

# Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

*PC-POOL RAUM 01.120  
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT  
20. APRIL, 2018*

*MATTHIAS HANAUSKE*

*FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES  
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT  
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK  
ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK  
D-60438 FRANKFURT AM MAIN  
GERMANY*

## 2. Vorlesung

# Allgemeines zur Vorlesung

- Ort und Zeit:  
PC-Pool Raum 01.120, immer freitags von 15.00 bis 17.00 Uhr
- Vorlesungs-Materialien:  
<http://th.physik.uni-frankfurt.de/~harauske/VARTC/>
- Kurs auf der Online-Lernplattform Lon Capa:  
<http://lon-capa.server.uni-frankfurt.de/>
- Die Vorlesungstermine am 15.06. und 29.06.2018 müssen leider auf einen anderen Termin verschoben werden bzw. eine Vertretung wird organisiert.
- Plan für die heutige Vorlesung:  
Grundlagen der ART, Berechnung von Christoffel Symbolen und Riemann Tensor mit Maple, Einführung in nichtrotierende schwarze Löcher, die Schwarzschild-Metrik, Raumzeitdiagramme

# Vorlesung besteht aus drei Teilen

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer von Dr.phil.nat.Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

[Home](#) [Research](#) [Contact](#)

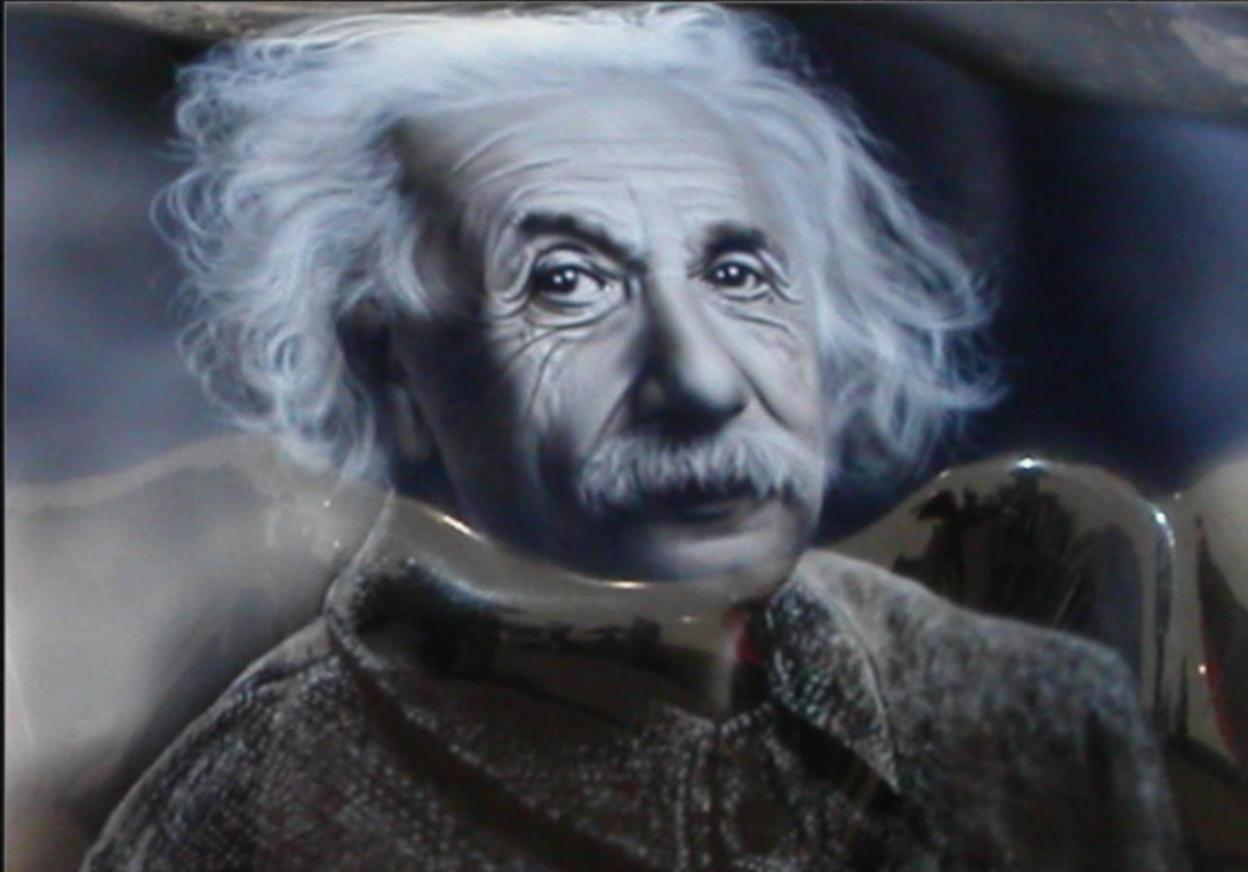
[Einführung](#)

[Teil I](#)

[Teil II](#)

[Teil III](#)

[E-Learning](#)



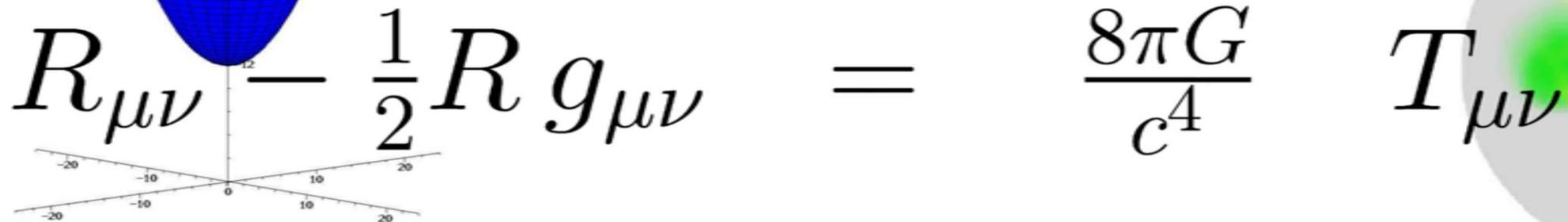
[www.fias.uni-frankfurt/~hanauske/VARTC/](http://www.fias.uni-frankfurt/~hanauske/VARTC/)

## **Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer (General Theory of Relativity on the Computer) Vorlesung SS 2016, Mo. 16-18.00 Uhr, PC-Pool 01.120**

In dieser Vorlesung werden die mathematisch anspruchsvollen Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) in diversen Programmierumgebungen analysiert. Im ersten Teil des Kurses erlernen die Studierenden die Verwendung von Computeralgebra-Systemen (Maple und Mathematica). Die oft komplizierten und zeitaufwendigen Berechnungen der tensoriellen Gleichungen der ART können mit Hilfe dieser Programme erleichtert werden. Diverse Anwendungen der Einstein- und Geodätengleichung werden in Maple implementiert, quasi analytische Berechnungen durchgeführt und entsprechende Lösungen berechnet und visualisiert. Der zweite Teil des Kurses befasst sich mit der numerischen Berechnung von Neutronensternen und Weißen Zwergen mittels eines C/C++ Programms. Nach einer kurzen Auffrischung der grundlegenden Programmierkenntnisse, erstellen die Studierenden, gemeinsam mit dem Betreuer, ein Programm, das die Tolman-Oppenheimer-Volkov-Gleichung numerisch löst und visualisieren die Ergebnisse. Zusätzlich wird hierbei in die Grundkonzepte der parallelen Programmierung eingeführt und eine MPI- und OpenMP-Version des C/C++ Programms erstellt. Im dritten Teil des Kurses werden zeitabhängige numerische Simulationen der ART mittels des Einstein Toolkit durchgeführt und deren Ergebnisse mittels Python/Matplotlib visualisiert. Inhaltlich wird hierbei ebenfalls auf den, dem Programm zugrunde liegenden (3+1)-Split der ART eingegangen und, abhängig von den Vorkenntnissen der Studierenden, mehrere fortgeschrittene, astrophysikalisch relevante Probleme simuliert. Mögliche Themen dieses abschließenden Teils könnten die folgenden Systeme

