2 B(r) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - r \left(\frac{d}{dr} A(r) \right) \left(\frac{d}{dr} B(r) \right) A(r) + 4 \left(\frac{d}{dr} A(r) \right) B(r) A(r) \right], 0, 0, 0 \right] \right. \right. \\ & \left. \left[0, -\frac{1}{4} \frac{1}{A(r)^2 B(r) r} \left(-2 r \left(\frac{d^2}{dr^2} A(r) \right) A(r) B(r) + r \left(\frac{d}{dr} A(r) \right)^2 B(r) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + r \left(\frac{d}{dr} A(r) \right) \left(\frac{d}{dr} B(r) \right) A(r) + 4 \left(\frac{d}{dr} B(r) \right) A(r)^2 \right], 0, 0 \right] \right. \right. \\ & \left. \left[0, 0, -\frac{1}{2} \frac{\left(\frac{d}{dr} B(r) \right) r A(r) + 2 B(r)^2 A(r) - \left(\frac{d}{dr} A(r) \right) r B(r) - 2 A(r) B(r)}{B(r)^2 A(r)}, 0 \right] \right. \\ & \left. \left[0, 0, 0, \frac{1}{2} \frac{1}{A(r) B(r)^2} \left(\left(\frac{d}{dr} A(r) \right) r B(r) - \left(\frac{d}{dr} A(r) \right) r B(r) \cos(\theta)^2 \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{d}{dr} B(r) \right) r A(r) + \left(\frac{d}{dr} B(r) \right) r A(r) \cos(\theta)^2 + 2 A(r) B(r)^2 \cos(\theta)^2 - 2 B(r)^2 A(r) \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 A(r) B(r) - 2 A(r) B(r) \cos(\theta)^2 \right) \right] \right] \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

Berechnung des Ricci Skalars $R := g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$:

> RS := Ricciscalar(ginv, RICCI);

$$\begin{aligned}
 RS := \text{table} \left(\left[\text{index_char} = [], \text{compts} = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 B(r)^2 A(r)^2} \left(-2 r^2 \left(\frac{d^2}{dr^2} A(r) \right) A(r) B(r) \right. \right. \right. \\
 \left. \left. + r^2 \left(\frac{d}{dr} A(r) \right)^2 B(r) + r^2 \left(\frac{d}{dr} A(r) \right) \left(\frac{d}{dr} B(r) \right) A(r) - 4 A(r) \left(\frac{d}{dr} A(r) \right) r B(r) \right. \right. \\
 \left. \left. + 4 \left(\frac{d}{dr} B(r) \right) r A(r)^2 + 4 B(r)^2 A(r)^2 - 4 A(r)^2 B(r) \right) \right] \right)
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Berechnung des Einstein Tensors $G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$:

> Estn := Einstein(g, RICCI, RS);

$$\begin{aligned}
 Estn := \text{table} \left(\left[\text{index_char} = [-1, -1], \text{compts} = \left[\left[-\frac{A(r) \left(\left(\frac{d}{dr} B(r) \right) r + B(r)^2 - B(r) \right)}{r^2 B(r)^2}, 0, \right. \right. \right. \\
 \left. \left. \left. 0, 0, \right. \right. \right. \\
 \left. \left. \left[0, \frac{-\left(\frac{d}{dr} A(r) \right) r + A(r) B(r) - A(r)}{A(r) r^2}, 0, 0, \right. \right. \right. \\
 \left. \left. \left. \left[0, 0, \frac{1}{4} \frac{1}{B(r)^2 A(r)^2} \left(r \left(2 \left(\frac{d}{dr} B(r) \right) A(r)^2 - 2 \left(\frac{d}{dr} A(r) \right) B(r) A(r) \right) \right) \right. \right. \right. \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} &0, 0, \\ &\left[0, \frac{-\left(\frac{d}{dr} A(r)\right) r + A(r) B(r) - A(r)}{A(r) r^2}, 0, 0 \right], \\ &\left[0, 0, \frac{1}{4} \frac{1}{B(r)^2 A(r)^2} \left(r \left(2 \left(\frac{d}{dr} B(r) \right) A(r)^2 - 2 \left(\frac{d}{dr} A(r) \right) B(r) A(r) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - 2 r \left(\frac{d^2}{dr^2} A(r) \right) A(r) B(r) + r \left(\frac{d}{dr} A(r) \right)^2 B(r) + r \left(\frac{d}{dr} A(r) \right) \left(\frac{d}{dr} B(r) \right) A(r) \right) \right), \right. \\ &0 \left. \right] \end{aligned} \right\} \tag{2.11}$$

