Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

ZOOM ONLINE MEETING
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
23. APRIL, 2021

Aufgrund der Corona Krise findet die Vorlesung und die Übungstermine auch in diesem Semester nur Online statt.

MATTHIAS HANAUSKE

FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK
D-60438 FRANKFURT AM MAIN
GERMANY

2. Vorlesung

Allgemeines zur Vorlesung

- Ort und Zeit:
  Nur Online/Virtuell
  Live-Streaming (synchrone Lehrangebote, Zoom Meetings):
  Freitags von 15.00-17.00 Uhr: Vorlesungstermine
  Übungstermin 1: Freitags von 13.30-15.00 Uhr
  Übungstermin 2: Freitags von 17.00-18.30 Uhr

- Vorlesungs-Materialien (asynchronen Lehrangebote):
  http://th.physik.uni-frankfurt.de/~hanauske/VARTC/ bzw.
  http://th.physik.uni-frankfurt.de/~hanauske/VARTC/ VART2021.html

- Übungsaufgaben auf der Online-Lernplatform Lon Capa:
  http://lon-capa.server.uni-frankfurt.de/

- Weitere Materialien auf der Online-Lernplatform OLAT
  http://olat.server.uni-frankfurt.de

- Generelles zur Vorlesung:
  Bei erfolgreicher Teilnahme 5 Creditpoints
  Benoteter Schein mittels einer mündlichen Prüfung (30 Min.)

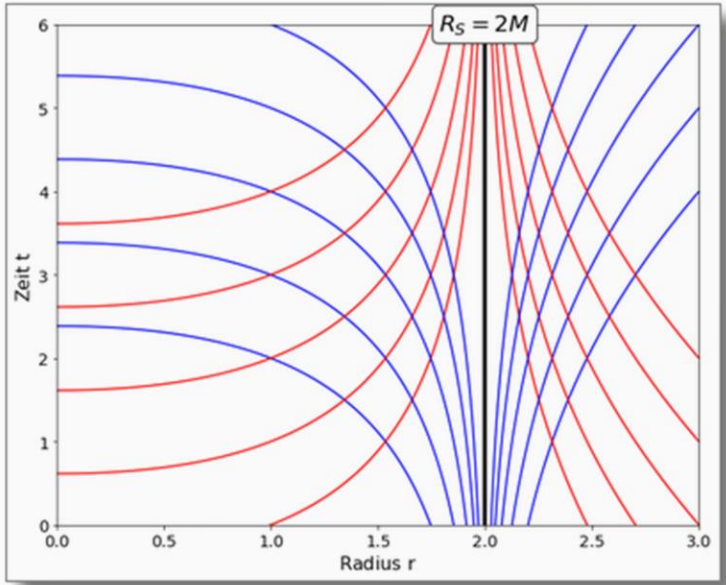
- Voraussetzungen:
  Laptop/PC mit Kamera und Ton
  Programmierkenntnisse von Vorteil

2. Vorlesung

Vorlesung 2

Die Schwarzschild-Metrik beschreibt das raumzeitliche Verhalten eines kugelsymmetrischen, nicht rotierenden und nicht geladenen schwarzen Loches der Masse M, wobei die gesamte Masse des schwarzen Loches in einem singulären Punkt im Zentrum vereint ist. Der Ricci Tensor verschwindet identisch ($R_{\mu\nu} \equiv 0$), da man eine leere Raumzeit betrachtet. Die skalare Invariante des vollständig kontrahierten Quadrates des Riemannschen Krümmungstensors $K = R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}$, der sogenannte Kretschmann-Skalar K, wird im Ursprung singulär ($K = \frac{48\,M^2}{r^6}$) und die Schwarzschild-Metrik besitzt daher eine echte Singularität bei $r = 0$. Neben dieser echten Singularität besitzt die Schwarzschild-Metrik eine Koordinatensingularität bei dem sogenannten Schwarzschild-Radius $R_S = 2M$. Im ersten Jupyter Notebook werden wir die wesentlichen Eigenschaften der Schwarzschild-Metrik mittels eingebetteter Diagramme und anhand von Raumzeit-Diagrammen visualisieren. Im zweiten Jupyter Notebook werden wir den radialen Fall eines Probekörpers in ein schwarzes Loch nummerisch berechnen.

Eigenschaften der Schwarzschild-Metrik



Die Struktur der Raumzeit der Schwarzschild-Metrik kann man auf unterschiedliche Weisen visualisieren. Wir betrachten uns zunächst die sogenannten eingebetteten Diagramme der räumlichen Hypersphäre Σ_t der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$. Diese eingebetteten Diagramme besitzen eine Tricher-Form und zeigen eine Koordinatensingularität bei dem sogenannten Schwarzschild-Radius $R_S = 2M$. Zusätzlich zu diesen Diagrammen werden in dem Jupyter Notebook (Eigenschaften der Schwarzschild-Metrik) die Raumzeit-Diagramme der Schwarzschild-Metrik in Schwarzschild-Koordinaten und Eddington-Finkelstein Koordinaten betrachtet. Die nebenstehende Abbildung zeigt das Raumzeit-Diagramm der Schwarzschild-Metrik ($M = 1$) und beschreibt somit das raumzeitliche Verhalten eines kugelsymmetrischen schwarzen Loches aus dem Betrachtungsstandpunkt eines im Unendlichen ruhenden Beobachters (Schwarzschild-Koordinaten). Die roten Kurven

Vorlesung 2

In der zweiten Vorlesung werden wir die wohl bekannteste analytische Lösung der Einsteingleichung betrachten - die sogenannte *Schwarzschild-Lösung*. Bereits einige Monate nach der Publikation von Einsteins Artikel zur Allgemeinen Relativitätstheorie im Jahre 1915, erarbeitete Karl Schwarzschild in zwei Arbeiten mögliche analytische Lösungen der neuen Theorie der Raumzeitkrümmung. In der ersten dieser Arbeiten ("über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie", siehe Schwarzschild, K., Sitzungsberichte der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften. Reimer, Berlin 1916, S. 189–196) betrachtete Herr Schwarzschild die Einstein-Gleichung für den freien, leeren Raum ($T_{\mu\nu} = 0 \quad \rightarrow \quad R_{\mu\nu} = 0$), wobei er annahm, dass sich die gesamte Materie/Energie in einem singulären Punkt im Ursprung befindet (Massenpunkt der Masse M). Die so von ihm gefundene Lösung der resultierenden Feldgleichungen ist heutzutage unter dem Namen *Schwarzschild-Metrik* bekannt und lautet:

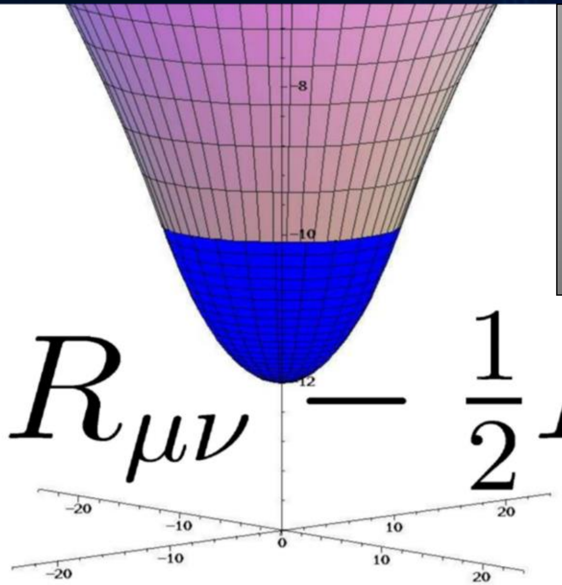
$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2\,M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1-\frac{2\,M}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

, wobei wir ein sphärisch symmetrisches Koordinatensystem benutzt wurde ($x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$). Diese Lösung ist von besonderer Bedeutung für astrophysikalische Betrachtungen, denn sie beschreibt einerseits die Metrik eines nicht-rotierenden schwarzen Lochs und andererseits,

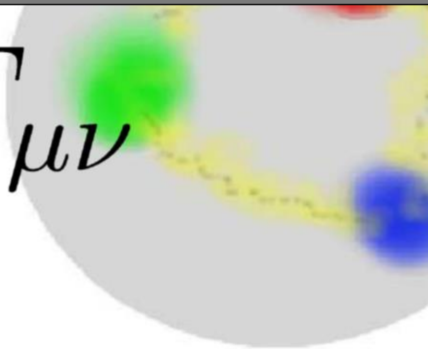
http://itp.uni-frankfurt/~hanauske/VARTC/

Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie

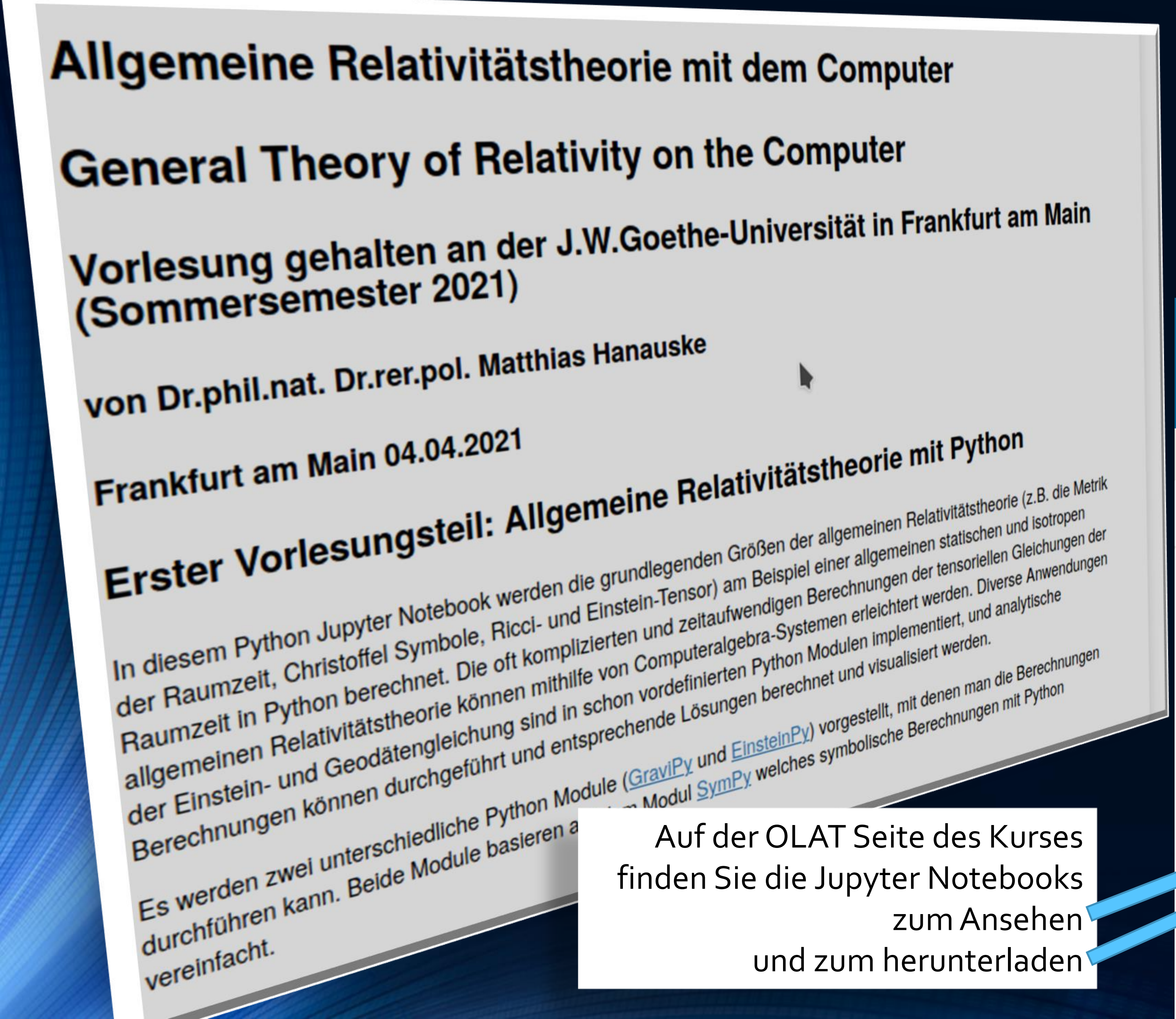
Vor etwa hundert Jahren (1915) stellte Albert Einstein seine „Allgemeine Relativitätstheorie“ (ART) der Öffentlichkeit vor.



$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R \, g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

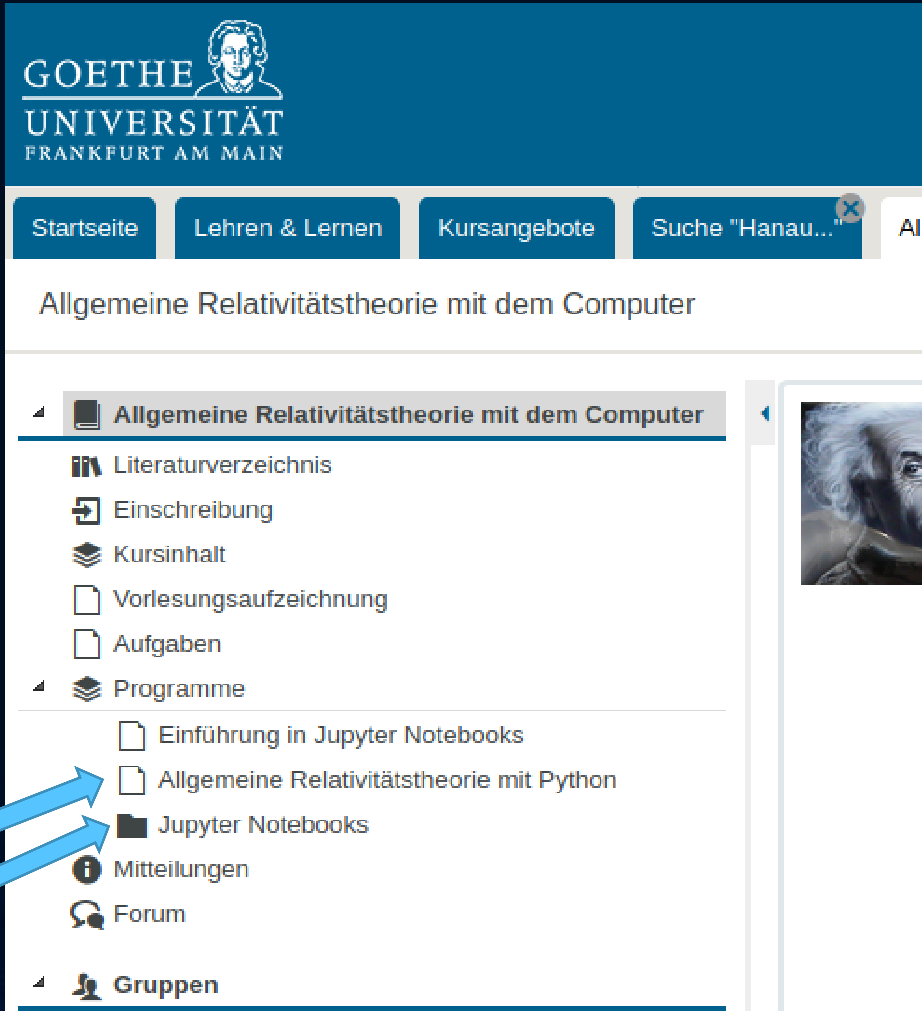


Die ART ist eine sehr revolutionäre Theorie. Sie besagt, dass jegliche Energieformen (z.B. Masse eines Körpers) die „Raumzeit“ verbiegen und durch diese Krümmung des Raumes und der Zeit die Gravitation (Schwerkraft) resultiert. -> Raumzeit-Krümmung = Energie



Jupyter Notebook

Allgemeine Relativitätstheorie mit Python



Auf der OLAT Seite des Kurses finden Sie die Jupyter Notebooks zum Ansehen und zum herunterladen

Die Schwarzschild Lösung

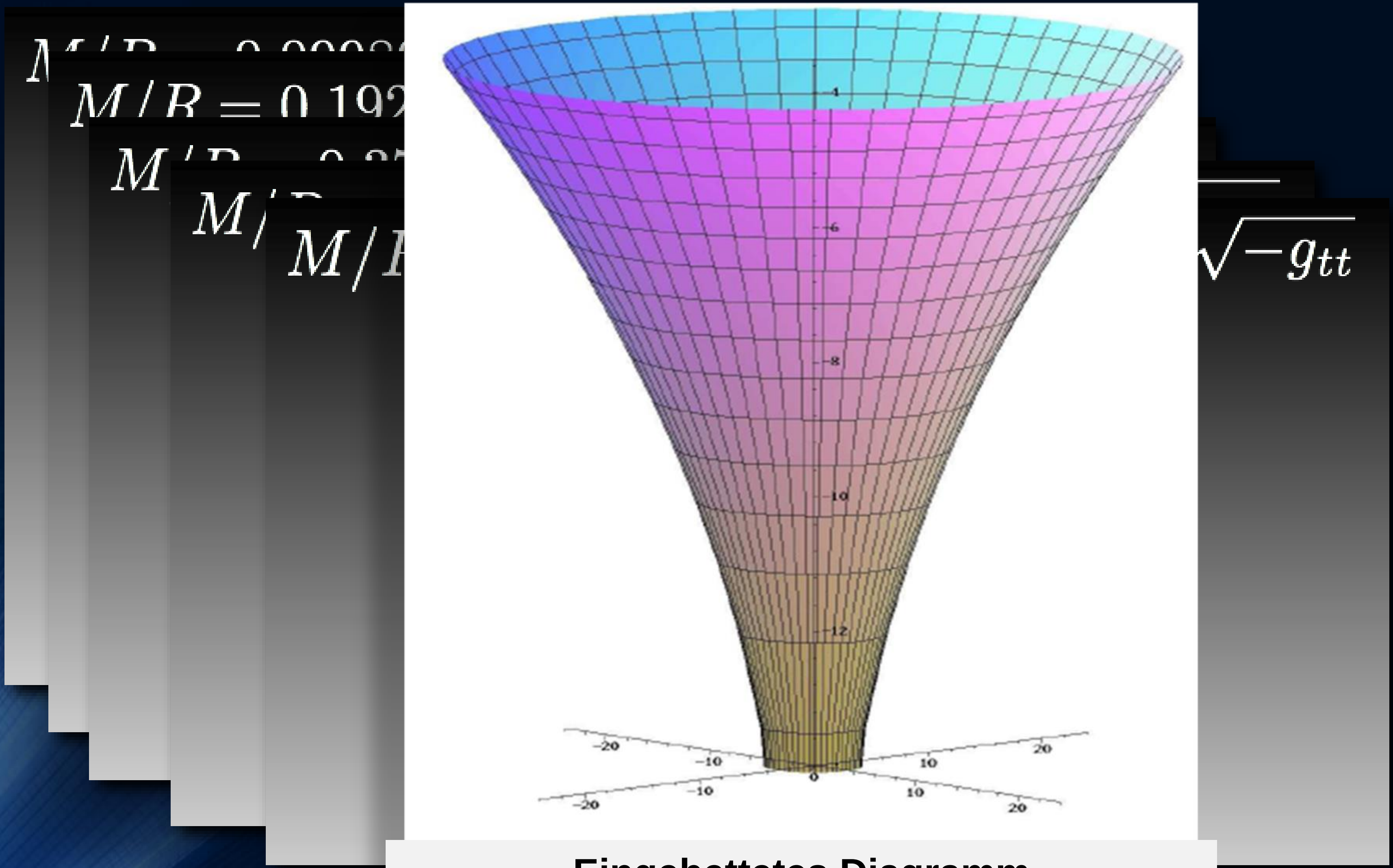
1915 Einsteins Gravitation:
Krümmung der „Raumzeit"