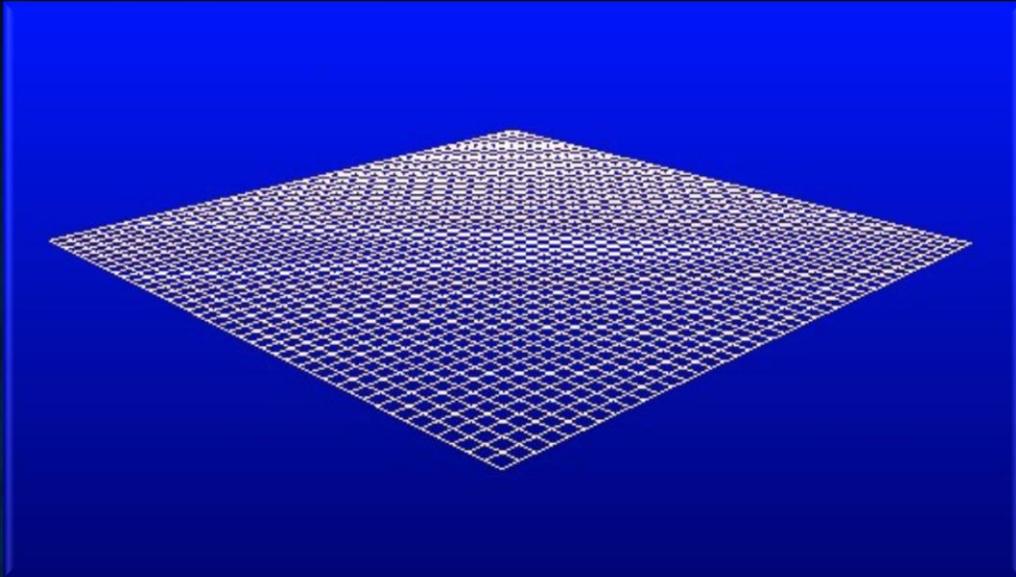
# Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie

Vor etwa hundert Jahren (1915) stellte Albert Einstein seine „Allgemeine Relativitätstheorie“ (ART) der Öffentlichkeit vor.


$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

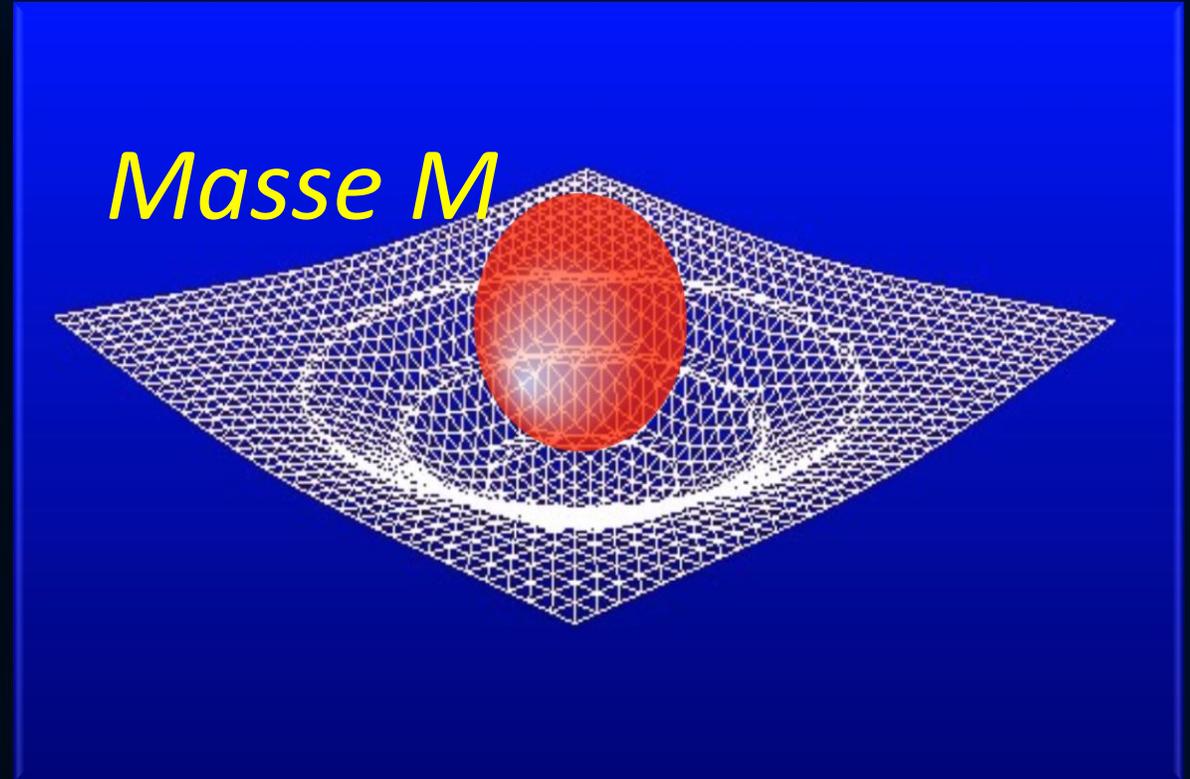
Die ART ist eine sehr revolutionäre Theorie. Sie besagt, dass jegliche Energieformen (z.B. Masse eines Körpers) die „Raumzeit“ verbiegen und durch diese Krümmung des Raumes und der Zeit die Gravitation (Schwerkraft) resultiert. -> Raumzeit-Krümmung = Energie

# Was ist Raumzeit-Krümmung?



## Flache Raumzeit

Raumzeit ohne Materie und Energie hat keine Krümmung



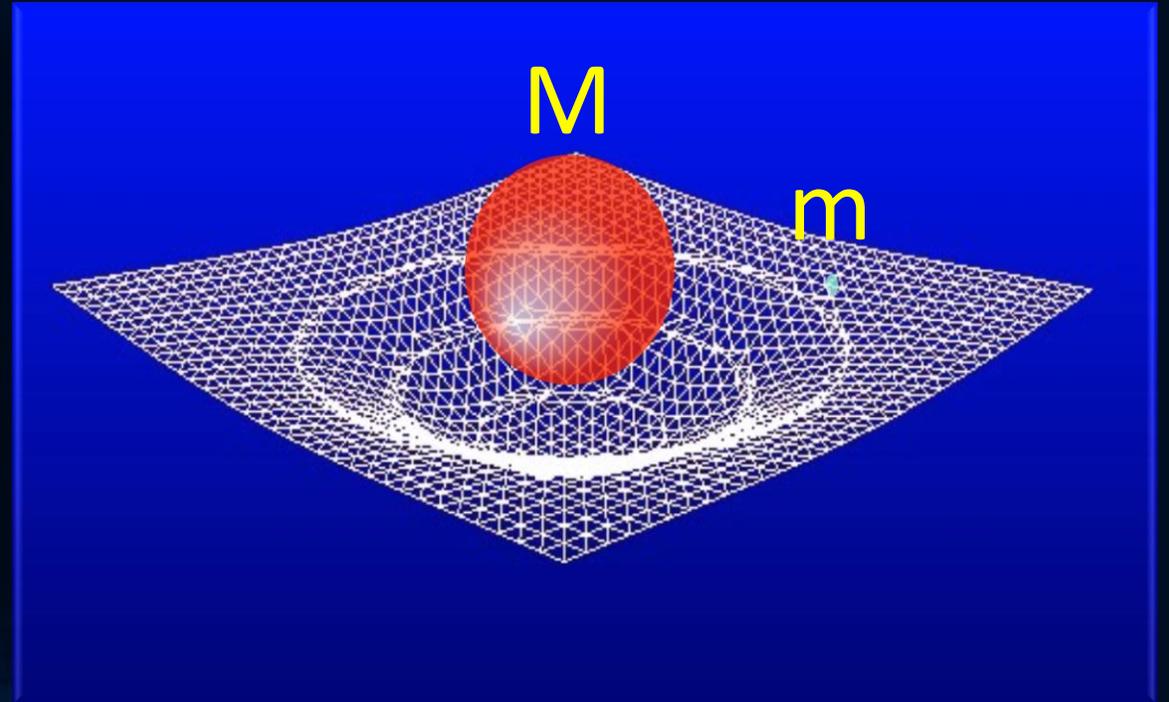
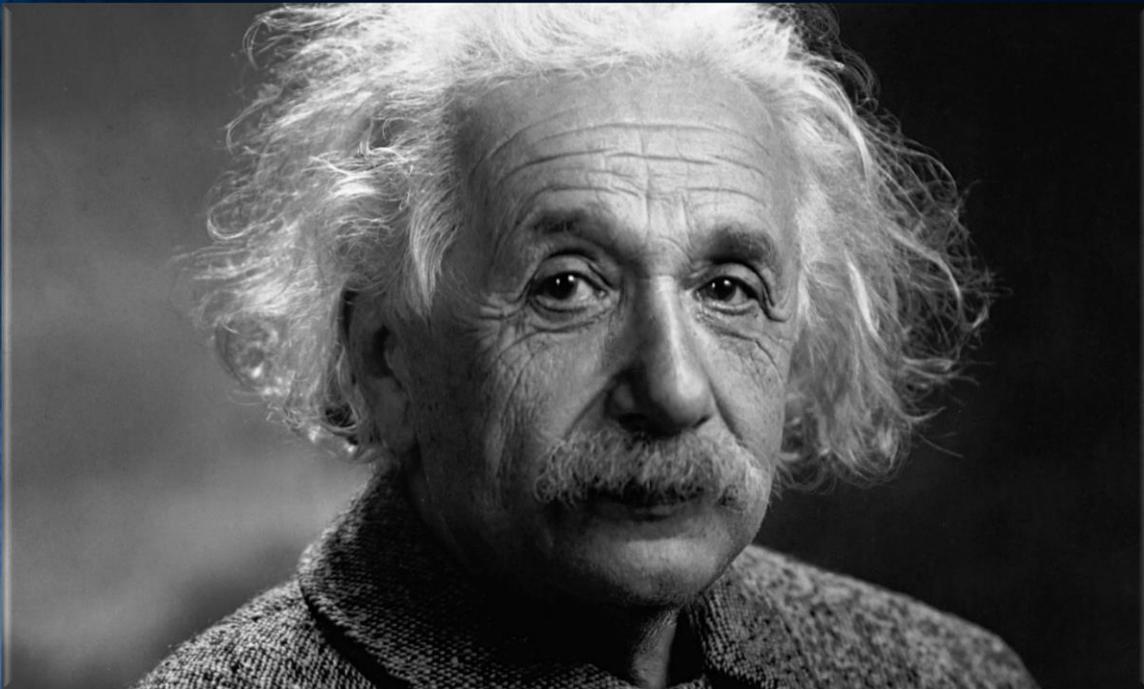
## Gekrümmte Raumzeit