$$\left. \begin{aligned} &\left[0, 0, 0, -\frac{1}{4} \frac{1}{B(r)^2 A(r)^2} \left(r \left(2 \left(\frac{d}{dr} A(r) \right) B(r) A(r) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - 2 A(r) \left(\frac{d}{dr} A(r) \right) B(r) \cos(\theta)^2 - 2 \left(\frac{d}{dr} B(r) \right) A(r)^2 + 2 \left(\frac{d}{dr} B(r) \right) A(r)^2 \cos(\theta)^2 \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + 2 r \left(\frac{d^2}{dr^2} A(r) \right) A(r) B(r) - 2 r \left(\frac{d^2}{dr^2} A(r) \right) A(r) B(r) \cos(\theta)^2 - r \left(\frac{d}{dr} A(r) \right)^2 B(r) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + r \left(\frac{d}{dr} A(r) \right)^2 B(r) \cos(\theta)^2 - r \left(\frac{d}{dr} A(r) \right) \left(\frac{d}{dr} B(r) \right) A(r) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + r \left(\frac{d}{dr} A(r) \right) \left(\frac{d}{dr} B(r) \right) A(r) \cos(\theta)^2 \right) \right) \right] \right\} \end{aligned} \right\}$$

Berechnung des infinitesimalen Weglängelements $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx^\mu dx_\mu$:

```

> dx:=create([1], array([dt,dr,dtheta,dphi]));
ds2:=get_compts(prod(dx,lower(g,dx,1),[1,1]));
ds2:=collect( simplify(ds2), [dt,dr,dtheta,dphi]);

```

$$ds2 := dt^2 A(r) - dr^2 B(r) - dtheta^2 r^2 + (r^2 \cos(\theta)^2 - r^2) dphi^2 \tag{2.12}$$

Definition der kovarianten Raumzeit-Metrik eines schwarzen Lochs der Masse M in Schwarzschildkoordinaten:

```
> coord := [t, r, theta, phi];  
g_compts := array(symmetric,sparse, 1..4, 1..4):  
g_compts[1,1] := 1-2*M/r: g_compts[2,2] := -1/g_compts[1,1]:  
g_compts[3,3] := -r^2: g_compts[4,4] := -r^2*sin(theta)^2:  
g := create( [-1,-1], eval(g_compts));
```

$$g := \text{create} \left(\begin{array}{c} [-1, -1], \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 - \frac{2M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin(\theta)^2 \end{array} \right) \end{array} \right) \quad (4.1.1)$$

Berechnung des infinitesimalen Weglängenelements ds²:

```
> dx:=create([1], array([dt,dr,dtheta,dphi])):  
ds2:=get_compts(prod(dx,lower(g,dx,1)],[1,1])):  
ds2:=collect(simplify(ds2),[dt,dr,dtheta,dphi]):
```

Einloggen

Benutzerkennung:

Passwort:

Domäne:

[Login-Hilfe](#)
[Passwort vergessen?](#)
[Helpdesk kontaktieren](#)
[Kurs-/Community-Übersicht](#)

The LearningOnline Network with CAPA



Lon Capa Übungsaufgaben

[Home](#)
[Research](#)
[Contact](#)

[Programmieren mit OpenMP/MPI](#)
[Teil III: Computersimulationen mit dem Einstein-Toolkit](#)
[Aufgaben](#)




Vorlesung SS 2020

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

(General Theory of Relativity on the Computer)

Die mathematisch anspruchsvollen Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) in den Vorlesungen analysiert. Im ersten Teil des Kurses erlernen die Studierenden die Verwendung von Maple und Mathematica. Die oft komplizierten und zeitaufwendigen Berechnungen der ART können mit Hilfe dieser Programme erleichtert werden. Diverse Anwendungen der Einstein-

Domäne: ufm
Server: ufm11 (library)
Serverlast: 0.0 Prozent
 2.11.2-2017061214

 [Kursübersicht](#)

Besuchen Sie die [Kurs-/Community-Übersicht](#), um alle LON-CAPA-Kurse und -Communities der Institution "Johann Wolfgang Goethe Universität Frankfurt am Main" zu betrachten. Falls ein Kurs in der folgenden Liste Ihrer derzeitigen Kurse **nicht** angezeigt wird, können Sie sich in der Kursübersicht in diesen Kurs selbst eintragen, sofern die Selbsteintragung für diesen Kurs aktiviert ist.