1916 Karl Schwarzschild:
… geboren 1873 in Frankfurt nahe dem Haus der Rothschild's. Erste Lösung der ART – drei Monate nach Einsteins Artikel! Aussenraummetrik eines nichtrotierenden schwarzen Loches.

Schwarzschild stirbt einen Monat später an einer Infektion die er sich an der russischen Front einfing…

Schwarze Löcher und der Raumzeit-Trichter

M: Masse des Objektes
R: Radius des Objektes
g_{tt}: Metrik der Raumzeit



Eingebettetes Diagramm
der räumlichen Hypersphäre der
Raumzeit-Struktur eines schwarzen Lochs

Wir sind über den Grenzwert gekommen und haben ein schwarzes Loch erzeugt!

Grenzwert der Krümmung … nd nicht mehr möglich

Herleitung der Schwarzschild Metrik

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{\nu(r,t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda(r,t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

$$ds^2 = c^2 e^{\nu(r,t)} dt^2 - e^{\lambda(r,t)} dr^2 - r^2 \left(\sin^2\theta d\phi^2 + d\theta^2\right) \quad (2.27)$$

Die Masse eines kugelsymmetrischen schwarzen Loches befindet sich (wie wir im folgenden sehen werden) konzentriert im Ursprun
so dass der gesamte Raum (ohne den Punkt $r = 0$)
Energieimpulstensor verschwindet demnach im Außenra
0, so dass sich die Einsteingleichung (Gl. 2.23) wie folgt

$$R^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} R\, g^{\mu\nu} = 8\pi\kappa T^{\mu\nu} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad R^{\mu\nu} = 0$$

Setzt man diesen sphärisch symmetrischen Ansatz der Metrik in die Einsteingleichung ein, so erkennt man das die Lösung zeitunabhängig sein muss (Birkhoff-Theorem).
Diese Lösung wird als Schwarzschild-metrik bezeichnet und sie hängt nur von einem Parameter, der Masse des schwarzen Loches, ab

Herleitung der Schwarzschild Metrik

wird als Schwarzschildradius bezeichnet

$$R_S = \frac{2G\,M}{c^2} \quad . \tag{2.36}$$

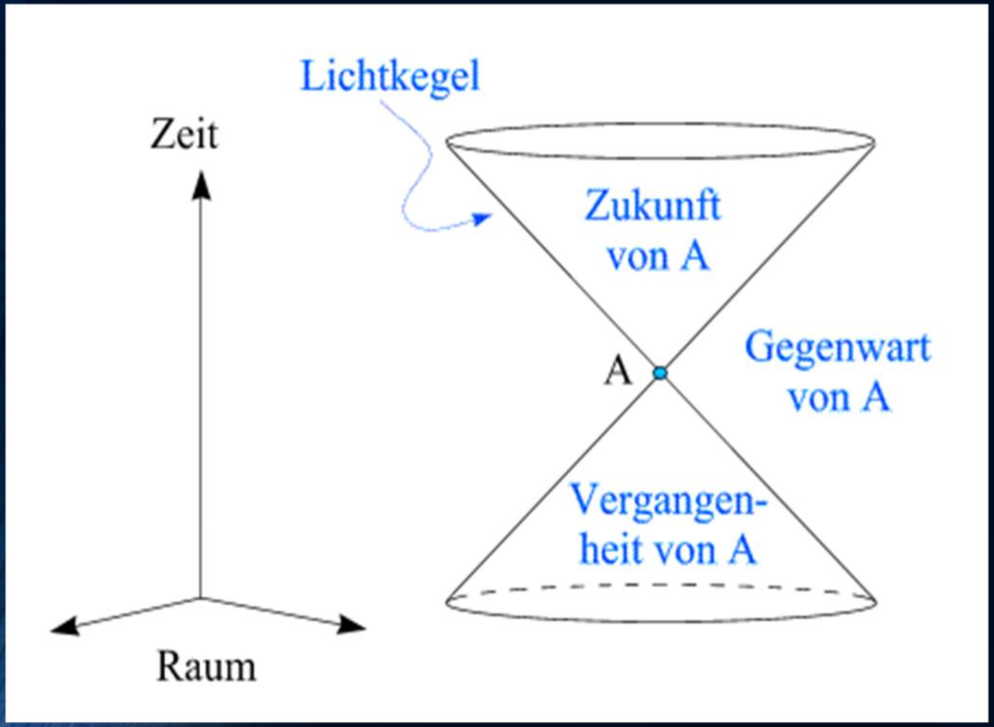
Die Schwarzschildmetrik und das zugehörige Weglängenelement nimmt nun die folgende Form an

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \left(1-\frac{R_S}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1-\frac{R_S}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{2.37}$$

$$ds^2 = c^2\left(1-\frac{R_S}{r}\right)dt^2 - \left(1-\frac{R_S}{r}\right)^{-1}dr^2 - r^2\left(\sin^2\theta d\phi^2 + d\theta^2\right) \; .$$

Raumzeit-Diagramm eines schwarzen Loches

Sichtweise ruhender Beobachter im Unendlichen



Raumzeit-Struktur
im flachen Raum

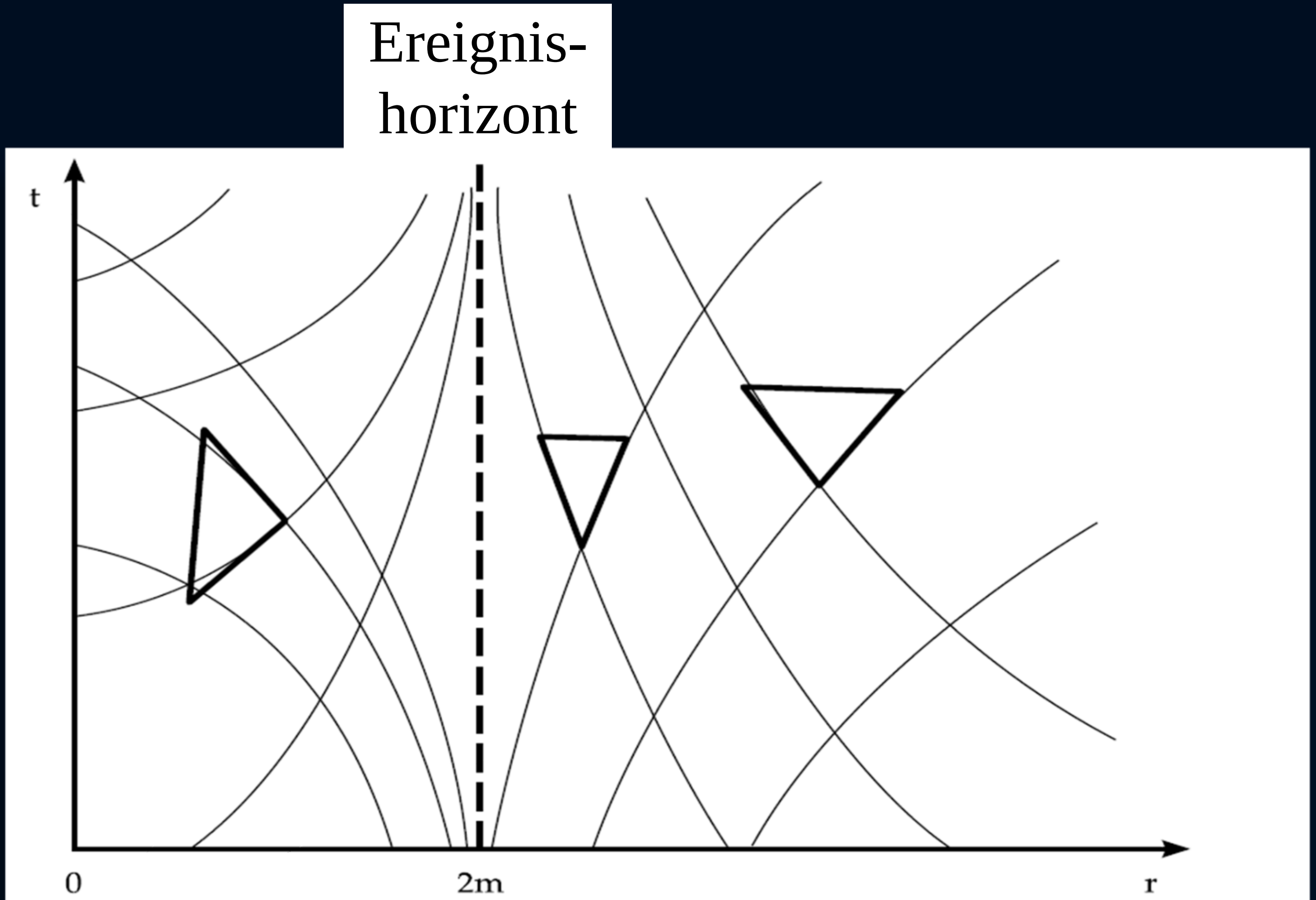


Abbildung 2.1: Raumzeitdiagramm der Schwarzschildmetrik in Schwarzschildkoordinaten.