Raumzeit mit Materie verbiegt sich

# Raumzeit-Krümmung ist Gravitation?

Betrachten wir einen Objekt kleiner Masse  $m$  das um ein Objekt großer Masse  $M$  kreist (z.B. Erde um die Sonne)

Einstein: Die Krümmung der Raumzeit, verursacht durch die große Masse, bestimmt die Umlaufbahn des kleinen Körpers und ist ursächlicher Grund der gravitativen Wechselwirkung



# Teil I

## Analytische Berechnungen und numerische Simulationen in Maple

Basierend auf der Einstein- und Geodätengleichung, werden im ersten Teil der Vorlesung unterschiedliche Probleme der allgemeinen Relativitätstheorie analysiert.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi T_{\mu\nu}$$

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0$$

### Nichtrotierende schwarze Löcher

Ereignishorizonte, was geschieht wenn ein Teilchen in ein schwarzes Loch fällt, Bewegung von Probekörpern und Lichtteilchen um ein schwarzes Loch,..

### Eigenschaften von Neutronensternen

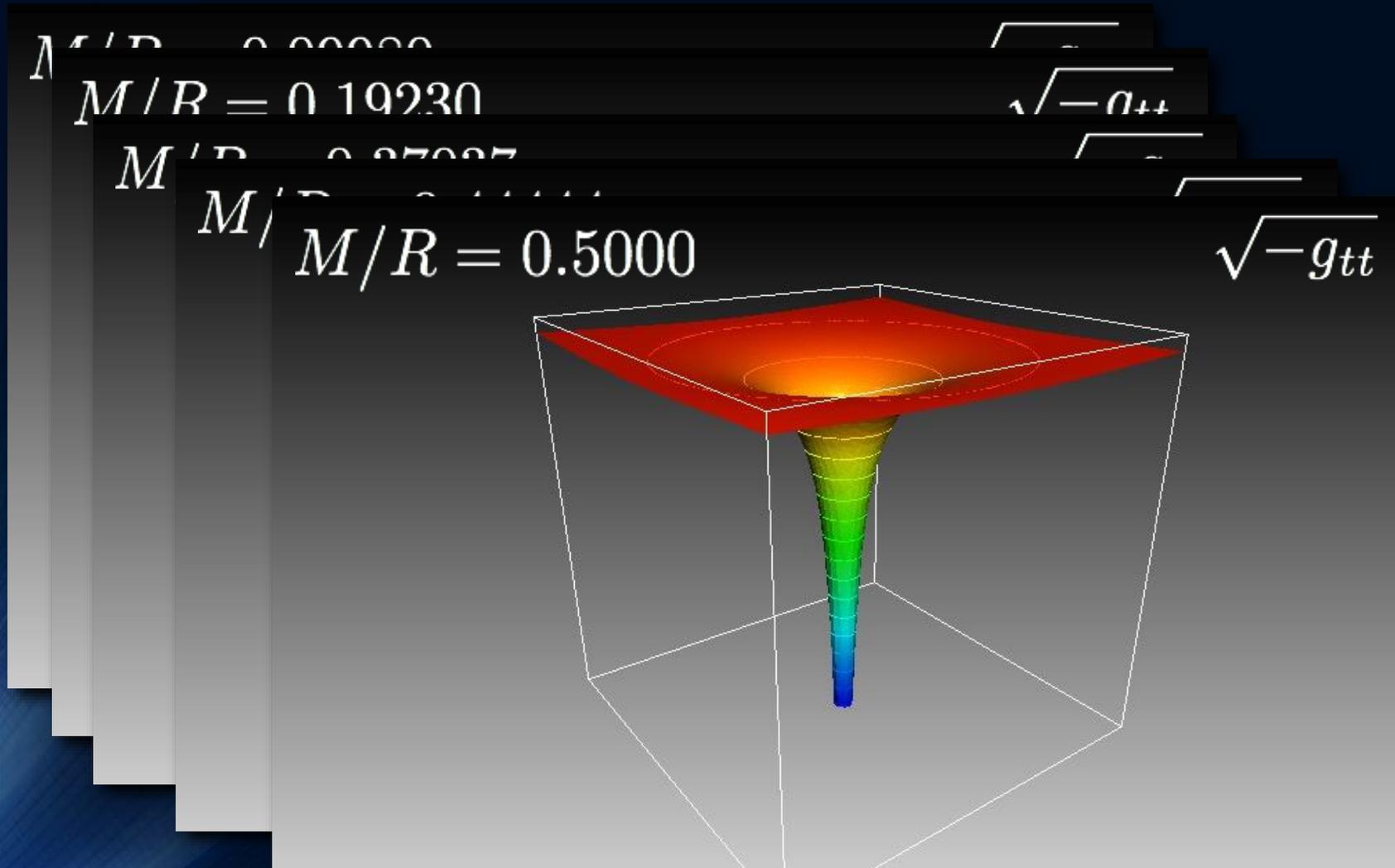
Verlauf der Dichte innerhalb eines NS, Masse-Radius Beziehung, Raumzeitkrümmung innerhalb und ausserhalb eines NS,..

### Rotierende schwarzen Löchern

Mitführungseffekt der Raumzeit (frame-dragging),...

Vielleicht: Zeitliche Entwicklung des Universums  
(Robertson-Walker-Metrik, Friedmann-Gleichung)

# Was sind schwarze Löcher?



Wir sind über den Grenzwert gekommen und haben ein schwarzes Loch erzeugt!