Wählen Sie den gewünschten Kurs aus

	Benutzerrolle	Bereich	Anfang	Ende
<input type="button" value="Auswählen"/>	Student/in	Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer (SS 2020) Kursüberblick	Do., 23. April 2020, 10:53:23 Uhr (CEST)	Mi., 20. Okt. 2021, 10:53:23 Uhr (CEST)

Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. [Matthias Hanauske](#)

[Home](#) [Research](#) [Contact](#)

[Einführung](#)

[Teil I: Analytische Berechnungen und numerische Simulationen in Maple](#)

[Teil II: Paralleles Programmieren mit C++ und OpenMP/MPI](#)

[Teil III: Computersimulationen mit dem Einstein-Toolkit](#)

[Aufgaben](#)

Aufgaben im Kurs allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

Aufgaben im Teil I: Analytische Berechnungen und numerische Simulationen in Maple

[Berechnung von Christoffelsymbolen der Schwarzschild-Metrik](#)

[Berechnung des Riemann Tensors der Schwarzschild-Metrik](#)

[Probekörper fällt radial in ein nichtrotierendes schwarzes Loch](#)

[Geodätische Bewegung eines Probekörpers um ein nichtrotierendes schwarzes Loch](#)

[Radialer Wurf eines Probekörpers in der Nähe eines nichtrotierenden schwarzen Lochs](#)

[Berechnung eines Neutronensterns](#)

[Berechnung eines Weißen Zwergs](#)

Webmail at FIAS | LON-CAPA Christoffelsymbole

https://lon-capa.server.uni-frankfurt.de/res/ufm/hanauske/Versuch1/T1/Aufgaben/T1V1a.problem

Ihr Firefox ist veraltet - dies gefährdet Ihre Sicherheit. Aktualisieren Sie Firefox, um sich zu schützen. [Jetzt aktualisieren](#)

Matthias Hanauske (Kurs-Koordinator) **Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer - General Theory of Relativity on the Computer** (M.Hanauske: VARTC 2018) (Mehr ...)

Hauptmenü | Inhalt | Kurs-Editor | Was gibt's Neues | Bewertungen ▾ | Personen ▾ | Einstellungen ▾ | Öffentlich ▾ | Rolle wechseln ▾

Inhaltsverzeichnis » ... » Aufgaben » **Christoffelsymbole der Schwarzschild-Metrik**

Notizen | Linksammlung | Evaluieren | Feedback | Drucken | Info

Funktionen | Editor | Inhaltsbewertungen | Inhaltseinstellungen | Verzeichnis bearbeiten

Neue Nachrichten | Rollen | Hilfe | Logout

Die folgende Metrik beschreibt die raumzeitliche Struktur eines nichtrotierendes schwarzes Loch (Schwarzschildmetrik in Schwarzschildkoordinaten):

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

Die griechischen, raumzeitlichen Indices μ, ν laufen von 0..3 und entsprechen den folgenden sphärischen Koordinaten:
 $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \phi)$. Berechnen Sie den Wert des Christoffelsymbols Γ^0_{01} , wobei die Masse M des schwarzen Loch und der radiale Abstand r den folgenden Werten entspricht:

M=15 , r=4.6

-0.128380691543992

Korrekt!
Ihre Nachweis-Nr. ist 163-3507

[Bisherige Antworten](#)

Webmail at FIAS | LON-CAPA Riemann Tensor

https://lon-capa.server.uni-frankfurt.de/res/ufm/hanauske/Versuch1/T1/Aufgaben/T1V1b.problem?symb=uploaded%2fufm%2f6W295110537c25a6eufml1%2fdefault_1459765405.sequence__4__ufm% 150% Suchen

Ihr Firefox ist veraltet – dies gefährdet Ihre Sicherheit. Aktualisieren Sie Firefox, um sich zu schützen. [Jetzt aktualisieren](#)

Matthias Hanauske (Kurs-Koordinator) **Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer - General Theory of Relativity on the Computer** (M.Hanauske: VARTC 2018) (Mehr ...) [Neue Nachrichten](#) Rollen Hilfe [Logout](#)

Hauptmenü Inhalt Kurs-Editor Was gibt's Neues Bewertungen Personen Einstellungen Öffentlich Rolle wechseln

Inhaltsverzeichnis » ... » Aufgaben » **Riemann Tensor der Schwarzschild-Metrik** Notizen Linksammlung Evaluieren Feedback Drucken Info