Raumzeit-Struktur um ein schwarzes Loch

Raumzeit-Diagramm eines schwarzen Loches

Sichtweise eines in das schwarze Loch fallenden Beobachters

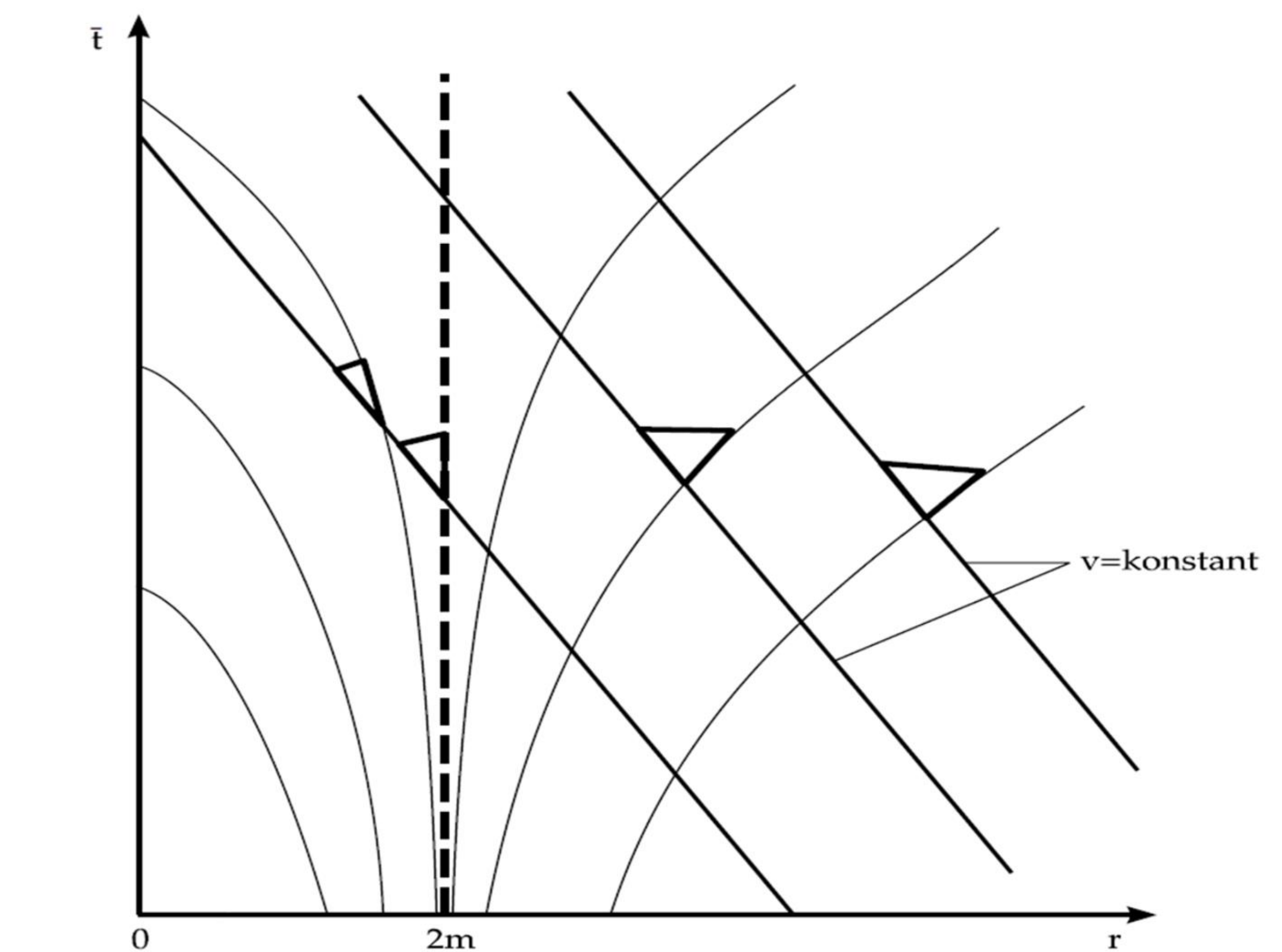
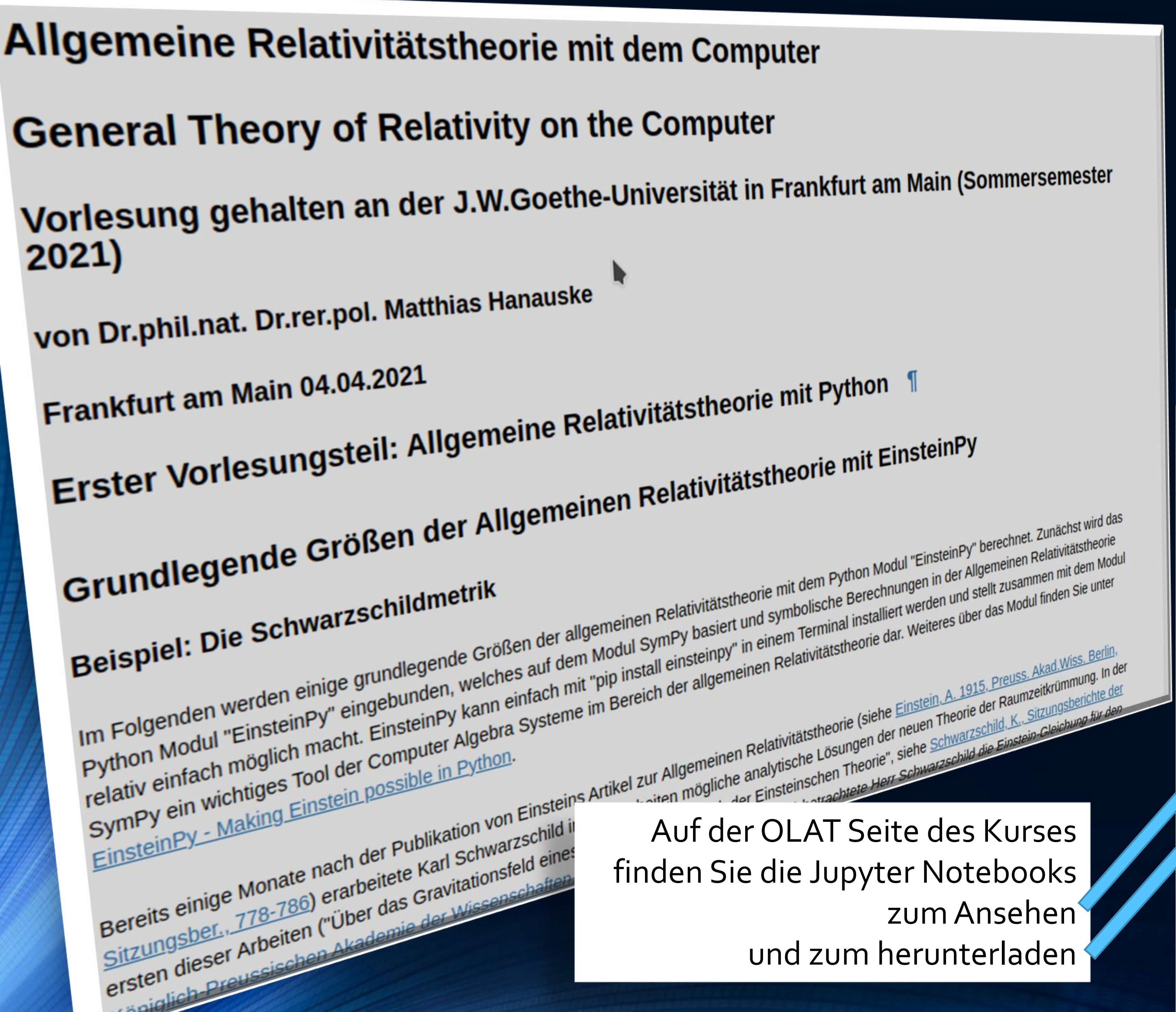


Abbildung 2.2: Raumzeitdiagramm der Schwarzschildmetrik in avancierten Eddington-Finkelstein Koordinaten.

