

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

*PC-POOL RAUM 01.120
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
10. MAY, 2019*

MATTHIAS HANAUSKE

*FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK
D-60438 FRANKFURT AM MAIN
GERMANY*

3. Vorlesung

Allgemeines zur Vorlesung

- Ort und Zeit:
PC-Pool Raum 01.120, immer freitags von 15.00 bis 17.00 Uhr
- Übungstermine:
Zusätzlich zur Vorlesung werden ab dem 03.05.2019 freiwillige Übungstermine eingerichtet, die jeweils freitags, eine Stunde vor der Vorlesung im PC-Pool 01.120 stattfinden (Fr. 14-15.00 Uhr).
- Vorlesungs-Materialien:
<http://th.physik.uni-frankfurt.de/~harauske/VARTC/>
- Kurs auf der Online-Lernplattform Lon Capa:
<http://lon-capa.server.uni-frankfurt.de/>
- Plan für die heutige Vorlesung:
Geodätengleichung in der Schwarzschild-Raumzeit für unterschiedliche Anfangsbedingungen eines Probekörpers mit Maple lösen, Kurze Wiederholung der letzten Vorlesung, Geodätengleichung in der Schwarzschild-Raumzeit für unterschiedliche Anfangsbedingungen eines Probekörpers mit Maple lösen, Klassifizierung der möglichen unterschiedlichen Bahnbewegungen mittels eines effektiven Potentials

Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. [Matthias Hanauske](#)

[Home](#) [Research](#) [Contact](#)

[Einführung](#)

[Teil I: Analytische Berechnungen und numerische Simulationen in Maple](#)

[Teil II: Paralleles Programmieren mit C++ und OpenMP/MPI](#)

[Teil III: Computersimulationen mit dem Einstein-Toolkit](#)

[Aufgaben](#)

Aufgaben im Kurs allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

Aufgaben im Teil I: Analytische Berechnungen und numerische Simulationen in Maple

[Berechnung von Christoffelsymbolen der Schwarzschild-Metrik](#)

[Berechnung des Riemann Tensors der Schwarzschild-Metrik](#)

[Probekörper fällt radial in ein nichtrotierendes schwarzes Loch](#)

[Geodätische Bewegung eines Probekörpers um ein nichtrotierendes schwarzes Loch](#)

[Radialer Wurf eines Probekörpers in der Nähe eines nichtrotierenden schwarzen Lochs](#)

[Berechnung eines Neutronensterns](#)

[Berechnung eines Weißen Zwergs](#)

Die Bewegung eines Probekörpers um ein nichtrotierendes schwarzes Loch wird mittels der Geodätengleichung beschrieben:

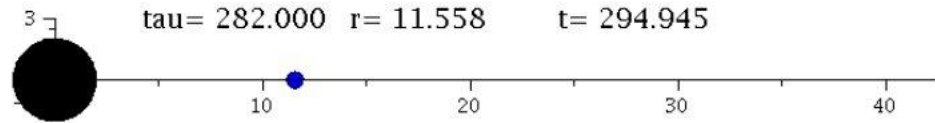
$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^0 \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}$$

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^1 \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}$$

$$\frac{d^2 \theta}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^2 \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}$$

$$\frac{d^2 \phi}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^3 \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}$$



wobei τ ein affiner Parameter (z.B. die Eigenzeit), t , r , θ und ϕ die Schwarzschildkoordinaten und $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ die Christoffel Symbole zweiter Art darstellen. Lösen Sie, unter Verwendung des Computeralgebra-Systems Maple, die Geodätengleichung eines radial in ein schwarzes Loch einfallenden Probekörpers. Verwenden Sie die folgenden Anfangsbedingungen: Zur Eigenzeit $\tau=0$ sei der Probekörper bei $r=50.5$, $\theta=0$ und $\phi=0$; die Anfangsgeschwindigkeiten seien: $\frac{dr}{d\tau}=0$, $\frac{d\theta}{d\tau}=0$, $\frac{d\phi}{d\tau}=0$ und die Masse des schwarzen Lochs betrage $M=1$. Berechnen Sie wo sich der Probekörper bei $\tau = 300 \approx 1$ [ms] befindet und geben Sie den Radius $r(300)$ in [km] an.

Erster Vorlesungsteil: Allgemeine Relativitätstheorie mit Maple

2. Vorlesung

Einführung

Bewegung eines Probekörpers (Masse verschwindend klein gegenüber der Masse des schwarzen Lochs) um ein schwarzes Loch ist ein astrophysikalisch sehr relevantes Problem. Es gilt als so gut wie bestätigt, dass im Zentrum unserer Galaxie ein superschweres schwarzes Loch existiert und man verfolgt seit Jahrzehnten (siehe z.B. R.Genzel et.al.) die Bewegung einzelner sogenannter S-Sterne um dieses Zentrum. Neben diesen aktuellen Erkenntnissen, gilt die Perihel-Drehung des Merkur als ein, durch die allgemeine Relativitätstheorie verursachter, Effekt. Obwohl die Bewegung der Planeten unseres Sonnensystems um unser Zentralgestirn (die Sonne) ja sicherlich keine Bewegung um ein schwarzes Loch darstellt, können die Gleichungen der Planetenbewegungen in guter Approximation als solche beschrieben werden (siehe Birkov-Theorem).