Funktionen Editor Inhaltsbewertungen Inhaltseinstellungen Verzeichnis bearbeiten

Die folgende Metrik beschreibt die raumzeitliche Struktur eines nichtrotierendes schwarzes Loch (Schwarzschildmetrik in Schwarzschildkoordinaten):

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

Die griechischen, raumzeitlichen Indices μ, ν laufen von 0..3 und entsprechen den folgenden sphärischen Koordinaten:
 $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \phi)$. Berechnen Sie den Wert des Riemann Tensors R_{0101} , wobei die Masse M des schwarzen Loch und der radiale Abstand r den folgenden Werten entspricht:

M=40 , r=4.9

Antwort einreichen Versuche 0/20

Diskussionsbeitrag abschicken [Feedback geben](#)

https://lon-capa.server.uni-frankfurt.de/adm/logout

Die folgende Metrik beschreibt die homogene, isotrope zeitliche Entwicklung des Universums (Robertson-Walker Metrik):

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a(t)^2}{1 - k r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

Die Funktion $a(t)$ bezeichnet den Skalenfaktor des Universums zur Zeit t und der Parameter k kennzeichnet den Krümmungsparameter des Universums. Die griechischen, raumzeitlichen Indices μ, ν laufen von 0..3 und entsprechen den folgenden sphärischen Koordinaten: $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \phi)$. Berechnen Sie das Christoffelsymbols Γ_{11}^0 und geben Sie an welcher der unten stehende Ausdrücke richtig ist:

- $\Gamma_{11}^0 = \frac{k r}{1 - k r^2}$
- $\Gamma_{11}^0 = \frac{\frac{da(t)}{dt}}{1 - k r^2}$
- $\Gamma_{11}^0 = -\frac{a(t)}{1 - k r^2}$
- $\Gamma_{11}^0 = \frac{2 a(t) \frac{da(t)}{dt}}{1 - k r^2}$
- $\Gamma_{11}^0 = \frac{a(t) \frac{da(t)}{dt}}{1 - k r^2}$

Antwort einreichen | Versuche 0/2

Diskussionsbeitrag abschicken

Feedback geben

Die folgende Metrik beschreibt die homogene, isotrope zeitliche Entwicklung des Universums (Robertson-Walker Metrik):

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a(t)^2}{1 - k r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

Die Funktion $a(t)$ bezeichnet den Skalenfaktor des Universums zur Zeit t und der Parameter k kennzeichnet den Krümmungsparameter des Universums. Die griechischen, raumzeitlichen Indices μ, ν laufen von 0..3 und entsprechen den folgenden sphärischen Koordinaten: $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \phi)$. Berechnen Sie die $(1, 1)$ -Komponente des Einsteintensors $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$ und geben Sie an welcher der unten stehende Ausdrücke richtig ist:

- $G_{11} = G_{rr} = -\frac{3 \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 + k}{(a(t))^2}$
- $G_{11} = G_{rr} = -\frac{4 a(t) \frac{d^2 a(t)}{dt^2} + \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 + k}{1 - k r^2}$
- $G_{11} = G_{rr} = -\frac{2 a(t) \frac{d^2 a(t)}{dt^2} + 2 \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 + k}{1 - k r^2}$
- $G_{11} = G_{rr} = \frac{2 a(t) \frac{d^2 a(t)}{dt^2} + \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 + k}{1 - k r^2}$
- $G_{11} = G_{rr} = \frac{2 a(t) \frac{d^2 a(t)}{dt^2} + \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 + k}{1 - k r^4}$

Die folgende Metrik beschreibt die homogene, isotrope zeitliche Entwicklung des Universums (Robertson-Walker Metrik):

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a(t)^2}{1 - k r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

Die Funktion $a(t)$ bezeichnet den Skalenfaktor des Universums zur Zeit t und der Parameter k kennzeichnet den Krümmungsparameter des Universums. Die griechischen, raumzeitlichen Indices μ, ν laufen von 0..3 und entsprechen den folgenden sphärischen Koordinaten: $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \phi)$. Berechnen Sie die $(0, 0)$ -Komponente des folgenden zusammengesetzten Tensors $Q^\mu{}_\nu = R^{\alpha\beta\gamma\mu} R_{\alpha\beta\gamma\nu} - \frac{1}{4} R^{\alpha\beta\gamma\lambda} R_{\alpha\beta\gamma\lambda} g^\mu{}_\nu$ und geben Sie an welcher der unten stehende Ausdrücke richtig ist:

- $Q^0{}_0 = Q^t{}_t = \frac{3 \left((a(t))^4 \left(\frac{d^2 a(t)}{dt^2} \right)^2 - \left(\frac{da(t)}{dt} \right)^2 - 2 k \left(\frac{da(t)}{dt} \right)^2 - k^2 \right)}{(a(t))^4}$
- $Q^0{}_0 = Q^t{}_t = \frac{3 \left((a(t))^2 \left(\frac{d^2 a(t)}{dt^2} \right)^2 - \left(\frac{da(t)}{dt} \right)^4 - 2 k \left(\frac{da(t)}{dt} \right)^2 - k^2 \right)}{(a(t))^4}$
- $Q^0{}_0 = Q^t{}_t = \frac{2 \left((a(t))^2 \left(\frac{d^2 a(t)}{dt^2} \right)^2 - \left(\frac{da(t)}{dt} \right)^4 - 4 k \left(\frac{da(t)}{dt} \right)^2 - k^2 \right)}{(a(t))^4}$
- $Q^0{}_0 = Q^t{}_t = \frac{3 \left((a(t))^2 \left(\frac{d^2 a(t)}{dt^2} \right)^2 - \left(\frac{da(t)}{dt} \right)^4 - 2 k \left(\frac{da(t)}{dt} \right)^2 - k^2 \right)}{1 - k r^2}$

Die Bewegung eines Probekörpers um ein nichtrotierendes schwarzes Loch wird mittels der Geodätengleichung beschrieben:

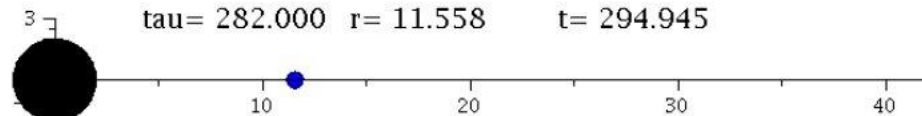
$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^0 \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}$$

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^1 \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}$$

$$\frac{d^2 \theta}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^2 \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}$$

$$\frac{d^2 \phi}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^3 \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}$$



wobei τ ein affiner Parameter (z.B. die Eigenzeit), t , r , θ und ϕ die Schwarzschildkoordinaten und $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ die Christoffel Symbole zweiter Art darstellen. Lösen Sie, unter Verwendung des Computeralgebra-Systems Maple, die Geodätengleichung eines radial in ein schwarzes Loch einfallenden Probekörpers. Verwenden Sie die folgenden Anfangsbedingungen: Zur Eigenzeit $\tau=0$ sei der Probekörper bei $r=50.5$, $\theta=0$ und $\phi=0$; die Anfangsgeschwindigkeiten seien: $\frac{dr}{d\tau}=0$, $\frac{d\theta}{d\tau}=0$, $\frac{d\phi}{d\tau}=0$ und die Masse des schwarzen Lochs betrage $M=1$. Berechnen Sie wo sich der Probekörper bei $\tau = 300 \approx 1$ [ms] befindet und geben Sie den Radius $r(300)$ in [km] an.

Die Geodätengleichung

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0$$

Maple Ausgabe bei festgelegter Schwarzschild-Raumzeit

$$\begin{aligned} \text{eqns} := & \left\{ \frac{d^2}{d\lambda^2} \tau(\lambda) - \frac{2M \left(\frac{d}{d\lambda} \tau(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right)}{r(-r+2M)} = 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} \phi(\lambda) \right. \\ & + \frac{2 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)}{r} + \frac{2 \cos(\theta) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)}{\sin(\theta)} = 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} \theta(\lambda) \\ & + \frac{2 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right)}{r} - \sin(\theta) \cos(\theta) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)^2 = 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} r(\lambda) \\ & - \frac{(-r+2M)M \left(\frac{d}{d\lambda} \tau(\lambda) \right)^2}{r^3} + \frac{M \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right)^2}{r(-r+2M)} + (-r+2M) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right)^2 + (\\ & \left. -r+2M) \sin(\theta)^2 \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)^2 = 0 \right\} \end{aligned}$$

wobei die $\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}$ die Christoffel Symbole zweiter Art und λ ein affiner Parameter (z.B. die Eigenzeit) darstellen.