Jupyter Notebook

Eigenschaften der Schwarzschild-Metrik


Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

General Theory of Relativity on the Computer

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main (Sommersemester 2021)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 04.04.2021

Erster Vorlesungsteil: Allgemeine Relativitätstheorie mit Python ¶

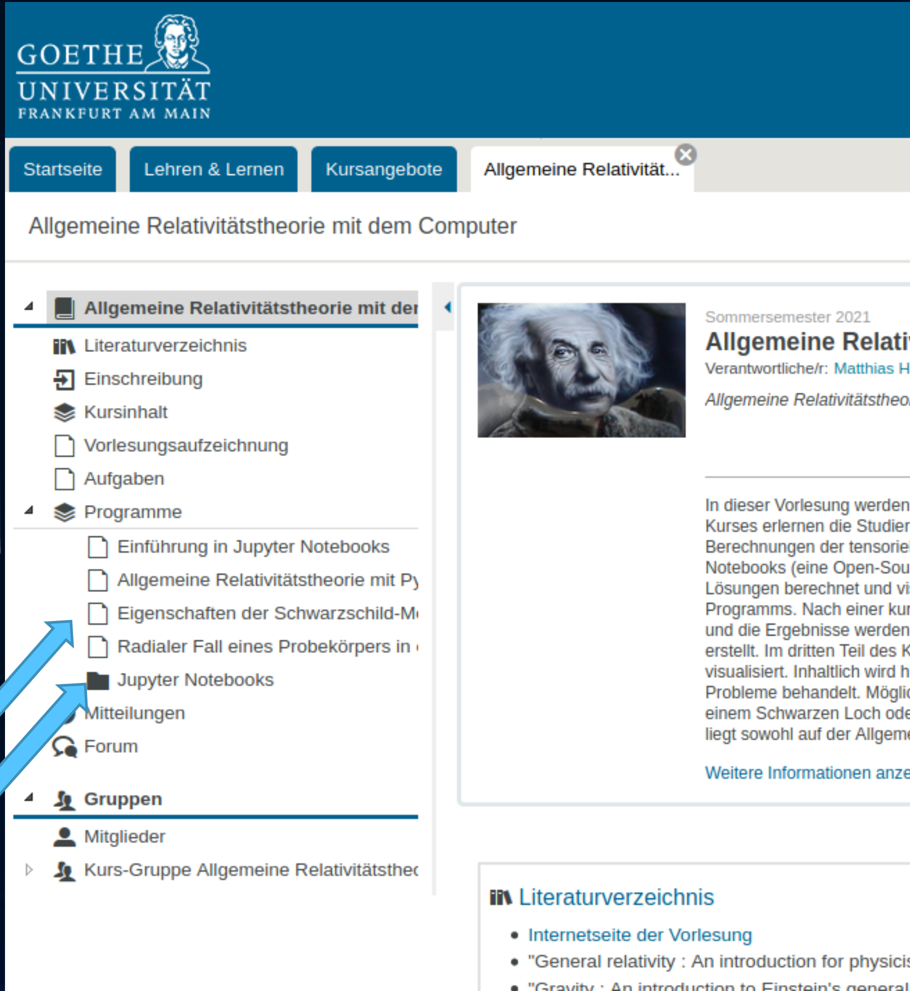
Grundlegende Größen der Allgemeinen Relativitätstheorie mit EinsteinPy

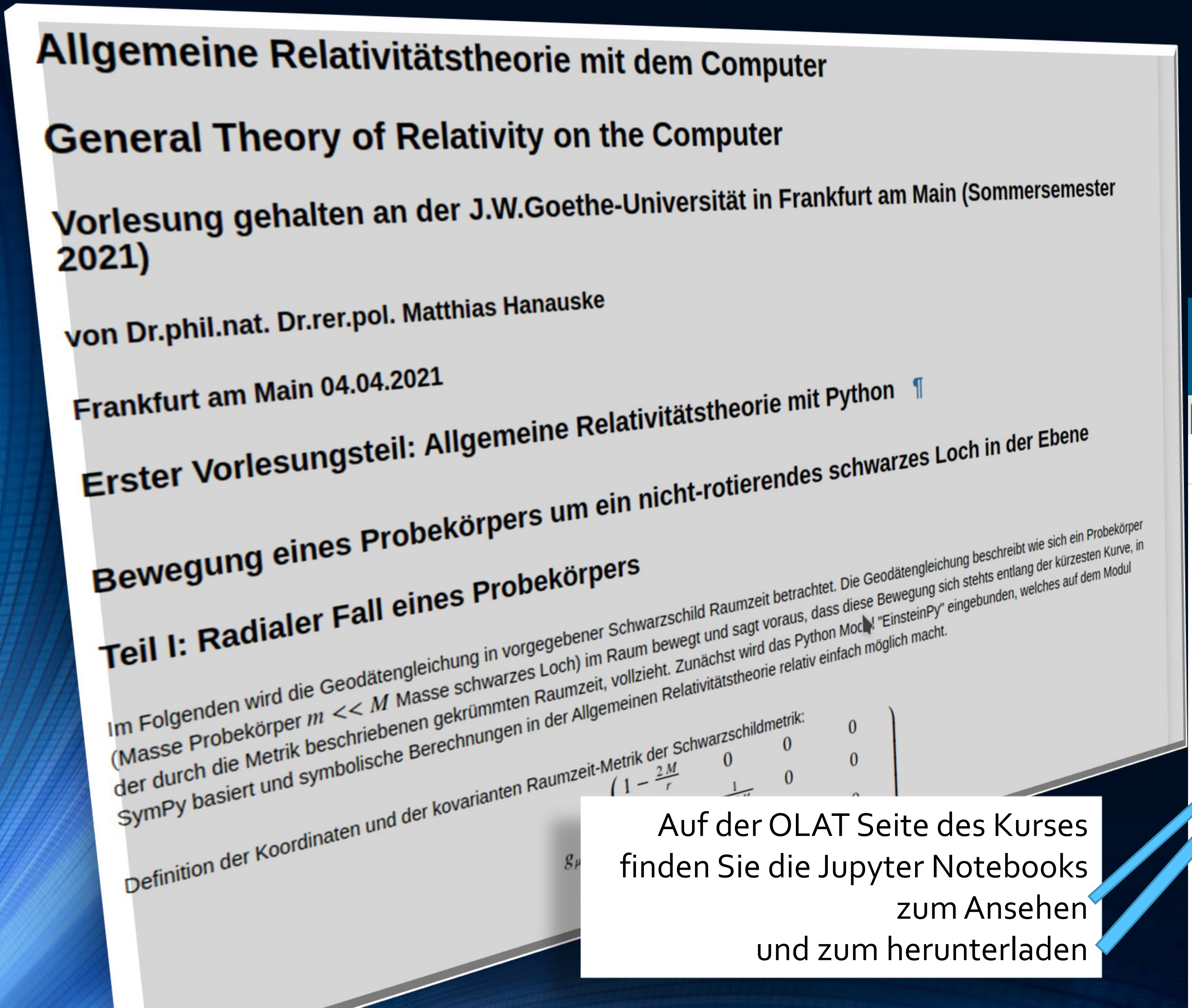
Beispiel: Die Schwarzschildmetrik

Im Folgenden werden einige grundlegende Größen der allgemeinen Relativitätstheorie mit dem Python Modul "EinsteinPy" berechnet. Zunächst wird das Python Modul "EinsteinPy" eingebunden, welches auf dem Modul SymPy basiert und symbolische Berechnungen in der Allgemeinen Relativitätstheorie relativ einfach möglich macht. EinsteinPy kann einfach mit "pip install einsteinpy" in einem Terminal installiert werden und stellt zusammen mit dem Modul SymPy ein wichtiges Tool der Computer Algebra Systeme im Bereich der allgemeinen Relativitätstheorie dar. Weiteres über das Modul finden Sie unter EinsteinPy - Making Einstein possible in Python.

Bereits einige Monate nach der Publikation von Einsteins Artikel zur Allgemeinen Relativitätstheorie (siehe Einstein, A. 1915, Preuss. Akad.Wiss. Berlin, Sitzungsber., 778-786) erarbeitete Karl Schwarzschild i… mögliche analytische Lösungen der neuen Theorie der Raumzeitkrümmung. In der ersten dieser Arbeiten ("Über das Gravitationsfeld eines … der Einsteinschen Theorie", siehe Schwarzschild, K., Sitzungsberichte der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften … betrachtete Herr Schwarzschild die Einstein-Gleichung für den