Die Geodätengleichung in vorgegebener Schwarzschild Raumzeit

Im folgenden wird die Geodätengleichung in vorgegebener Schwarzschild Raumzeit betrachtet. Betrachten wir zwei unterschiedliche Raumzeitpunkte A und B und beschreiben die Bewegung eines Probekörpers von A nach B mittels einer parametrisierten Raumzeitkurve $x^\mu(\lambda)$; λ bezeichnet man als den affinen Parameter. Die Geodätengleichung beschreibt wie sich ein Probekörper (Masse = 0) im Raum bewegt und sagt voraus, dass diese Bewegung sich stets entlang der kürzesten Kurve, in der durch die Metrik beschriebenen gekrümmten Raumzeit, vollzieht.

$$\int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda \rightarrow \text{Extremal}$$

Mittels der Euler-Lagrange Gleichungen ($L = \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}$) gelangt man dann zur Geodätengleichung

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0 ,$$

wobei die $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ die Christoffel Symbole zweiter Art und λ ein affiner Parameter (z.B. die Eigenzeit) darstellen.

Radial in ein schwarzes Loch einfallender Probekörper

```
> restart;  
with(tensor);  
with(plots);  
with(plottools);
```

Definition der kovarianten Raumzeit-Metrik eines schwarzen Lochs der Masse M in Schwarzschildkoordinaten:

```
> coord := [t, r, theta, phi];  
g_coords := array(symmetric, sparse, 1..4, 1..4);
```

Die Geodätengleichung

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0$$

Maple Ausgabe bei festgelegter Schwarzschild-Raumzeit

$$\begin{aligned} \text{eqns} := & \left\{ \frac{d^2}{d\lambda^2} \tau(\lambda) - \frac{2M \left(\frac{d}{d\lambda} \tau(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right)}{r(-r+2M)} = 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} \phi(\lambda) \right. \\ & + \frac{2 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)}{r} + \frac{2 \cos(\theta) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)}{\sin(\theta)} = 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} \theta(\lambda) \\ & + \frac{2 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right)}{r} - \sin(\theta) \cos(\theta) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)^2 = 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} r(\lambda) \\ & - \frac{(-r+2M)M \left(\frac{d}{d\lambda} \tau(\lambda) \right)^2}{r^3} + \frac{M \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right)^2}{r(-r+2M)} + (-r+2M) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right)^2 + (\\ & \left. -r+2M) \sin(\theta)^2 \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)^2 = 0 \right\} \end{aligned}$$

wobei die $\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}$ die Christoffel Symbole zweiter Art und λ ein affiner Parameter (z.B. die Eigenzeit) darstellen.

Radial in ein schwarzes Loch einfallender Probekörper

```
> restart:
with( tensor ):
with(plots):
with(plottools):
```

Definition der kovarianten Raumzeit-Metrik eines schwarzen Lochs der Masse M in Schwarzschildkoordinaten:

```
> coord := [t, r, theta, phi]:
g_compts := array(symmetric,sparse, 1..4, 1..4):
g_compts[1,1] := 1-2*M/r: g_compts[2,2] := -1/g_compts[1,1]:
g_compts[3,3] := -r^2: g_compts[4,4] := -r^2*sin(theta)^2:
g := create( [-1,-1], eval(g_compts));
```

$$g := \text{table} \left(\begin{array}{c} \text{index_char} = [-1, -1], \text{compts} \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 - \frac{2M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{array} \right) \end{array} \right) \quad (2.1.1)$$

Berechnung der kontravarianten Metrik und der Christoffel Symbole:

```
> ginv := invert( g, 'detg' ):
D1g := d1metric( g, coord ):
D2g := d2metric( D1g, coord ):
Cf1 := Christoffel1( D1g ):
Cf2:= Christoffel2( ginv, Cf1 ):
```

Berechnung der Geodätengleichung als Funktion des affinen Parameters λ : Die Geodätengleichung ist ein System gekoppelter Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d^2 t}{d\lambda^2} &= -\Gamma_{\nu\rho}^0 \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \\ \frac{d^2 r}{d\lambda^2} &= -\Gamma_{\nu\rho}^1 \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \\ \frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} &= -\Gamma_{\nu\rho}^2 \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \\ \frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} &= -\Gamma_{\nu\rho}^3 \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \end{aligned} ,$$

wobei λ ein affiner Parameter (z.B. die Eigenzeit), t, r, θ und ϕ die Schwarzschildkoordinaten und $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ die Christoffel Symbole zweiter Art darstellen.

```
> eqns:=geodesic_eqns( coord, lambda, Cf2 );
```