Radial in ein schwarzes Loch einfallender Probekörper

```
> restart:
with( tensor ):
with(plots):
with(plottools):
```

Definition der kovarianten Raumzeit-Metrik eines schwarzen Lochs der Masse M in Schwarzschildkoordinaten:

```
> coord := [t, r, theta, phi]:
g_compts := array(symmetric,sparse, 1..4, 1..4):
g_compts[1,1] := 1-2*M/r: g_compts[2,2] := -1/g_compts[1,1]:
g_compts[3,3] := -r^2: g_compts[4,4] := -r^2*sin(theta)^2:
g := create( [-1,-1], eval(g_compts));
```

$$g := \text{table} \left(\begin{array}{c} \text{index_char} = [-1, -1], \text{compts} \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 - \frac{2M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{array} \right) \end{array} \right) \quad (2.1.1)$$

Berechnung der kontravarianten Metrik und der Christoffel Symbole:

```
> ginv := invert( g, 'detg' ):
D1g := d1metric( g, coord ):
D2g := d2metric( D1g, coord ):
Cf1 := Christoffel1( D1g ):
Cf2:= Christoffel2( ginv, Cf1 ):
```

Berechnung der Geodätengleichung als Funktion des affinen Parameters λ : Die Geodätengleichung ist ein System gekoppelter Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d^2 t}{d\lambda^2} &= -\Gamma_{\nu\rho}^0 \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \\ \frac{d^2 r}{d\lambda^2} &= -\Gamma_{\nu\rho}^1 \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \\ \frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} &= -\Gamma_{\nu\rho}^2 \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \\ \frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} &= -\Gamma_{\nu\rho}^3 \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \end{aligned} ,$$

wobei λ ein affiner Parameter (z.B. die Eigenzeit), t, r, θ und ϕ die Schwarzschildkoordinaten und $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ die Christoffel Symbole zweiter Art darstellen.

```
> eqns:=geodesic_eqns( coord, lambda, Cf2 );
```

$$\begin{aligned} eqns := & \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2}{d\lambda^2} t(\lambda) - \frac{2M}{r(-r+2M)} \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) &= 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} \phi(\lambda) \\ + \frac{2 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)}{r} + \frac{2 \cos(\theta) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)}{\sin(\theta)} &= 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} \theta(\lambda) \\ + \frac{2 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right)}{r} - \sin(\theta) \cos(\theta) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)^2 &= 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} r(\lambda) \\ - \frac{(-r+2M)M \left(\frac{d}{d\lambda} t(\lambda) \right)^2}{r^3} + \frac{M \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right)^2}{r(-r+2M)} + (-r+2M) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right)^2 + & \\ -r+2M \sin(\theta)^2 \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)^2 &= 0 \end{aligned} \right. \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Wir lassen nur radiale Bewegung zu und setzen die Masse des schwarzen Lochs auf $M=1$:

```
> eq1:=subs({diff(phi(lambda), lambda)=0, diff(theta(lambda), lambda)=0, M=1}, eqns[1]):
eq2:=subs({diff(phi(lambda), lambda)=0, diff(theta(lambda), lambda)=0, M=1}, eqns[2]):
eq3:=subs({diff(phi(lambda), lambda)=0, diff(theta(lambda), lambda)=0, M=1}, eqns[3]):
eq4:=subs({diff(phi(lambda), lambda)=0, diff(theta(lambda), lambda)=0, M=1}, eqns[4]):
eq1:=simplify(subs({r=r(lambda)}, eq1)):
eq4:=simplify(subs({r=r(lambda)}, eq4)):
```

$$\begin{aligned}
 eq1 &:= \frac{\left(\frac{d^2}{d\lambda^2} r(\lambda)\right) r(\lambda)^2 - 2 \left(\frac{d^2}{d\lambda^2} r(\lambda)\right) r(\lambda) + 2 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda)\right) \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda)\right)}{r(\lambda) (r(\lambda) - 2)} = 0 \\
 eq4 &:= \frac{1}{r(\lambda)^3 (r(\lambda) - 2)} \left(\left(\frac{d^2}{d\lambda^2} r(\lambda)\right) r(\lambda)^4 - 2 \left(\frac{d^2}{d\lambda^2} r(\lambda)\right) r(\lambda)^3 \right. \\
 &\quad + \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda)\right)^2 r(\lambda)^2 - 4 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda)\right)^2 r(\lambda) + 4 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda)\right)^2 \\
 &\quad \left. - \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda)\right)^2 r(\lambda)^2 \right) = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.1.3}$$

Anfangswerte:

Zur Zeit $t=0$ sei der fallende Körper bei einem Radius von $r=10=5*$ (Schwarzschildradius), die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers sei 0. Wir beschreiben den Fall aus der Sichtweise eines im unendlichen ruhenden Beobachters. Bemerkung: Der Anfangswert dt_0 ergibt sich hierbei aus der Bedingung des infinitesimalen Weglängenelements $\frac{ds^2}{d\lambda^2} = u^\mu u_\mu = 1$, wobei hierbei der affine Parameter λ als Eigenzeit τ interpretiert wird und u^μ die 4er-Geschwindigkeit des Körpers darstellt.

$$\frac{ds^2}{d\lambda^2} = 1 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{dr=d\theta=d\phi=0 \text{ bei } t=0} \quad \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt^2}{d\lambda^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}}$$

```

>      r0:=10:
      t0:=0:
      dr0:=0:
      dt0:=evalf(1/sqrt(1-2/r0)):
  
```

Numerisches Lösen der Geodätengleichung:

```

> Loes:=dsolve({eq1,eq4,t(0)=t0,r(0)=r0,D(r)(0)=0,D(t)(0)=dt0},{r(lambda),t(lambda)},type=numeric,output=listprocedure):
  
```

Zum Vergleich lösen wir auch die Bewegungsgleichung nach Newton:

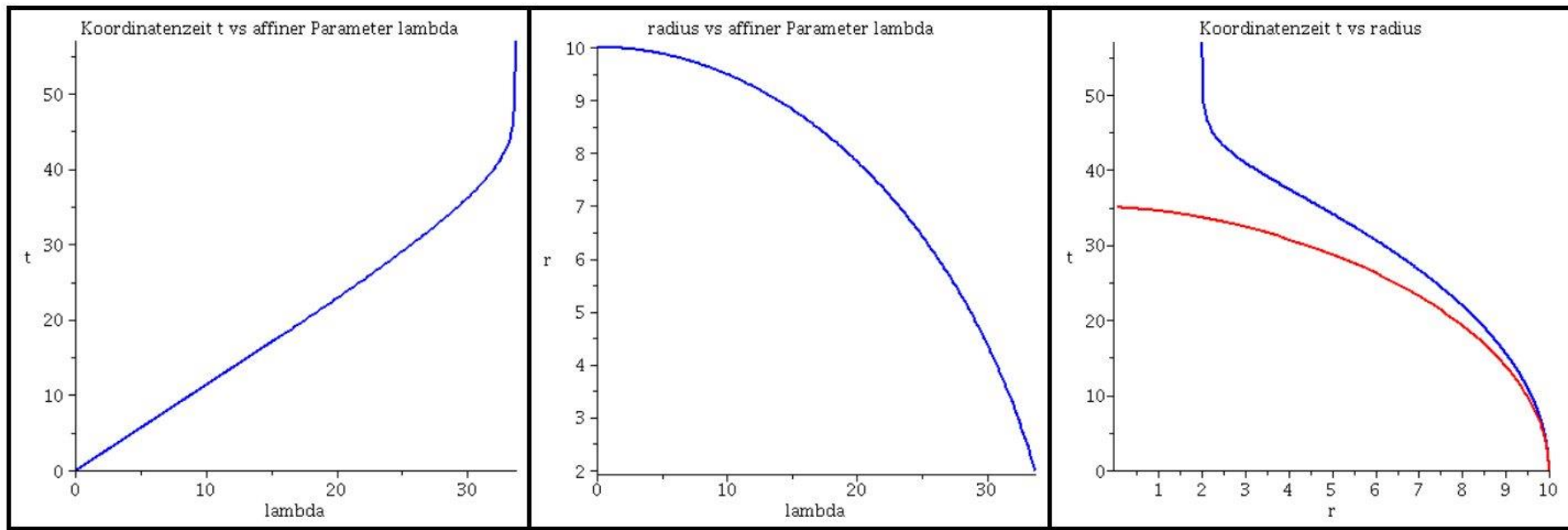
$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{1}{r^2}$$

Grafische Veranschaulichung der Lösung (rote Kurve ist die nach Newton berechnete):