Grenzwert der Krümmung: Stabile Objekte (Neutronensterne) sind nicht mehr möglich

# Die Schwarzschild Lösung

1915 Einsteins Gravitation:  
Krümmung der „Raumzeit“

1916 Karl Schwarzschild:

... geboren 1873 in Frankfurt nahe dem Haus der Rothschild's. Erste Lösung der ART – drei Monate nach Einsteins Artikel! Aussenraummetrik eines nichtrotierenden schwarzen Loches.

Schwarzschild stirbt einen Monat später an einer Infektion die er sich an der russischen Front einfing...



# Herleitung der Schwarzschild Metrik

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{\nu(r,t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda(r,t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

$$ds^2 = c^2 e^{\nu(r,t)} dt^2 - e^{\lambda(r,t)} dr^2 - r^2 (\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2) \quad (2.27)$$

Die Masse eines kugelsymmetrischen schwarzen Loches befindet sich (wie wir im folgenden sehen werden) konzentriert im Ursprungspunkt bei  $r = 0$ , so dass der gesamte Raum (ohne den Punkt  $r = 0$ ) materiefrei ist. Der Energieimpulstensor verschwindet demnach im Außenraum identisch  $T_{\mu\nu} \equiv 0$ , so dass sich die Einsteingleichung (Gl. 2.23) wie folgt vereinfacht:

$$\begin{aligned} R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} &= 8\pi\kappa T^{\mu\nu} = 0 \\ \Rightarrow R^{\mu\nu} &= 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

# Herleitung der Schwarzschild Metrik

wird als Schwarzschildradius bezeichnet

$$R_S = \frac{2G M}{c^2} . \quad (2.36)$$

Die Schwarzschildmetrik und das zugehörige Weglängenelement nimmt nun die folgende Form an

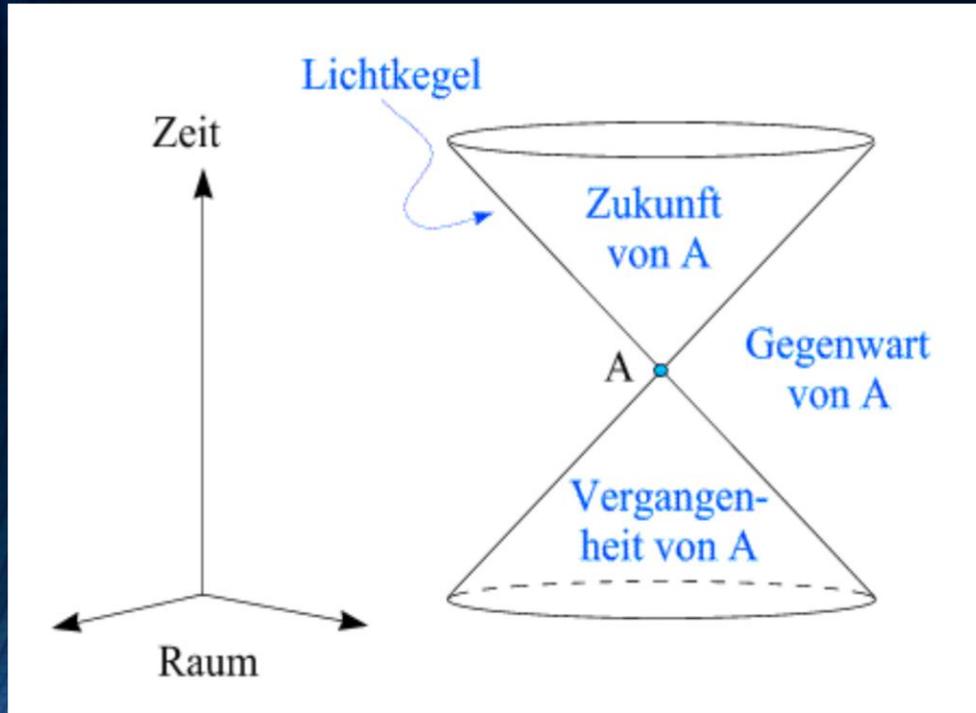
$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2) .$$

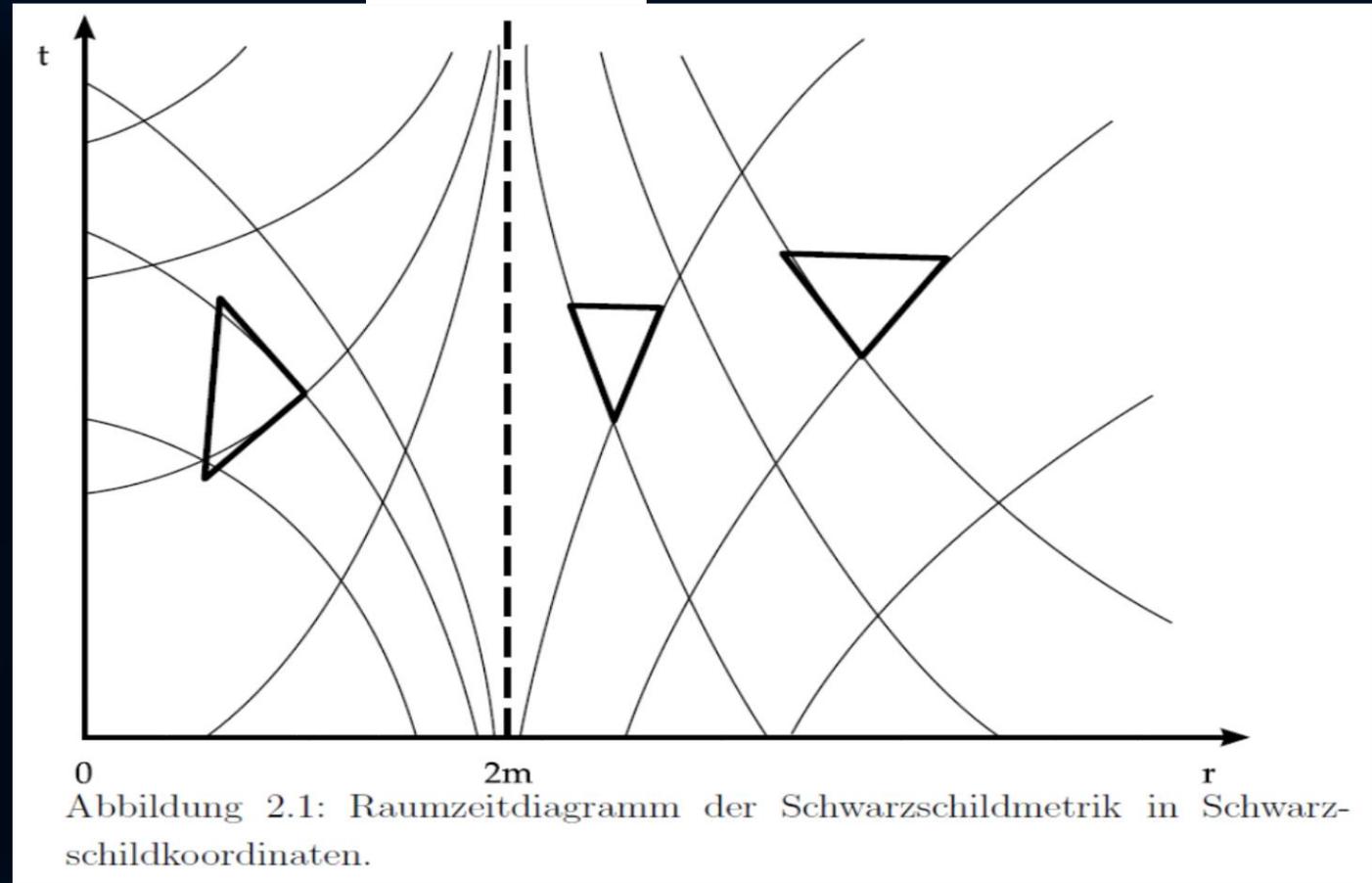
# Raumzeit-Diagramm eines schwarzen Loches