$$\begin{aligned} eqns := & \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2}{d\lambda^2} t(\lambda) - \frac{2M}{r(-r+2M)} \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) &= 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} \phi(\lambda) \\ + \frac{2 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)}{r} + \frac{2 \cos(\theta) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)}{\sin(\theta)} &= 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} \theta(\lambda) \\ + \frac{2 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right)}{r} - \sin(\theta) \cos(\theta) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)^2 &= 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} r(\lambda) \\ - \frac{(-r+2M)M \left(\frac{d}{d\lambda} t(\lambda) \right)^2}{r^3} + \frac{M \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right)^2}{r(-r+2M)} + (-r+2M) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right)^2 + & \\ -r+2M \sin(\theta)^2 \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)^2 &= 0 \end{aligned} \right. \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Wir lassen nur radiale Bewegung zu und setzen die Masse des schwarzen Lochs auf $M=1$:

```
> eq1:=subs({diff(phi(lambda), lambda)=0, diff(theta(lambda), lambda)=0, M=1}, eqns[1]):
eq2:=subs({diff(phi(lambda), lambda)=0, diff(theta(lambda), lambda)=0, M=1}, eqns[2]):
eq3:=subs({diff(phi(lambda), lambda)=0, diff(theta(lambda), lambda)=0, M=1}, eqns[3]):
eq4:=subs({diff(phi(lambda), lambda)=0, diff(theta(lambda), lambda)=0, M=1}, eqns[4]):
eq1:=simplify(subs({r=r(lambda)}, eq1)):
eq4:=simplify(subs({r=r(lambda)}, eq4)):
```


$$\begin{aligned}
 eq1 &:= \frac{\left(\frac{d^2}{d\lambda^2} r(\lambda)\right) r(\lambda)^2 - 2 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda)\right) \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda)\right)}{r(\lambda) (r(\lambda) - 2)} = 0 \\
 eq4 &:= \frac{1}{r(\lambda)^3 (r(\lambda) - 2)} \left(\left(\frac{d^2}{d\lambda^2} r(\lambda)\right) r(\lambda)^4 - 2 \left(\frac{d^2}{d\lambda^2} r(\lambda)\right) r(\lambda)^3 \right. \\
 &+ \left. \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda)\right)^2 r(\lambda)^2 - 4 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda)\right)^2 r(\lambda) + 4 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda)\right)^2 \right) \\
 &- \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda)\right)^2 r(\lambda)^2 = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.1.3}$$

Anfangswerte:

Zur Zeit $t=0$ sei der fallende Körper bei einem Radius von $r=10=5*$ (Schwarzschildradius), die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers sei 0. Wir beschreiben den Fall aus der Sichtweise eines im unendlichen ruhenden Beobachters. Bemerkung: Der Anfangswert dt_0 ergibt sich hierbei aus der Bedingung des infinitesimalen Weglängenelements $\frac{ds^2}{d\lambda^2} = u^\mu u_\mu = 1$, wobei hierbei der affine Parameter λ als Eigenzeit τ interpretiert wird und u^μ die 4er-Geschwindigkeit des Körpers darstellt.

$$\frac{ds^2}{d\lambda^2} = 1 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{dr=d\theta=d\phi=0 \text{ bei } t=0} \quad \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt^2}{d\lambda^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}}$$

```

> r0:=10:
  t0:=0:
  dr0:=0:
  dt0:=evalf(1/sqrt(1-2/r0)):
  
```

Numerisches Lösen der Geodätengleichung:

```

> Loes:=dsolve({eq1,eq4,t(0)=t0,r(0)=r0,D(r)(0)=0,D(t)(0)=dt0},{r(lambda),t(lambda)},type=numeric,output=listprocedure):
  
```

Zum Vergleich lösen wir auch die Bewegungsgleichung nach Newton:

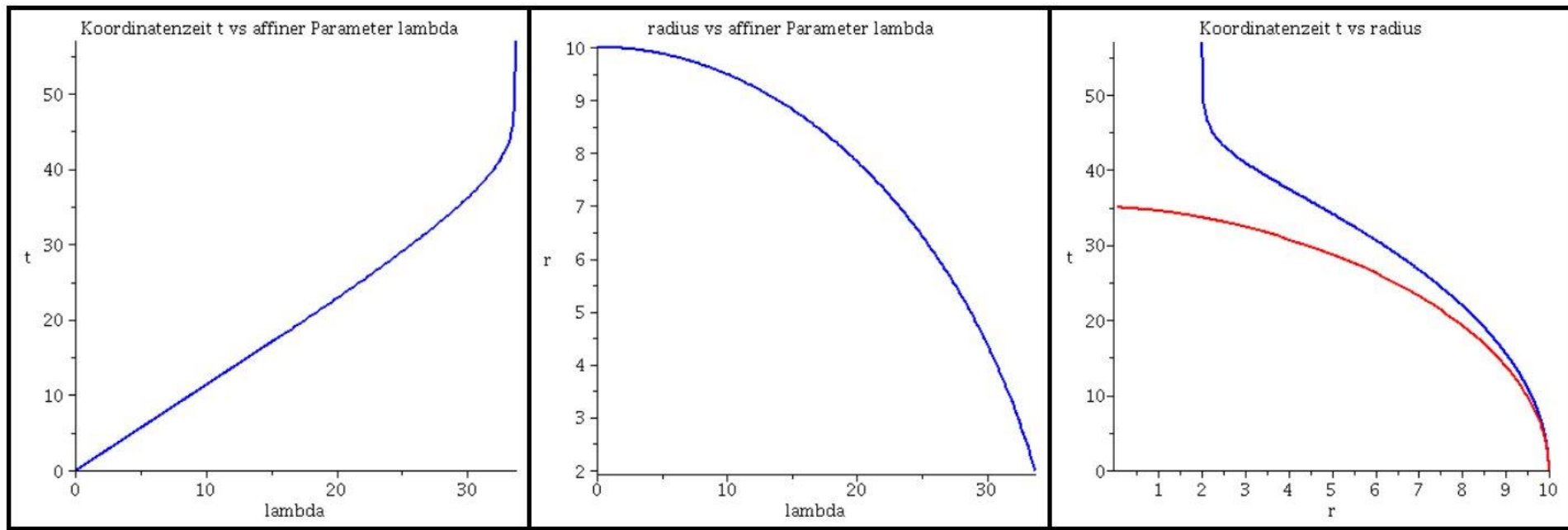
$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{1}{r^2}$$