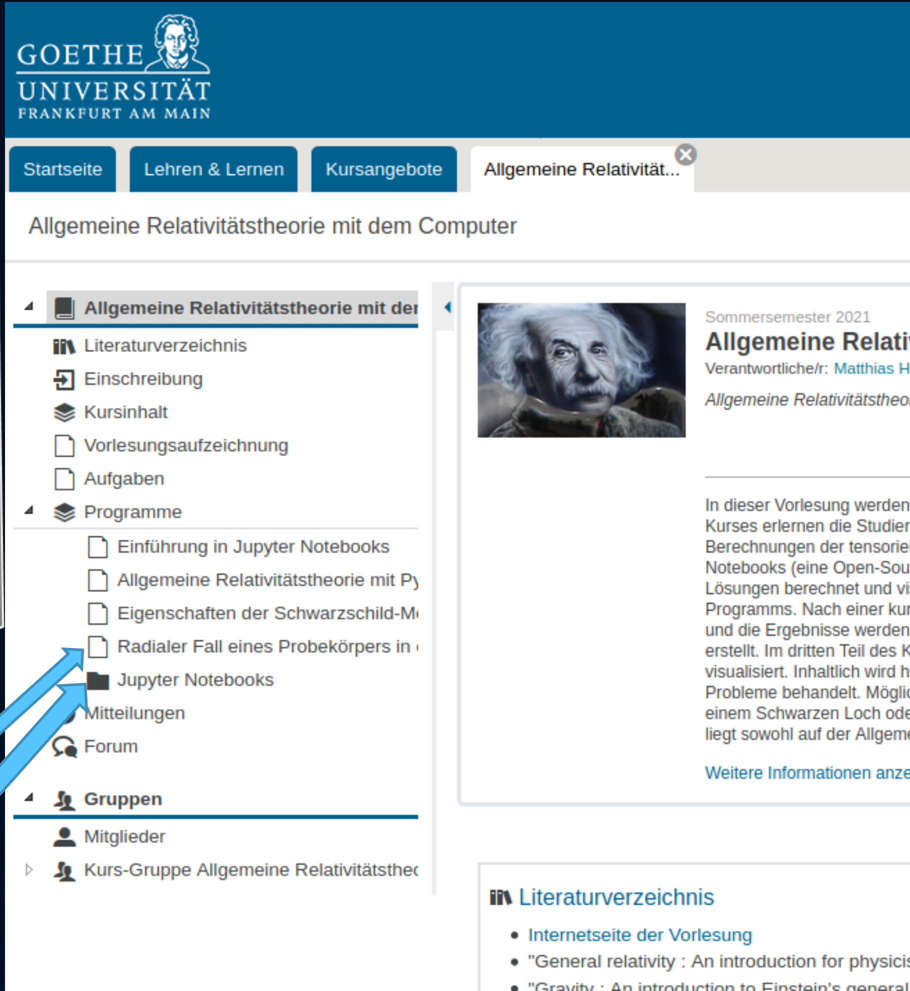
Auf der OLAT Seite des Kurses finden Sie die Jupyter Notebooks zum Ansehen und zum herunterladen





Jupyter Notebook

Radialer Fall eines Probekörpers in ein nicht-rotierendes Schwarzes Loch

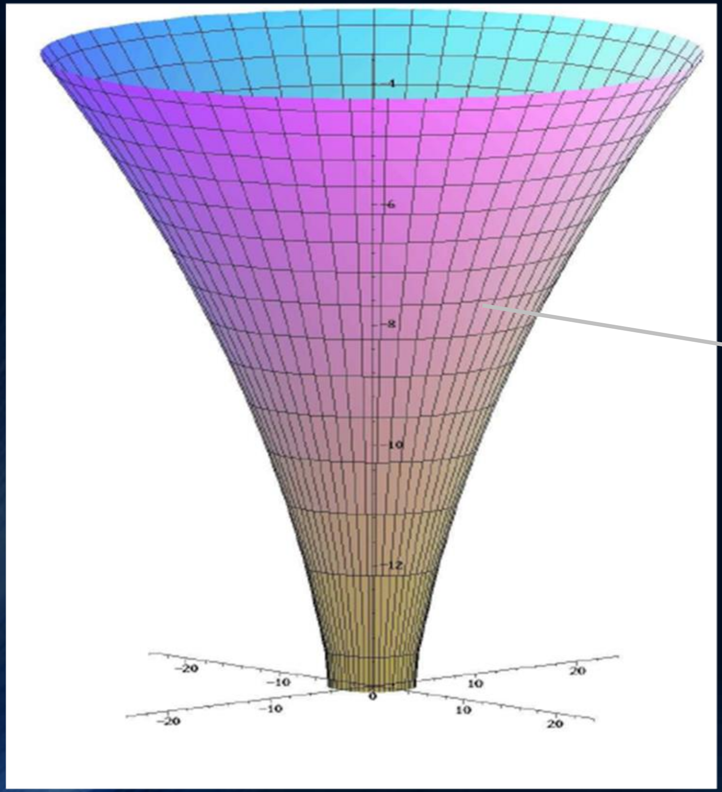


Auf der OLAT Seite des Kurses finden Sie die Jupyter Notebooks zum Ansehen und zum herunterladen

Das deutsche Parlamentsgebäude

(die wohl beste Veranschaulichung der wesentlichen Eigenschaften eines schwarzen Loches)

Der Raumzeit-Tricher
im Reichstagsgebäude



Das deutsche Parlamentsgebäude

(die wohl beste Veranschaulichung der wesentlichen Eigenschaften eines schwarzen Loches)

Ereignis-
horizont

Das deutsche Parlamentsgebäude

(die wohl beste Veranschaulichung der wesentlichen Eigenschaften eines schwarzen Loches)

Der Aufzug im Reichstagstagsgebäude befindet sich ca. bei $3/2 * R_S$

Weiteres siehe: http://th.physik.uni-frankfurt.de/~hanauske/new/LateralThougts.html

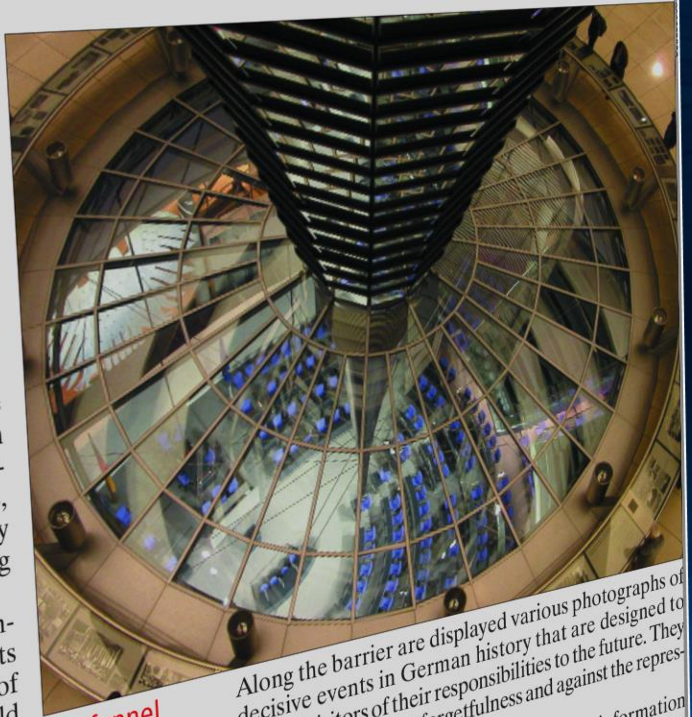
Black holes and the German Reichstag

One day a couple of years ago I was attending a meeting of the German Astronomical Society in Berlin, when I was gripped with an almost irrepressible sense of inner unrest. There was no other option – I simply had to leave the lecture halls of the Technical University and enjoy the gorgeous day outside. Before I left, however, I carefully taped my poster to the wall between the entrances to the men's and women's toilets, which seemed the perfect spot for it. Every congress delegate would now be forced – subliminally at least – to notice my creation.

After leaving the university buildings, I first soaked up the summer sunshine in the zoological gardens before heading towards the Reichstag – the home of the German parliament. As I did so, my thoughts wandered off in a different direction. What a waste of time, it occurred to me, all those boring lectures are. What physics desperately needs, I reasoned, is a new and exciting way of presenting the subject.

Unfortunately, modern physics is impossible to comprehend using intuition alone. How can bizarre concepts such as the curvature of space–time or the event horizon of a black hole be understood? What possible imagery could help non-scientists to grasp the significance and vital importance of some of the major insights of theoretical physics? Finding a simple way of conveying those ideas …med an impossible task.

…hought, I looked up and realized I had almost …l destination as the modern glass dome …e of the Reichstag building …ome more closely, I …ide. To my