Sichtweise ruhender Beobachter im Unendlichen

Ereignis-  
horizont



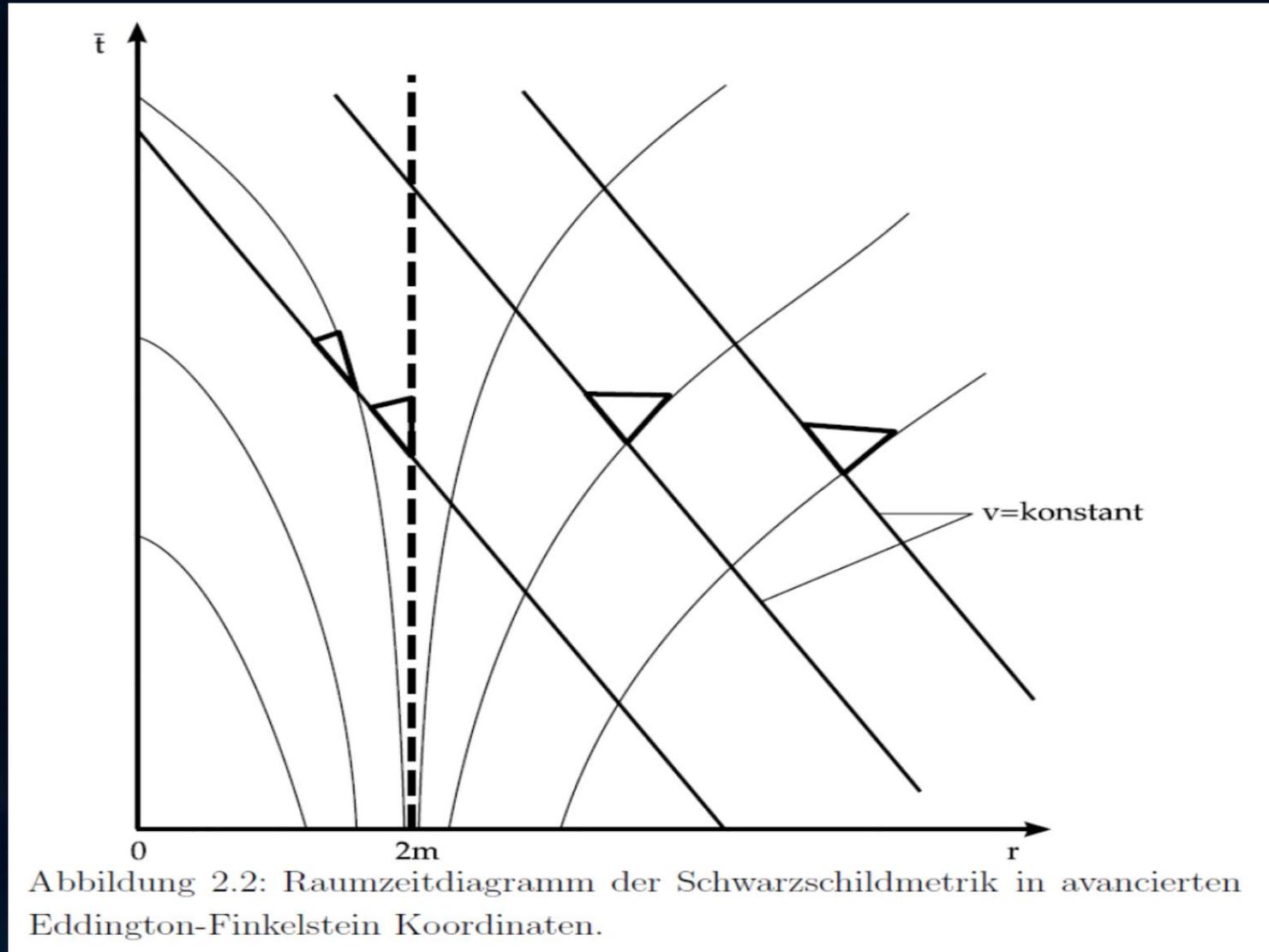
Raumzeit-Struktur  
im flachen Raum



Raumzeit-Struktur um ein schwarzes Loch

# Raumzeit-Diagramm eines schwarzen Loches

Sichtweise eines in das schwarze Loch fallenden Beobachters



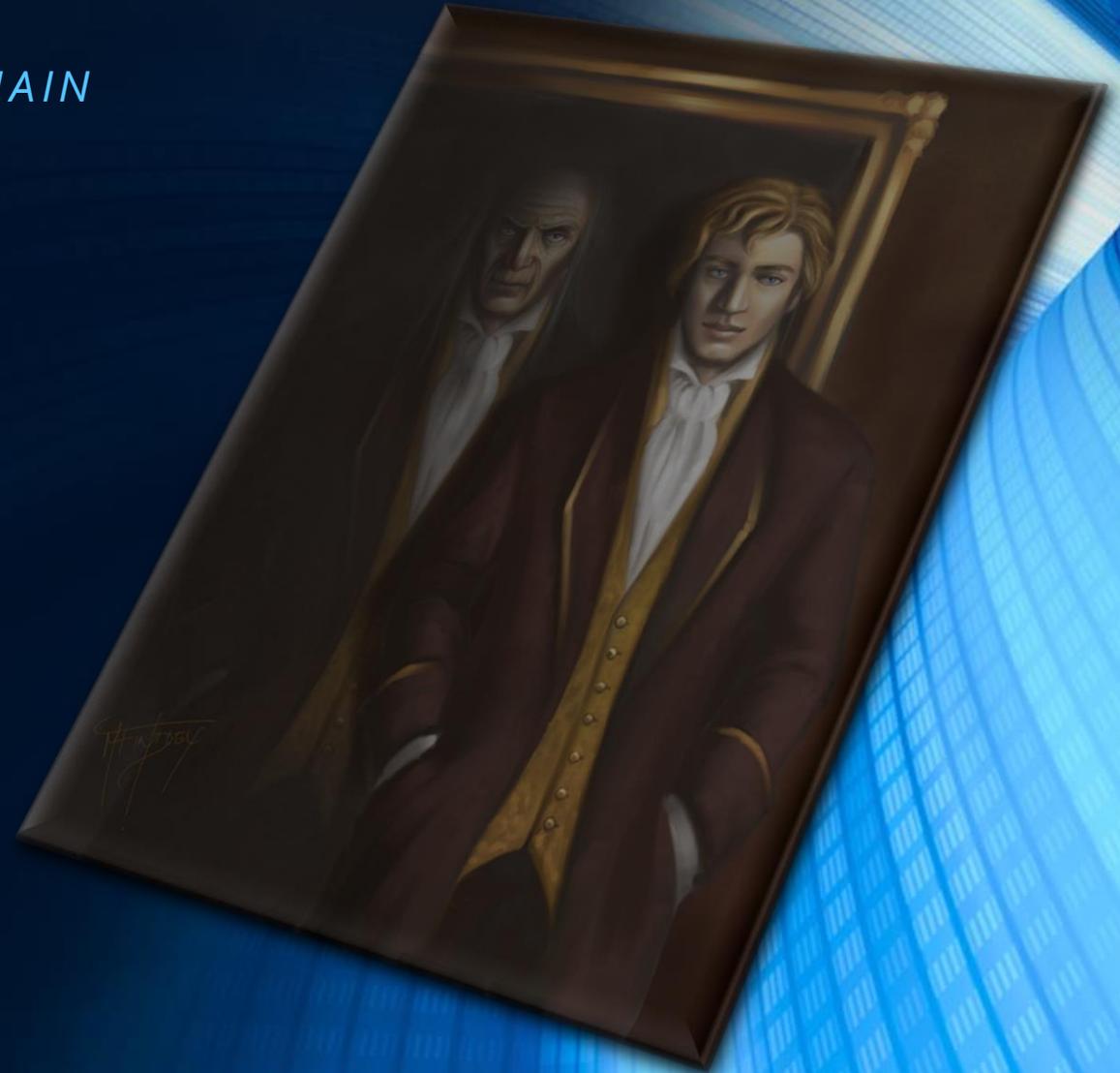
# Das Bildnis des schwarzen Lochs

*ASTRONOMIE AM FREITAG AM 7. APRIL 2017  
IM PHYSIKALISCHEN VEREIN IN FRANKFURT AM MAIN*



Oscar Wilde

Das Bildnis des  
Dorian Gray



Ereignis-  
horizont



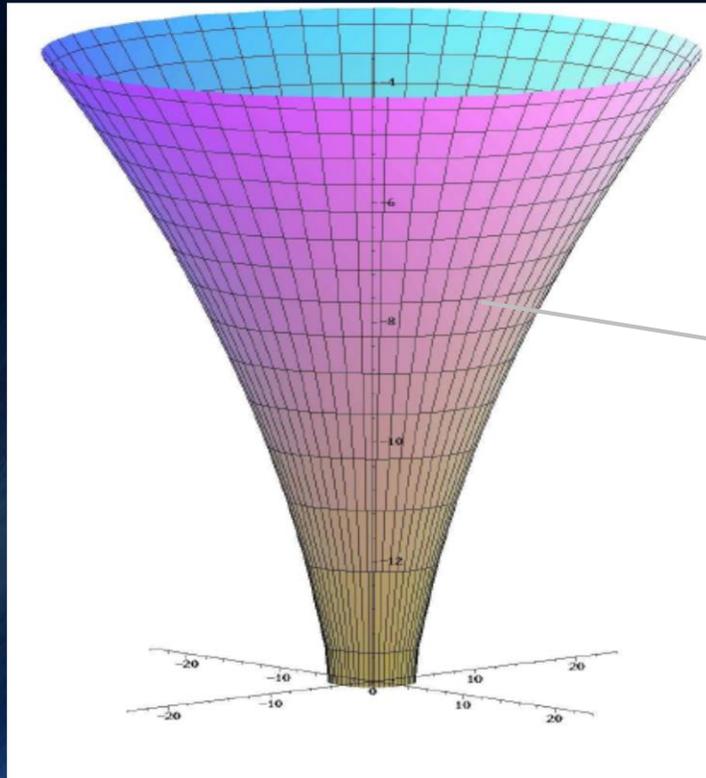
Für den äusseren Beobachter friert das Bild des Körpers, der in das schwarze Loch fällt, am Ereignishorizont ein. Der Körper selbst übertritt jedoch die Grenze und fällt weiter in die echte Singularität im Ursprung.

Dorian Gray wird in das schwarze Loch der moralischen Abründe gezogen und übertritt eine Grenze von der aus er nicht mehr zurück kann.

# Das Bildnis des schwarzen Loches

(die wohl beste Veranschaulichung der wesentlichen Eigenschaften eines schwarzen Loches)

## Der Raumzeit-Trichter im Reichstagsgebäude



# Das Bildnis des schwarzen Loches

(die wohl beste Veranschaulichung der wesentlichen Eigenschaften eines schwarzen Loches)



Ereignis-  
horizont

# Das Bildnis des schwarzen Loches

(die wohl beste Veranschaulichung der wesentlichen Eigenschaften eines schwarzen Loches)



Der Aufzug im Reichstagtagsgebäude befindet sich ca. bei  $3/2 * R_s$

# Black holes and the German Reichstag

One day a couple of years ago I was attending a meeting of the German Astronomical Society in Berlin, when I was gripped with an almost irrepressible sense of inner unrest. There was no other option – I simply had to leave the lecture halls of the Technical University and enjoy the gorgeous day outside. Before I left, however, I carefully taped my poster to the wall between the entrances to the men's and women's toilets, which seemed the perfect spot for it. Every congress delegate would now be forced – subliminally at least – to notice my creation.

After leaving the university buildings, I first soaked up the summer sunshine in the zoological gardens before heading towards the Reichstag – the home of the German parliament. As I did so, my thoughts wandered off in a different direction. What a waste of time, it occurred to me, all those boring lectures are. What physics desperately needs, I reasoned, is a new and exciting way of presenting the subject.

Unfortunately, modern physics is impossible to comprehend using intuition alone. How can bizarre concepts such as the curvature of space-time or the event horizon of a black hole be understood? What possible imagery could help non-scientists to grasp the significance and vital importance of some of the major insights of theoretical physics? Finding a simple way of conveying those ideas seemed an impossible task.



The funnel looks exactly like the diagrams used to illustrate the curvature of a black hole

Along the barrier are displayed various photographs of decisive events in German history that are designed to remind visitors of their responsibilities to the future. They are a warning against forgetfulness and against the repression of the Nazi era.

Suddenly I saw the significance of the information frozen on the pictures. Just as the politicians sit in the inner area of the black hole from which no useful information ever escapes, so the pictures represent external

Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. [Matthias Hanauske](#)

[Home](#) [Research](#) [Contact](#)

[Einführung](#)

[Teil I: Analytische Berechnungen und numerische Simulationen in Maple](#)

[Teil II: Paralleles Programmieren mit C++ und OpenMP/MPI](#)

[Teil III: Computersimulationen mit dem Einstein-Toolkit](#)

[Aufgaben](#)