Grafische Veranschaulichung der Lösung (rote Kurve ist die nach Newton berechnete):

```

>
      lend:=33.7:
      lendn:=35.12:
Plot1:=odeplot(Loes, [lambda, t(lambda)], 0..lend, numpoints=200, color=blue, thickness=2, title="Koordinatenzeit t vs affiner Parameter
      lambda"):
Plot2:=odeplot(Loes, [lambda, r(lambda)], 0..lend, numpoints=200, color=blue, thickness=2, title="radius vs affiner Parameter lambda"):
Plot3:=odeplot(Loes, [r(lambda), t(lambda)], 0..lend, numpoints=700, color=blue, thickness=2, title="Koordinatenzeit t vs radius"):
Plot_newton:=odeplot(Loes_newton, [r(lambda), lambda], 0..lendn, numpoints=100, color=red, thickness=2):
      display(Matrix(1, 3, [Plot1, Plot2, display(Plot3, Plot_newton)]));

```



Die ersten Bilder eines Schwarzen Lochs verstehen

Ein wenig mehr als hundert Jahre nachdem Albert Einstein seine Feldgleichungen der *Allgemeine Relativitätstheorie* der Öffentlichkeit präsentierte, und er damit die Grundlage für Gravitationswellen und schwarzer Löcher formulierte, ist seit einigen Wochen ein Meilenstein in der Geschichte der Astronomie in aller Munde (erstes Bild eines schwarzen Lochs, siehe rechte Abbildung).

Echte Singularität im Zentrum

Ereignishorizont

Photonensphäre
Letzte stabile kreisförmige Bahn-
bewegung eines masselosen Teilchens

Akkretionsscheibe
Letzte stabile kreisförmige Bahn-
bewegung eines massiven
Probekörpers
Last Stable Circular Orbit (ISCO)

YouTube Video: https://www.youtube.com/watch?v=Zh5p9Sro_VU&list=PLn5gYfEKlag8nps1GKLqUW35AOgQY7aM2

Anlässlich der bahnbrechenden Aufnahme des ersten Bildes eines schwarzen Lochs im Zentrum unserer Nachbargalaxie M87, wurde am 17. April 2019 um 20 Uhr ein öffentlicher, populärwissenschaftlicher Abendvortrag im Otto Stern Zentrum (OSZ H1) am Campus Riedberg der Goethe Universität gehalten. Es sprachen die drei Principal Investigators des europäischen Black Hole Cam-Projekts (L.Rezzolla, M.Kramer und H.Falke).

Anfangsbedingungen

Zum Lösen des Systems von Differentialgleichungen müssen die Anfangsbedingungen des Probekörpers festgelegt werden

z.B. wo befindet sich der Probekörper zur Eigenzeit $\lambda=0$: $r(0)=10$

Die Anfangsbedingung für $t'(0)$ erhält man z.B. mittels der folgenden Bedingungen aus dem infinitesimalen Weglängenelement ds :

$$\frac{ds^2}{d\lambda^2} = 1 \quad \xRightarrow{\substack{dr=d\theta=d\phi=0 \\ \text{bei } t=0}} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt^2}{d\lambda^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}}$$

Keine Anfangsgeschwindigkeit

Anfangsgeschwindigkeit in der äquatorialen Ebene:

$$\frac{ds^2}{d\lambda^2} = 1 \quad \xRightarrow{\substack{dr=d\theta=0, \\ \theta=\pi/2 \text{ bei } t=0}} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt^2}{d\lambda^2} - r^2 \frac{d\phi^2}{d\lambda^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{d\lambda} = \sqrt{\frac{1 + r^2 \frac{d\phi^2}{d\lambda^2}}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}}$$

Während der Bewegung erhaltene Größen

Zwei Gleichungen der Geodätengleichung lassen sich wie folgt umformulieren:

$$\begin{aligned} 1. \text{ Gleichung: } & \frac{d}{d\lambda} \left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\lambda} \right] = 0 \quad \rightarrow \quad \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\lambda} = E = \text{const} \\ 2. \text{ Gleichung: } & \frac{d}{d\lambda} \left(r^2 \sin^2(\theta) \frac{d\phi}{d\lambda} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad r^2 \sin^2(\theta) \frac{d\phi}{d\lambda} = l = \text{const} \quad , \end{aligned}$$