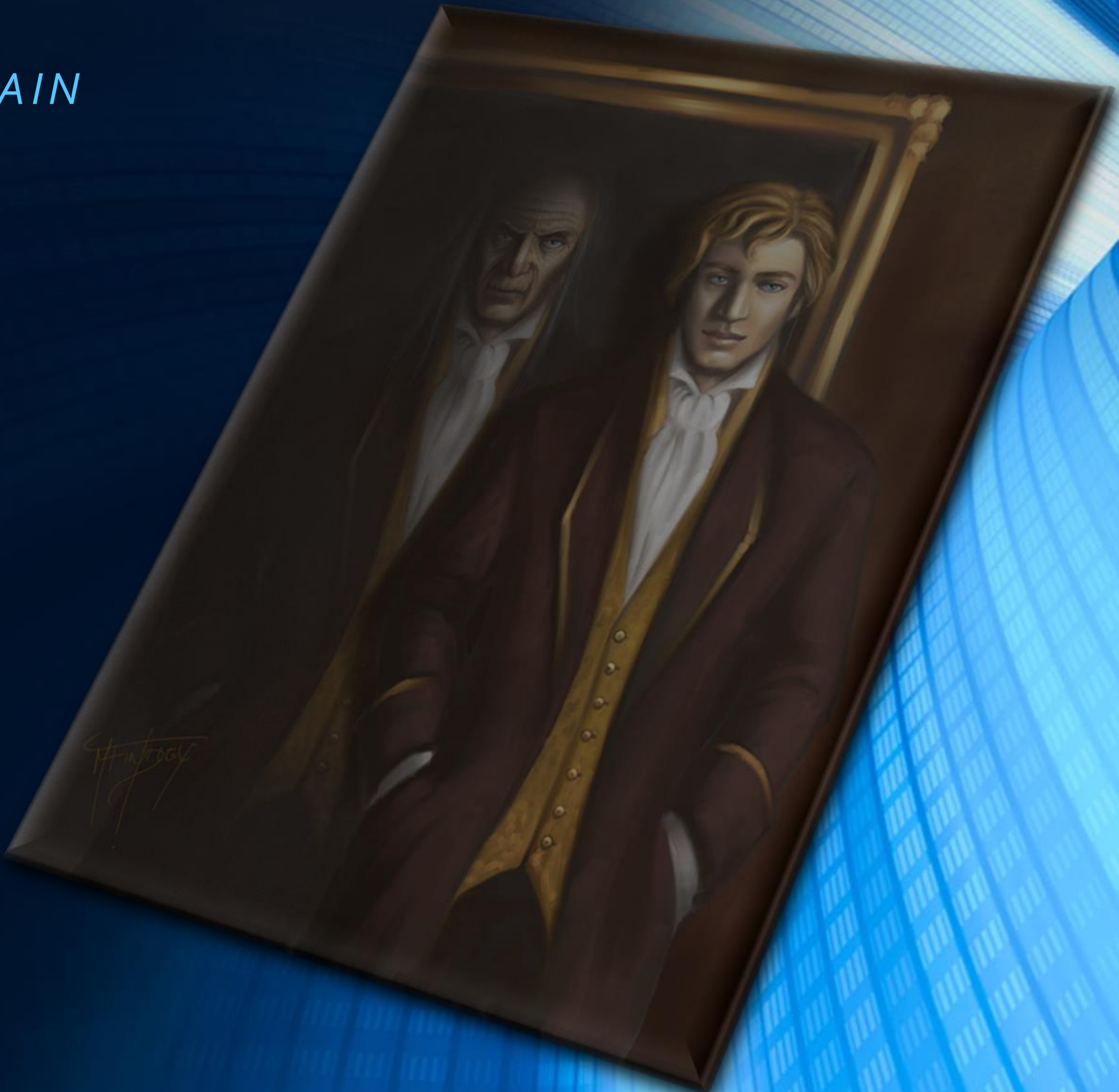
The funnel looks exactly like the diagrams used to illustrate the curvature of a black hole

Along the barrier are displayed various photographs of decisive events in German history that are designed to remind visitors of their responsibilities to the future. They are a warning against forgetfulness and against the repression of the Nazi era.

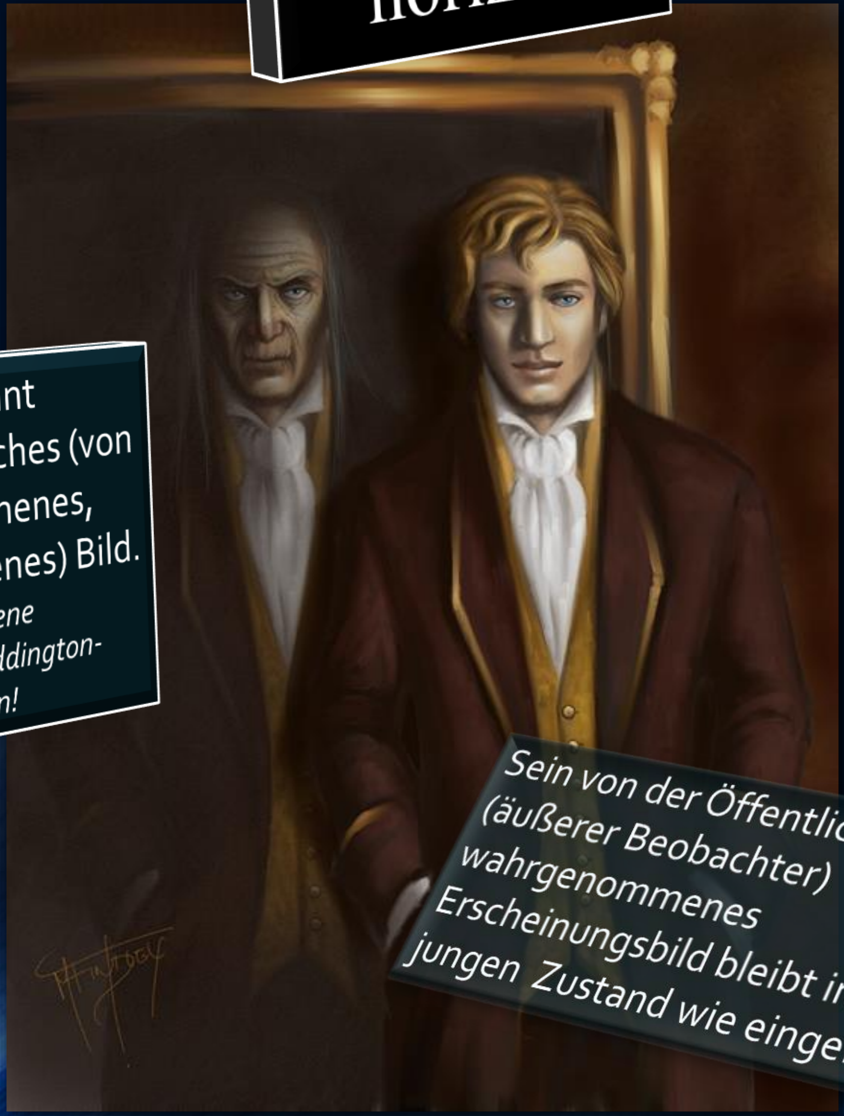
Suddenly I saw the significance of the information frozen on the pictures. Just as the politicians sit in the inner area of the black hole from which no useful information ever escapes, so the pictures represent external

Das Bildnis des schwarzen Lochs

ASTRONOMIE AM FREITAG (7. APRIL 2017)
IM PHYSIKALISCHEN VEREIN IN FRANKFURT AM MAIN



Ereignis-
horizont

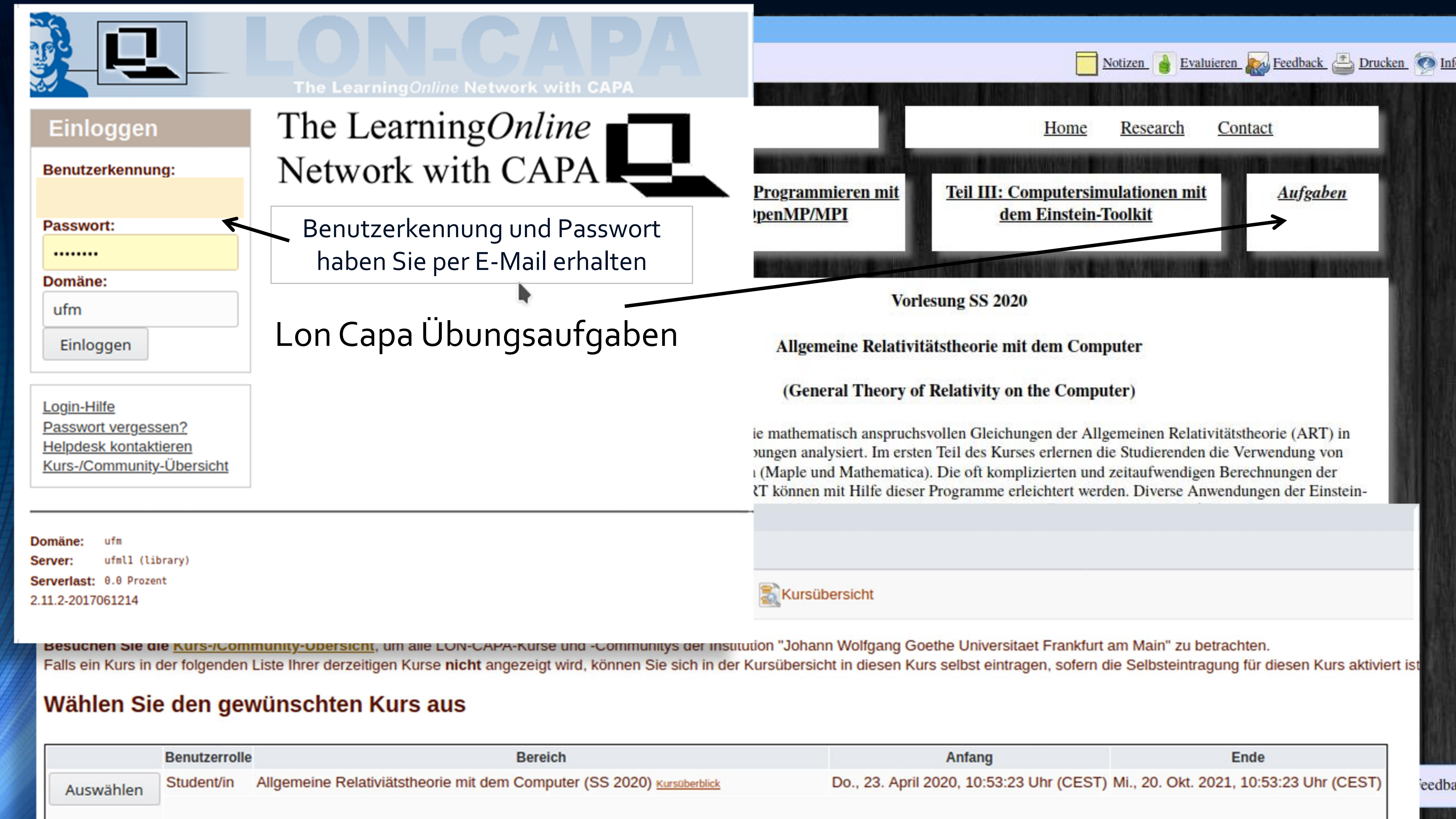


Im Spiegel erscheint jedoch sein wirkliches (von ihm wahrgenommenes, moralisch verfallenes) Bild.
Transformation ins eigene Koordinatensystem, Eddington-Finkelstein Koordinaten!