[Download Maple Worksheed](#)

# Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

## General Theory of Relativity on the Computer

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main (Sommersemester 2016)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 11.04.2016

interaktiven Vorlesung liegt sowohl auf der Allgemeine Relativitätstheorie als auch auf der Vermittlung spezieller Programmierkenntnisse.

## Grundlegende Größen der Allgemeinen Relativitätstheorie

Im folgenden werden die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie und im besonderen die Einsteingleichung

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi T_{\mu\nu}$$

und die Geodatengleichung

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0$$

als bekannt vorausgesetzt. Die griechischen, raumzeitlichen Indices  $\mu, \nu, \rho, \dots$  laufen von 0..3, wobei, falls nicht anders angegeben, diese den folgenden kartesischen Raumzeitkoordinaten entsprechen:  $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$ .

Im folgenden werden einige grundlegende Größen der allgemeinen Relativitätstheorie am Beispiel der allgemeinen statischen, isotropen Metrik erläutert und aufgezeigt, wie man diese in Maple berechnet. Zunächst wird das "tensor"-Paket eingebunden. Die mit roter Schrift gekennzeichneten Wörter stellen die vom User eingegebenen Befehle dar und die blauen Wörter sind die vom Maple-Program ausgegebenen Größen. Hier werden im speziellen die im "tensor"-Paket neu definierten Befehle ausgegeben. Möchte man die eingegebenen Befehle zwar ausführen, aber nicht ausgeben lassen, so hat man am Ende des Befehls einen Doppelpunkt und kein Semikolon zu schreiben.

```
> restart:
with( tensor );
```

*frame, geodesic\_eqns, get\_char, get\_compts, get\_rank, init, invvars, invert, lin\_com, lower,  
 npscurve, npspin, partial\_diff, permute\_indices, petrov, prod, raise, symmetrize,  
 tensorsGR, transform]*

Die Definition eines Tensors in Maple erfolgt über den Befehl "create". Wir definieren nun die kovarianten Metrik einer allgemeinen statischen, isotropen Raumzeit  $g_{\mu\nu}$ , wobei wir ein sphärisches Koordinatensystem benutzen:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{wobei: } x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$$

```
> coord := [t, r, theta, phi]:
g_compts := array(symmetric, sparse, 1..4, 1..4):
g_compts[1,1] := A(r): g_compts[2,2] := -B(r):
g_compts[3,3] := -r^2: g_compts[4,4] := -r^2*sin(theta)^2:
g := create( [-1,-1], eval(g_compts));
```

$$g := \text{table} \left( \text{index\_char} = [-1, -1], \text{compts} = \begin{pmatrix} A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin(\theta)^2 \end{pmatrix} \right) \quad (2.2)$$



$$\begin{aligned}
 &= 0, (3, 2, 4) = 0, (3, 3, 1) = 0, (3, 3, 2) = -2r, (3, 3, 3) = 0, (3, 3, 4) = 0, (3, 4, 1) = 0, \\
 &(3, 4, 2) = 0, (3, 4, 3) = 0, (3, 4, 4) = 0, (4, 1, 1) = 0, (4, 1, 2) = 0, (4, 1, 3) = 0, (4, 1, 4) \\
 &= 0, (4, 2, 1) = 0, (4, 2, 2) = 0, (4, 2, 3) = 0, (4, 2, 4) = 0, (4, 3, 1) = 0, (4, 3, 2) = 0, (4, \\
 &3, 3) = 0, (4, 3, 4) = 0, (4, 4, 1) = 0, (4, 4, 2) = -2r \sin(\theta)^2, (4, 4, 3) = \\
 &-2r^2 \sin(\theta) \cos(\theta), (4, 4, 4) = 0]]])
 \end{aligned}$$

Berechnung der Christoffel Symbole erster Art  $\Gamma_{\mu\nu\rho}$  (kontravariante Form):

$$\Gamma_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2} \left( \partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu} \right) = \frac{1}{2} \left( g_{\nu\rho|\mu} + g_{\mu\rho|\nu} - g_{\mu\nu|\rho} \right)$$

Beispiel  $\Gamma_{100}$ :

$$\Gamma_{100} = \frac{1}{2} \left( g_{00|1} + g_{10|0} - g_{10|0} \right) = \frac{1}{2} g_{00|1} = \frac{1}{2} \frac{dA(r)}{dr}$$

In Maple entspricht dies der unten angegebenen Komponente  $(2, 1, 1) = \frac{1}{2} \frac{dA(r)}{dr}$ .