Die während der Bewegung erhaltenen Größen der Energie (E) und des Drehimpulses (l) lassen sich mittels des Viererimpulses definieren:

Viererimpulses $p_\mu = m u_\mu$ ergeben ($\lambda = \tau$):

$$\begin{aligned} p_0 &= m \frac{dx_0}{d\tau} = m g_{00} \frac{dx^0}{d\tau} = m g_{00} \frac{dt}{d\tau} = m \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\tau} = m E \\ p_3 &= m \frac{dx_3}{d\tau} = m g_{33} \frac{dx^3}{d\tau} = m g_{33} \frac{d\phi}{d\tau} = -m \left(r^2 \sin^2(\theta) \right) \frac{d\phi}{d\tau} = -m l \end{aligned}$$

Das effektive Potential

Mittels der radialen Gleichung läßt sich das effektive Potential definieren:

$$4. \text{ Gleichung: } \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V(r, M, l) = \frac{1}{2} (E^2 - 1)$$

$$\text{wobei: } V(r, M, l) = \frac{l^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) - \frac{M}{r} ,$$

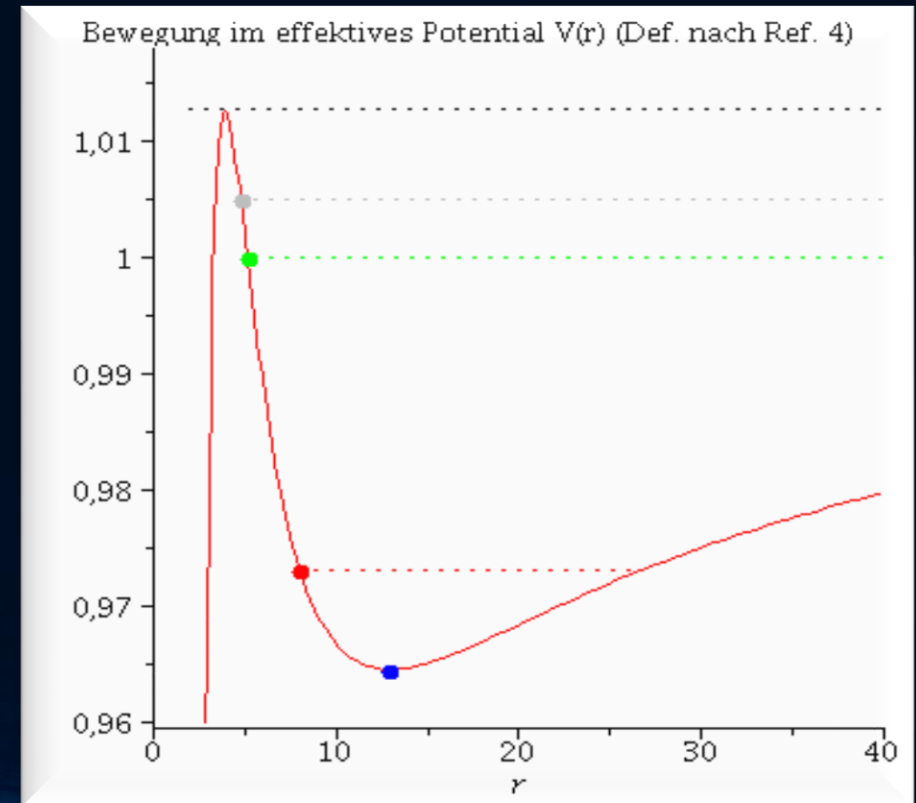
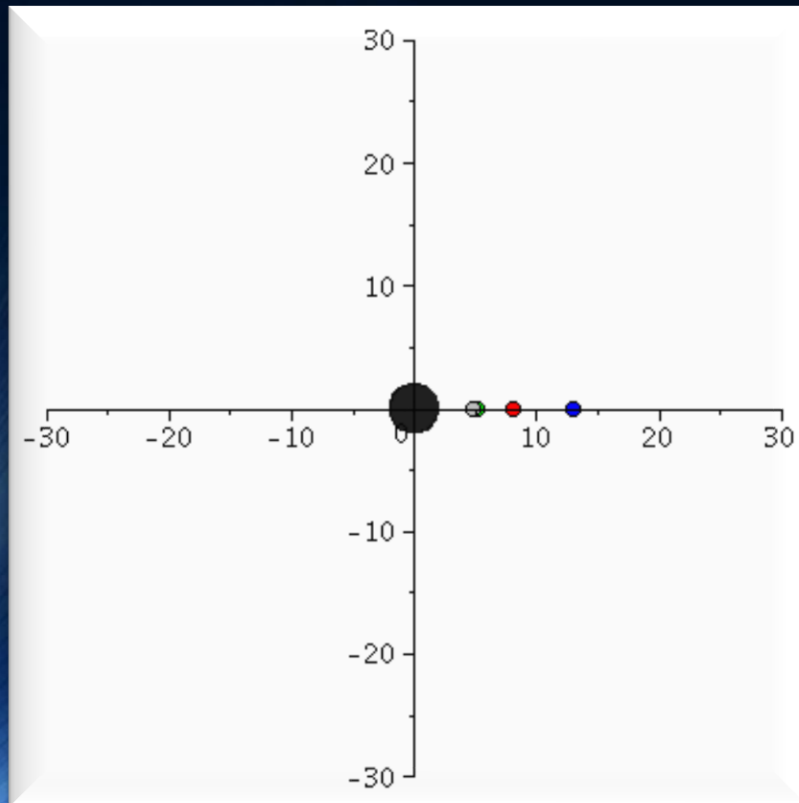
Alternative Definition (siehe Buch von Prof. Rezzolla):

$$4. \text{ Gleichung: } \rightarrow \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + (V(r, M, l))^2 = E^2$$

$$\text{wobei: } V(r, M, l) = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(1 + \frac{l^2}{r^2} \right)} ,$$