Sein von der Öffentlichkeit (äußerer Beobachter) wahrgenommenes Erscheinungsbild bleibt im jungen Zustand wie eingefroren.

Für den äußeren Beobachter friert das Bild des Körpers, der in das schwarze Loch fällt, am Ereignishorizont ein. Der Körper selbst übertritt jedoch die Grenze und fällt weiter in die echte Singularität im Ursprung.

Dorian Gray wird in das schwarze Loch der moralischen Abgründe gezogen und übertritt eine Grenze von der aus er nicht mehr zurück kann.


LON-CAPA
The LearningOnline Network with CAPA
Einloggen
Benutzerkennung:
Passwort:
Domäne:
ufm
Einloggen
Login-Hilfe
Passwort vergessen?
Helpdesk kontaktieren
Kurs-/Community-Übersicht
Domäne: ufm
Server: ufml1 (library)
Serverlast: 0.0 Prozent
2.11.2-2017061214
The LearningOnline Network with CAPA
Benutzerkennung und Passwort haben Sie per E-Mail erhalten
Lon Capa Übungsaufgaben
Notizen
Evaluieren
Feedback
Drucken
Home
Research
Contact
Teil III: Computersimulationen mit dem Einstein-Toolkit
Aufgaben
Vorlesung SS 2020
Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer
(General Theory of Relativity on the Computer)
Kursübersicht
Falls ein Kurs in der folgenden Liste Ihrer derzeitigen Kurse nicht angezeigt wird, können Sie sich in der Kursübersicht in diesen Kurs selbst eintragen, sofern die Selbsteintragung für diesen Kurs aktiviert ist
Wählen Sie den gewünschten Kurs aus
Benutzerrolle
Bereich
Anfang
Ende
Auswählen
Student/in
Allgemeine Relativiätstheorie mit dem Computer (SS 2020)
Kursüberblick
Do., 23. April 2020, 10:53:23 Uhr (CEST)
Mi., 20. Okt. 2021, 10:53:23 Uhr (CEST)

Lon Capa Übungsaufgaben

Aufgaben im Kurs allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

Aufgaben im Teil I: Analytische Berechnungen und numerische Simulationen in Maple

Berechnung von Christoffelsymbolen der Schwarzschild-Metrik

Berechnung des Riemann Tensors der Schwarzschild-Metrik

Probekörper fällt radial in ein nichtrotierendes schwarzes Loch

Geodätische Bewegung eines Probekörpers um ein nichtrotierendes schwarzes Loch

Radialer Wurf eines Probekörpers in der Nähe eines nichtrotierenden schwarzen Lochs

Berechnung eines Neutronensterns

Berechnung eines Weißen Zwergs

Die folgende Metrik beschreibt die raumzeitliche Struktur eines nichtrotierendes schwarzes Loch (Schwarzschildmetrik in Schwarzschildkoordinaten):

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \left(1-\frac{2M}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

Die griechischen, raumzeitlichen Indices μ, ν laufen von 0..3 und entsprechen den folgenden sphärischen Koordinaten: $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \phi)$. Berechnen Sie den Wert des Christoffelsymbols Γ^0_{01}, wobei die Masse M des schwarzen Loch und der radiale Abstand r den folgenden Werten entspricht:

M=15 , r=4.6

-0.128380691543992

Korrekt!
Ihre Nachweis-Nr. ist 163-3507 Bisherige Antworten

Die folgende Metrik beschreibt die raumzeitliche Struktur eines nichtrotierendes schwarzes Loch (Schwarzschildmetrik in Schwarzschildkoordinaten):

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

Die griechischen, raumzeitlichen Indices μ, ν laufen von 0..3 und entsprechen den folgenden sphärischen Koordinaten: $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \phi)$. Berechnen Sie den Wert des Riemann Tensors R_{0101}, wobei die Masse M des schwarzen Loch und der radiale Abstand r den folgenden Werten entspricht:

M=40 , r=4.9

Antwort einreichen Versuche 0/20

Die folgende Metrik beschreibt die homogene, isotrope zeitliche Entwicklung des Universums (Robertson-Walker Metrik):

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a(t)^2}{1-k\,r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

Die Funktion $a(t)$ bezeichnet den Skalenfaktor des Universums zur Zeit t und der Parameter k kennzeichnet den Krümmungsparameter des Universums. Die griechischen, raumzeitlichen Indices μ, ν laufen von 0..3 und entsprechen den folgenden sphärischen Koordinaten: $x^\mu = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) = (t, r, \theta, \phi)$. Berechnen Sie das Christoffelsymbols Γ^0_{11} und geben Sie an welcher der unten stehende Ausdrücke richtig ist:

- $\Gamma^0_{11} = \frac{k\,r}{1-k\,r^2}$
- $\Gamma^0_{11} = \frac{\frac{da(t)}{dt}}{1-k\,r^2}$
- $\Gamma^0_{11} = -\frac{a(t)}{1-k\,r^2}$
- $\Gamma^0_{11} = \frac{2\,a(t)\,\frac{da(t)}{dt}}{1-k\,r^2}$
- $\Gamma^0_{11} = \frac{a(t)\,\frac{da(t)}{dt}}{1-k\,r^2}$

Antwort einreichen Versuche 0/2

Die folgende Metrik beschreibt die homogene, isotrope zeitliche Entwicklung des Universums (Robertson-Walker Metrik):

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a(t)^2}{1-k\,r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

Die Funktion $a(t)$ bezeichnet den Skalenfaktor des Universums zur Zeit t und der Parameter k kennzeichnet den Krümmungsparameter des Universums. Die griechischen, raumzeitlichen Indices μ, ν laufen von 0..3 und entsprechen den folgenden sphärischen Koordinaten: $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \phi)$. Berechnen Sie die $(1,1)$-Komponente des Einsteintensors $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu}$ und geben Sie an welcher der unten stehende Ausdrücke richtig ist:

- $G_{11} = G_{rr} = -\frac{3\left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 + k}{(a(t))^2}$

- $G_{11} = G_{rr} = -\frac{4\,a(t)\,\frac{d^2a(t)}{dt^2} + \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 + k}{1-k\,r^2}$

- $G_{11} = G_{rr} = -\frac{2\,a(t)\,\frac{d^2a(t)}{dt^2} + 2\left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 + k}{1-k\,r^2}$

- $G_{11} = G_{rr} = \frac{2\,a(t)\,\frac{d^2a(t)}{dt^2} + \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 + k}{1-k\,r^2}$

- $G_{11} = G_{rr} = \frac{2\,a(t)\,\frac{d^2a(t)}{dt^2} + \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 + k}{1-k\,r^4}$

Die folgende Metrik beschreibt die homogene, isotrope zeitliche Entwicklung des Universums (Robertson-Walker Metrik):

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a(t)^2}{1-k\,r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

Die Funktion $a(t)$ bezeichnet den Skalenfaktor des Universums zur Zeit t und der Parameter k kennzeichnet den Krümmungsparameter des Universums. Die griechischen, raumzeitlichen Indices μ, ν laufen von 0..3 und entsprechen den folgenden sphärischen Koordinaten: $x^\mu = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) = (t, r, \theta, \phi)$. Berechnen Sie die $(0,0)$-Komponente des folgenden zusammengesetzten Tensors $Q^\mu{}_\nu = R^{\alpha\beta\gamma\mu} R_{\alpha\beta\gamma\nu} - \frac{1}{4}\, R^{\alpha\beta\gamma\lambda} R_{\alpha\beta\gamma\lambda}\, g^\mu{}_\nu$ und geben Sie an welcher der unten stehende Ausdrücke richtig ist:

- $Q^0{}_0 = Q^t{}_t = \dfrac{3\left(\left(a(t)\right)^4 \left(\frac{d^2 a(t)}{dt^2}\right)^2 - \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 - 2\,k \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 - k^2\right)}{\left(a(t)\right)^4}$

- $Q^0{}_0 = Q^t{}_t = \dfrac{3\left(\left(a(t)\right)^2 \left(\frac{d^2 a(t)}{dt^2}\right)^2 - \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^4 - 2\,k \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 - k^2\right)}{\left(a(t)\right)^4}$

- $Q^0{}_0 = Q^t{}_t = \dfrac{2\left(\left(a(t)\right)^2 \left(\frac{d^2 a(t)}{dt^2}\right)^2 - \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^4 - 4\,k \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 - k^2\right)}{\left(a(t)\right)^4}$

- $Q^0{}_0 = Q^t{}_t = \dfrac{3\left(\left(a(t)\right)^2 \left(\frac{d^2 a(t)}{dt^2}\right)^2 - \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^4 - 2\,k \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 - k^2\right)}{1 - k\,r^2}$