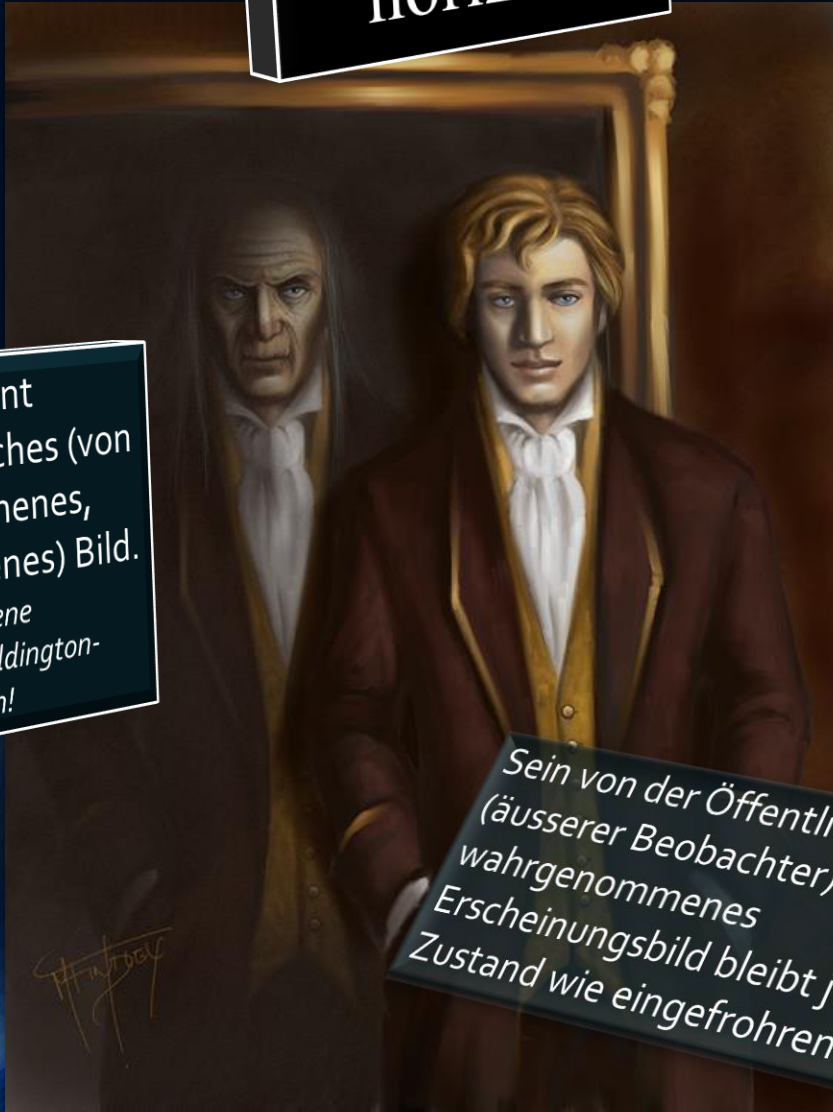
```

>
lend:=33.7:
lendn:=35.12:
Plot1:=odeplot(Loes, [lambda, t(lambda)], 0..lend, numpoints=200, color=blue, thickness=2, title="Koordinatenzeit t vs affiner Parameter lambda"):
Plot2:=odeplot(Loes, [lambda, r(lambda)], 0..lend, numpoints=200, color=blue, thickness=2, title="radius vs affiner Parameter lambda"):
Plot3:=odeplot(Loes, [r(lambda), t(lambda)], 0..lend, numpoints=700, color=blue, thickness=2, title="Koordinatenzeit t vs radius"):
Plot_newton:=odeplot(Loes_newton, [r(lambda), lambda], 0..lendn, numpoints=100, color=red, thickness=2):
display(Matrix(1, 3, [Plot1, Plot2, display(Plot3, Plot_newton)]));

```



Ereignis- horizont



Im Spiegel erscheint jedoch sein wirkliches (von ihm wahrgenommenes, moralisch verfallenes) Bild.
Transformation ins eigene Koordinatensystem, Eddington-Finkelstein Koordinaten!

Sein von der Öffentlichkeit (äusserer Beobachter) wahrgenommenes Erscheinungsbild bleibt jungen Zustand wie eingefrohren.

Für den äusseren Beobachter friert das Bild des Körpers, der in das schwarze Loch fällt, am Ereignishorizont ein. Der Körper selbst übertritt jedoch die Grenze und fällt weiter in die echte Singularität im Ursprung.

Dorian Gray wird in das schwarze Loch der moralischen Abgründe gezogen und übertritt eine Grenze von der aus er nicht mehr zurück kann.

Das Bildnis des schwarzen Loches

(die wohl beste Veranschaulichung der wesentlichen Eigenschaften eines schwarzen Loches)



Ereignis-
horizont

Ereignishorizont

Echte Singularität