**> Cf1 := Christoffel1 ( Dlg );**

$$\begin{aligned}
 &Cf1 := \text{table} \left( \left[ \text{index\_char} = [-1, -1, -1], \text{compts} = \text{ARRAY} \left( \text{cf1}, [1..4, 1..4, 1..4], \left[ (1, 1, 1) \right. \right. \right. \right. \\
 &= 0, (1, 1, 2) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dr} A(r), (1, 1, 3) = 0, (1, 1, 4) = 0, (1, 2, 1) = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} A(r), (1, 2, 2) \\
 &= 0, (1, 2, 3) = 0, (1, 2, 4) = 0, (1, 3, 1) = 0, (1, 3, 2) = 0, (1, 3, 3) = 0, (1, 3, 4) = 0, (1, \\
 &4, 1) = 0, (1, 4, 2) = 0, (1, 4, 3) = 0, (1, 4, 4) = 0, (2, 1, 1) = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} A(r), (2, 1, 2) = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (3, 3, 3) = 0, (3, 3, 4) = 0, (3, 4, 1) = 0, (3, 4, 2) = 0, (3, 4, 3) = 0, (3, 4, 4) = \\
 & -r^2 \sin(\theta) \cos(\theta), (4, 1, 1) = 0, (4, 1, 2) = 0, (4, 1, 3) = 0, (4, 1, 4) = 0, (4, 2, 1) = 0, \\
 & (4, 2, 2) = 0, (4, 2, 3) = 0, (4, 2, 4) = -r \sin(\theta)^2, (4, 3, 1) = 0, (4, 3, 2) = 0, (4, 3, 3) \\
 & = 0, (4, 3, 4) = -r^2 \sin(\theta) \cos(\theta), (4, 4, 1) = 0, (4, 4, 2) = r \sin(\theta)^2, (4, 4, 3) \\
 & = r^2 \sin(\theta) \cos(\theta), (4, 4, 4) = 0]]))
 \end{aligned}$$

Berechnung der Christoffel Symbole zweiter Art  $\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}$  (erster Index kontravariant, zweiter und dritter kovariant):

$$\Gamma_{\nu\rho}^{\mu} = g^{\mu\delta} \Gamma_{\nu\rho\delta} = \frac{1}{2} g^{\mu\delta} (g_{\delta\nu|\rho} + g_{\delta\rho|\nu} - g_{\nu\rho|\delta})$$

Beispiel  $\Gamma_{00}^1$ :

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} g^{1\delta} (g_{\delta 0|0} + g_{\delta 0|0} - g_{00|\delta}) \quad \rightarrow \text{man verwendet: } g^{1\delta} = g^{11} = -\frac{1}{B(r)} \\
 &= \frac{1}{2} g^{11} (2g_{10|0} - g_{00|1}) = -\frac{1}{2B(r)} (2g_{10|0} - g_{00|1}) \quad \rightarrow \text{man verwendet: } g_{10} \equiv 0 \\
 &= \frac{1}{2B(r)} g_{00|1} = \frac{1}{2B(r)} \frac{dA(r)}{dr}
 \end{aligned}$$

In Maple entspricht dies der unten angegebenen Komponente  $(2, 1, 1) = \frac{1}{2} \frac{dA(r)}{B(r)}$ .

**> Cf2:= Christoffel2( ginv, Cf1 );**

$$Cf2 := \text{table} \left( \left[ \begin{array}{l} \text{index\_char} = [1, -1, -1], \text{compts} = \text{ARRAY} \left[ \begin{array}{l} cf2, [1..4, 1..4, 1..4] \end{array} \right] \end{array} \right] \right) (1, 1, 1)$$



$$= \frac{r^2 (\cos(\theta)^2 B(r) - B(r) + 1 - \cos(\theta)^2)}{B(r)}, (4, 3, 4, 4) = 0, (4, 4, 1, 1) = 0, (4, 4, 1, 2) = 0, (4, 4, 1, 3) = 0, (4, 4, 1, 4) = 0, (4, 4, 2, 1) = 0, (4, 4, 2, 2) = 0, (4, 4, 2, 3) = 0, (4, 4, 2, 4) = 0, (4, 4, 3, 1) = 0, (4, 4, 3, 2) = 0, (4, 4, 3, 3) = 0, (4, 4, 3, 4) = 0, (4, 4, 4, 1) = 0, (4, 4, 4, 2) = 0, (4, 4, 4, 3) = 0, (4, 4, 4, 4) = 0]]]$$

Berechnung des Ricci Tensors  $R_{\mu\nu} := g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu}$ :

> RICCI := Ricci( ginv, RMN );

$$\begin{aligned}
 \text{RICCI} := & \text{table} \left( \left[ \text{index\_char} = [-1, -1], \text{compts} = \left[ \left[ \right. \right. \right. \right. \\
 & -\frac{1}{4} \frac{1}{B(r)^2 A(r) r} \left( 2 r \left( \frac{d^2}{dr^2} A(r) \right) A(r) B(r) - r \left( \frac{d}{dr} A(r) \right)^2 B(r) \right. \\
 & \left. \left. - r \left( \frac{d}{dr} A(r) \right) \left( \frac{d}{dr} B(r) \right) A(r) + 4 \left( \frac{d}{dr} A(r) \right) B(r) A(r) \right], 0, 0, 0 \right], \\
 & \left[ 0, -\frac{1}{4} \frac{1}{A(r)^2 B(r) r} \left( -2 r \left( \frac{d^2}{dr^2} A(r) \right) A(r) B(r) + r \left( \frac{d}{dr} A(r) \right)^2 B(r) \right. \right. \\
 & \left. \left. + r \left( \frac{d}{dr} A(r) \right) \left( \frac{d}{dr} B(r) \right) A(r) + 4 \left( \frac{d}{dr} B(r) \right) A(r)^2 \right), 0, 0 \right], \\
 & \left[ 0, 0, -\frac{1}{2} \frac{\left( \frac{d}{dr} B(r) \right) r A(r) + 2 B(r)^2 A(r) - \left( \frac{d}{dr} A(r) \right) r B(r) - 2 A(r) B(r)}{B(r)^2 A(r)}, 0 \right], \\
 & \left[ 0, 0, 0, \frac{1}{2} \frac{1}{A(r) B(r)^2} \left( \left( \frac{d}{dr} A(r) \right) r B(r) - \left( \frac{d}{dr} A(r) \right) r B(r) \cos(\theta)^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. - \left( \frac{d}{dr} B(r) \right) r A(r) + \left( \frac{d}{dr} B(r) \right) r A(r) \cos(\theta)^2 + 2 A(r) B(r)^2 \cos(\theta)^2 - 2 B(r)^2 A(r) \right. \right. \\
 & \left. \left. + 2 A(r) B(r) - 2 A(r) B(r) \cos(\theta)^2 \right) \right] \right] \right] \right] \right]
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Berechnung des Ricci Skalars  $R := g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ :

**> RS := Ricciscalar( ginv, RICCI );**

$$\begin{aligned}
 RS := \text{table} \left( \left[ \text{index\_char} = [ ], \text{compts} = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 B(r)^2 A(r)^2} \left( -2 r^2 \left( \frac{d^2}{dr^2} A(r) \right) A(r) B(r) \right. \right. \right. \\
 \left. \left. + r^2 \left( \frac{d}{dr} A(r) \right)^2 B(r) + r^2 \left( \frac{d}{dr} A(r) \right) \left( \frac{d}{dr} B(r) \right) A(r) - 4 A(r) \left( \frac{d}{dr} A(r) \right) r B(r) \right. \right. \\
 \left. \left. + 4 \left( \frac{d}{dr} B(r) \right) r A(r)^2 + 4 B(r)^2 A(r)^2 - 4 A(r)^2 B(r) \right) \right] \right) \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

Berechnung des Einstein Tensors  $G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ :

**> Estn := Einstein(g, RICCI, RS);**

$$\begin{aligned}
 Estn := \text{table} \left( \left[ \text{index\_char} = [-1, -1], \text{compts} = \left[ \left[ -\frac{A(r) \left( \left( \frac{d}{dr} B(r) \right) r + B(r)^2 - B(r) \right)}{r^2 B(r)^2}, 0, \right. \right. \right. \\
 \left. \left. \left. 0, 0, \right. \right. \right. \\
 \left. \left. \left[ 0, \frac{-\left( \frac{d}{dr} A(r) \right) r + A(r) B(r) - A(r)}{A(r) r^2}, 0, 0, \right. \right. \right. \\
 \left. \left. \left. \left[ 0, 0, \frac{1}{4} \frac{1}{B(r)^2 A(r)^2} \left( r \left( 2 \left( \frac{d}{dr} B(r) \right) A(r)^2 - 2 \left( \frac{d}{dr} A(r) \right) B(r) A(r) \right) \right) \right. \right. \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & 0, 0, \\
 & \left[ 0, \frac{-\left(\frac{d}{dr} A(r)\right) r + A(r) B(r) - A(r)}{A(r) r^2}, 0, 0 \right], \\
 & \left[ 0, 0, \frac{1}{4} \frac{1}{B(r)^2 A(r)^2} \left( r \left( 2 \left( \frac{d}{dr} B(r) \right) A(r)^2 - 2 \left( \frac{d}{dr} A(r) \right) B(r) A(r) \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - 2 r \left( \frac{d^2}{dr^2} A(r) \right) A(r) B(r) + r \left( \frac{d}{dr} A(r) \right)^2 B(r) + r \left( \frac{d}{dr} A(r) \right) \left( \frac{d}{dr} B(r) \right) A(r) \right) \right), \right. \\
 & \left. 0 \right] \\
 & \left[ 0, 0, 0, -\frac{1}{4} \frac{1}{B(r)^2 A(r)^2} \left( r \left( 2 \left( \frac{d}{dr} A(r) \right) B(r) A(r) \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - 2 A(r) \left( \frac{d}{dr} A(r) \right) B(r) \cos(\theta)^2 - 2 \left( \frac{d}{dr} B(r) \right) A(r)^2 + 2 \left( \frac{d}{dr} B(r) \right) A(r)^2 \cos(\theta)^2 \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + 2 r \left( \frac{d^2}{dr^2} A(r) \right) A(r) B(r) - 2 r \left( \frac{d^2}{dr^2} A(r) \right) A(r) B(r) \cos(\theta)^2 - r \left( \frac{d}{dr} A(r) \right)^2 B(r) \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + r \left( \frac{d}{dr} A(r) \right)^2 B(r) \cos(\theta)^2 - r \left( \frac{d}{dr} A(r) \right) \left( \frac{d}{dr} B(r) \right) A(r) \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + r \left( \frac{d}{dr} A(r) \right) \left( \frac{d}{dr} B(r) \right) A(r) \cos(\theta)^2 \right) \right) \right] \right] \right]
 \end{aligned}
 \tag{2.11}$$

Berechnung des infinitesimalen Weglängenelements  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx^\mu dx_\mu$ :

```

> dx:=create([1], array([dt,dr,dtheta,dphi]));
ds2:=get_compts(prod(dx,lower(g,dx,1),[1,1]));
ds2:=collect(simplify(ds2), [dt,dr,dtheta,dphi]);
    
```

$$ds2 := dt^2 A(r) - dr^2 B(r) - dtheta^2 r^2 + (r^2 \cos(\theta)^2 - r^2) dphi^2
 \tag{2.12}$$

Definition der kovarianten Raumzeit-Metrik eines schwarzen Lochs der Masse  $M$  in Schwarzschildkoordinaten:

```
> coord := [t, r, theta, phi];
   g_compts := array(symmetric, sparse, 1..4, 1..4):
   g_compts[1,1] := 1-2*M/r: g_compts[2,2] := -1/g_compts[1,1]:
   g_compts[3,3] := -r^2: g_compts[4,4] := -r^2*sin(theta)^2:
   g := create( [-1, -1], eval(g_compts));
```

$$g := \text{create} \left( \begin{array}{c} [-1, -1], \\ \left( \begin{array}{cccc} 1 - \frac{2M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin(\theta)^2 \end{array} \right) \end{array} \right) \quad (4.1.1)$$

Berechnung des infinitesimalen Weglängenelements  $ds^2$ :

```
> dx:=create([1], array([dt,dr,dtheta,dphi])):
   ds2:=get_compts(prod(dx,lower(g,dx,1),[1,1])):
   ds2:=collect(simplify(ds2), [dt,dr,dtheta,dphi]):
```

# Allgemeine Relativitätstheorie einfach dargestellt

In autumn 2016, the series of video portraits of Hessian scientists was launched by the "Hessisches Kompetenzzentrum für Hochleistungsrechnen". The video portrait by Prof. Dr. Luciano Rezzolla can be found on the following link:

[https://www.hpc-hessen.de/fileadmin/hpc/red/video/hkhlr\\_ffm\\_rezzolla-1.mp4](https://www.hpc-hessen.de/fileadmin/hpc/red/video/hkhlr_ffm_rezzolla-1.mp4)

Public lectures have been a matter for the Polytechnic Society in Frankfurt for almost 200 years. In the lecture series "Discovering the Future" Prof. Dr. H. Stöcker spoke about Neutronenstern Kollisionen. The presentation can be found on the following link:

<https://www.youtube.com/embed/gSPfTTTR3Io>

# Upcomming events: Allgemeine Relativitätstheorie einfach dargestellt

14. Mai 2018: Vortrag in der Denkbar  
[www.denkbar-frankfurt.de](http://www.denkbar-frankfurt.de)

## Allgemeine Relativitätstheorie Einsteins schönster Geniestreich auf dem Prüfstand

Als Albert Einstein im Jahre 1915 die Allgemeine Relativitätstheorie (ART) an der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften vorstellte, glaubten noch wenige Physiker an seine neue, revolutionäre Theorie. Die ART besagt, dass die Ursache der Gravitationskraft in einer Verformung der raumzeitlichen Struktur begründet ist und heutzutage bezeichnen viele Physiker Einsteins mathematisch elegant formulierte Idee als "die schönste Gleichung der Physik". Während einer Sonnenfinsternis im Jahre 1919 gelang es die Ablenkung von Licht in der gekrümmten Raumzeit der Sonnenumgebung zu beobachten und Einstein wurde schlagartig berühmt. Weitere Vorhersagen der ART konnten in den folgenden Jahrzehnten überprüft und bestätigt werden, wobei eine der grundlegenden Folgerungen der ART, die Existenz von Raumzeit-Wellen (Gravitationswellen), lange Zeit nicht direkt nachgewiesen werden konnte. Schließlich, im Jahre 2015 konnte die erste Raumzeit-Welle mittels zweier hochempfindlicher Gravitationswellendetektoren nachgewiesen werden und im Jahre 2017 wurde diese Sensation mit dem Nobelpreis für Physik geehrt. Die grundlegenden Konzepte und Folgerungen der ART sollen in diesem Vortrag in allgemeinverständlicher, unterhaltsamer Weise illustriert werden. So werden z.B. die einzelnen Phasen einer Gravitationswellen erzeugende Neutronensterne-Kollision anhand eines Sammelsuriums einzelner Gesellschaftstänze veranschaulicht und die Eigenschaften von schwarzen Löchern mittels des Reichstagsgebäudes illustriert.

08. Juni 2018: Night of Science 2018  
Tanz der Neutronensterne