Klassifizierung der möglichen Bahnbewegungen eines Probekörpers um ein nichtrotierendes schwarzes Loch

Neben den gebundenen kreisförmigen (blau) und elliptischen (rot) Bahnen, den parabolischen (grün) und hyperbolischen (grau) Bahnverläufen ist auch eine durch das schwarze Loch eingefangene Bahn (schwarz: capture orbit) möglich



[Einführung](#)

[Teil I: Analytische Berechnungen und numerische Simulationen in Maple](#)

[Teil II: Paralleles Programmieren mit C++ und OpenMP/MPI](#)

[Teil III: Computersimulationen mit dem Einstein-Toolkit](#)

[Aufgaben](#)

Download Maple Worksheed

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer General Theory of Relativity on the Computer

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main (Sommersemester 2016)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 11.04.2016

Erster Vorlesungsteil: Allgemeine Relativitätstheorie mit Maple

3. Vorlesung

Einführung

Basierend auf den Ergebnissen der zweiten Vorlesung des ersten Teils wird im folgenden eine Klassifizierung der Umlaufbahnen eines Probekörpers um ein schwarzes Loch vorgestellt und mit den Newtonschen Umlaufbahnen verglichen.

Bewegung eines Probekörpers um ein schwarzes Loch in der Ebene

schwarzes Loch vorgestellt und mit den Newtonschen Umlaufbahnen verglichen.

Bewegung eines Probekörpers um ein schwarzes Loch in der Ebene

Im folgenden wird die Geodätengleichung in vorgegebener Schwarzschild Raumzeit betrachtet. Die Geodätengleichung beschreibt wie sich ein Probekörper (Masse = 0) im Raum bewegt und sagt voraus, dass diese Bewegung sich stets entlang der kürzesten Kurve, in der durch die Metrik beschriebenen gekrümmten Raumzeit, vollzieht.

Die Geodätengleichung und das effektive Potential $V(r)$

In der Version 1 des Maple-Worksheets des Teils I.2) der Vorlesung hatten wir erwähnt, dass sich die Geodätengleichung durch folgendes Variationsprinzip herleiten lässt,

$$\int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda \rightarrow \text{Extremal}$$

, wobei sich dann die Geodätengleichung mittels der Euler-Lagrange Gleichungen ($L = \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}$, bzw. alternativ $L = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}$) ergibt:

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \frac{dx^\mu}{d\lambda}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0 \quad ,$$

wobei die $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ die Christoffel Symbole zweiter Art und λ ein affiner Parameter (z.B. die Eigenzeit) darstellen.

```
> restart;  
with(tensor);  
with(plots);  
with(plottools);
```

Definition der kovarianten Raumzeit-Metrik eines schwarzen Lochs der Masse M in Schwarzschildkoordinaten:

Berechnung der Geodätengleichung als Funktion des affinen Parameters lambda. Die Geodätengleichung ist ein System gekoppelter Differentialgleichungen:

> eqns:=geodesic_eqns(coord, lambda, Cf2);

$$\begin{aligned}
 \text{eqns} := & \left\{ \begin{aligned} & \frac{d^2}{d\lambda^2} t(\lambda) - \frac{2M \left(\frac{d}{d\lambda} t(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right)}{r(-r+2M)} = 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} \phi(\lambda) \\ & + \frac{2 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)}{r} + \frac{2 \cos(\theta) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)}{\sin(\theta)} = 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} \theta(\lambda) \\ & + \frac{2 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right)}{r} - \sin(\theta) \cos(\theta) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)^2 = 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} r(\lambda) \\ & - \frac{(-r+2M)M \left(\frac{d}{d\lambda} t(\lambda) \right)^2}{r^3} + \frac{M \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right)^2}{r(-r+2M)} + (-r+2M) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right)^2 + \\ & (-r+2M) \sin^2(\theta) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)^2 = 0 \end{aligned} \right. \quad (2.1.2)
 \end{aligned}$$

Man kann zeigen (siehe z.B. Seite 206 in "General relativity : An introduction for physicists by M. P. Hobson, G. P. Efstathiou and A. N. Lasenby"), dass sich die erste und zweite Gleichung dieses Systems von Differentialgleichungen in die folgenden Gleichungen umschreiben lässt:

1. Gleichung: $\frac{d}{d\lambda} \left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\lambda} \right] = 0 \rightarrow \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\lambda} = E = \text{const}$
2. Gleichung: $\frac{d}{d\lambda} \left(r^2 \sin^2(\theta) \frac{d\phi}{d\lambda} \right) = 0 \rightarrow r^2 \sin^2(\theta) \frac{d\phi}{d\lambda} = l = \text{const} ,$

wobei die während der Bewegungen erhaltenen Größen E (Teilchenenergie pro Masse) und l (Drehimpuls pro Masse m) sich aus der Definition des Viererimpuls $p_\mu = m u_\mu$ ergeben (Beachte: Die im folgenden benutzten einzelnen Rechenschritte gelten speziell nur für die Schwarzschildmetrik

Man kann zeigen (siehe z.B. Seite 206 in "General relativity : An introduction for physicists by M. P. Hobson, G. P. Efstathiou and A. N. Lasenby"), dass sich die erste und zweite Gleichung dieses Systems von Differentialgleichungen in die folgenden Gleichungen umschreiben lässt:

$$1. \text{ Gleichung: } \frac{d}{d\lambda} \left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\lambda} \right] = 0 \quad \rightarrow \quad \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\lambda} = E = \text{const}$$

$$2. \text{ Gleichung: } \frac{d}{d\lambda} \left(r^2 \sin^2(\theta) \frac{d\phi}{d\lambda} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad r^2 \sin^2(\theta) \frac{d\phi}{d\lambda} = l = \text{const} \quad ,$$

wobei die während der Bewegungen erhaltenen Größen E (Teilchenenergie pro Masse) und l (Drehimpuls pro Masse m) sich aus der Definition des Viererimpulses $p_\mu = m u_\mu$ ergeben (Beachte: Die im folgenden benutzten einzelnen Rechenschritte gelten speziell nur für die Schwarzschildmetrik und desweiteren ist $\lambda = \tau$):

$$p_0 = m \frac{dx_0}{d\tau} = m g_{00} \frac{dx^0}{d\tau} = m g_{00} \frac{dt}{d\tau} = m \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\tau} = m E$$

$$p_3 = m \frac{dx_3}{d\tau} = m g_{33} \frac{dx^3}{d\tau} = m g_{33} \frac{d\phi}{d\tau} = -m \left(r^2 \sin^2(\theta) \right) \frac{d\phi}{d\tau} = -m l$$

Wir lassen nur ebene Bewegungen zu ($\theta = \pi/2$, $d\theta = 0$) und setzen $M=1$:

```
> setM:=1:
eq1:=subs({r=r(lambda), sin(theta)=1, cos(theta)=0, diff(theta(lambda), lambda)=0, theta=Pi/2, M=setM}, eqns[1]):
eq2:=subs({r=r(lambda), sin(theta)=1, cos(theta)=0, diff(theta(lambda), lambda)=0, theta=Pi/2, M=setM}, eqns[2]):
eq3:=subs({r=r(lambda), sin(theta)=1, cos(theta)=0, diff(theta(lambda), lambda)=0, theta=Pi/2, M=setM}, eqns[3]):
eq4:=subs({r=r(lambda), sin(theta)=1, cos(theta)=0, diff(theta(lambda), lambda)=0, theta=Pi/2, M=setM}, eqns[4]):
eq1:=subs({r(lambda)(lambda)=r(lambda)}, eq1);
eq2:=subs({r(lambda)(lambda)=r(lambda)}, eq2);
eq3:=subs({r(lambda)(lambda)=r(lambda)}, eq3);
eq4:=subs({r(lambda)(lambda)=r(lambda)}, eq4);
```

$$\begin{aligned}
 eq1 &:= \frac{d^2}{d\lambda^2} \tau(\lambda) - \frac{2 \left(\frac{d}{d\lambda} \tau(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right)}{r(\lambda) (-r(\lambda) + 2)} = 0 \\
 eq2 &:= \frac{d^2}{d\lambda^2} \phi(\lambda) + \frac{2 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)}{r(\lambda)} = 0 \\
 eq3 &:= 0 = 0 \\
 eq4 &:= \frac{d^2}{d\lambda^2} r(\lambda) - \frac{(-r(\lambda) + 2) \left(\frac{d}{d\lambda} \tau(\lambda) \right)^2}{r(\lambda)^3} + \frac{\left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right)^2}{r(\lambda) (-r(\lambda) + 2)} + (-r(\lambda) + 2) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)^2 = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.1.3}$$

In Abhängigkeit von den Anfangswerten können unterschiedliche Bahnen der Bewegung entstehen. Wir wählen zunächst als Beispiel die Anfangswerte einer geschlossenen Bahn:

Zur Zeit t=0 sei der fallende Körper bei einem Radius von r=10=5*(Schwarzschildradius), die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers sei in radialer Richtung dr=0 und in phi-Richtung dphi=0.036. Wir beschreiben die Bewegung aus der Sichtweise eines im Unendlichen ruhenden Beobachters.

```

>
r0:=10:
t0:=0:
phi0:=0:
theta0:=Pi/2:
dr0:=0:
dphi0:=0.041:
dt0:=evalf(1/sqrt(1-2/r0)*sqrt(1+r0^2*dphi0^2)):
dtheta0:=0:
    
```

In der Literatur wird die Bewegung eines Probekörpers um ein schwarzes Loch mittels eines definierten, effektiven Potentials illustriert:

1. General relativity : An introduction for physicists by M. P. Hobson, G. P. Efstathiou and A. N. Lasenby
2. Gravity : An introduction to Einstein's general relativity by James B. Hartle

In der Literatur wird die Bewegung eines Probekörpers um ein schwarzes Loch mittels eines definierten, effektiven Potentials illustriert:

1. General relativity : An introduction for physicists by M. P. Hobson, G. P. Efstathiou and A. N. Lasenby
2. Gravity : An introduction to Einstein's general relativity by James B. Hartle
3. Allgemeine Relativitätstheorie by Torsten Fließbach
4. Relativistic hydrodynamics by Luciano Rezzolla and Olindo Zanotti

Dieses Potential hängt von dem, bei der Bewegung erhaltenen Drehimpuls pro Masse m ab. Die im Zentralfeld möglichen Bewegungen werden mittels zweier erhaltener Größen (l : Drehimpuls pro Masse m und E : Energie pro Masse) charakterisiert. Die Definition des effektiven Potential erfolgt mittels der radialen, 4. Geodätengleichung. So definieren z.B. die Literaturangaben 1.-3. das effektive Potential wie folgt:

$$4. \text{ Gleichung: } \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V(r, M, l) = \frac{1}{2} (E^2 - 1)$$
$$\text{wobei: } V(r, M, l) = \frac{l^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) - \frac{M}{r} ,$$

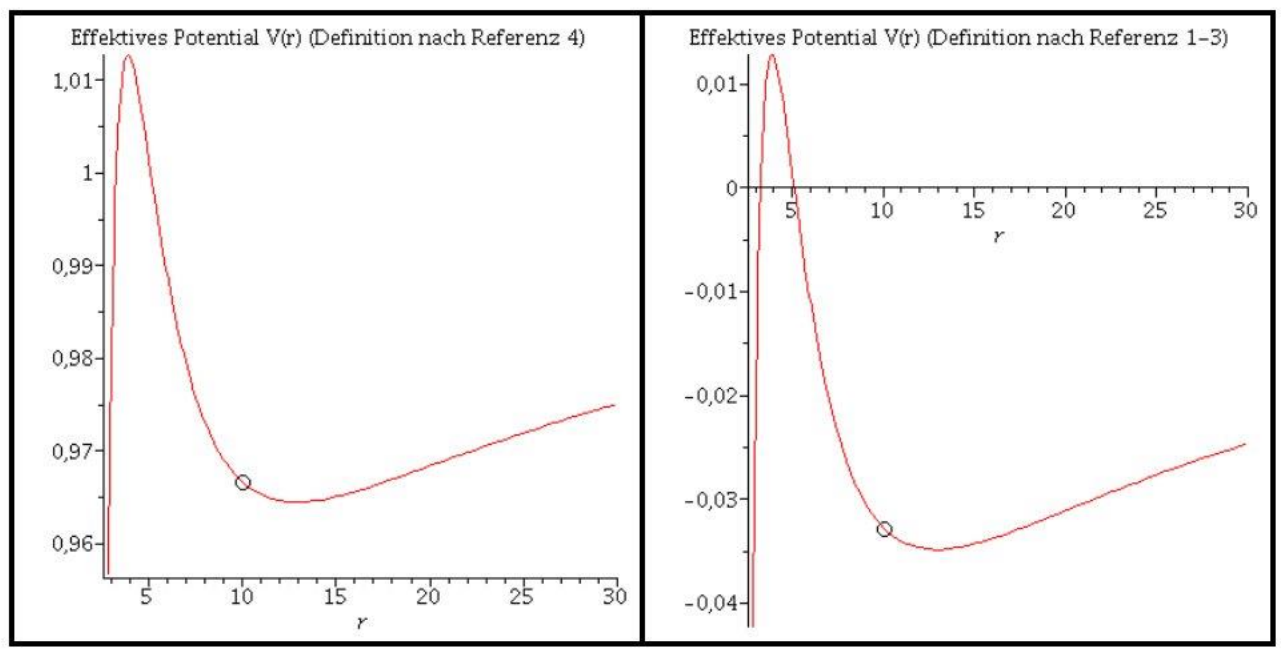
In der Literaturangabe 4 wird das Potential $V(r, M, l)$ hingegen wie folgt definiert:

$$4. \text{ Gleichung: } \rightarrow \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + (V(r, M, l))^2 = E^2$$
$$\text{wobei: } V(r, M, l) = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(1 + \frac{l^2}{r^2} \right)} ,$$

Die folgende Abbildung zeigt (in der Nomenklatur des 4. Buches (Diagramm links) bzw. des 1. bis 3. Buches (Diagramm rechts)) das effektive Potential als Funktion des Radius bei den obigen gewählten Anfangswerten:

> $setl:=r_0^2*dphi_0;$

$$setl := 4.100$$
$$setE := 0.9666850568$$
$$V_{effFb} := (r, M, l) \rightarrow -\frac{M}{r} + \frac{1}{2} \frac{l^2}{r^2} - \frac{M l^2}{r^3}$$
$$V_{effRez} := (r, M, l) \rightarrow \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} \sqrt{1 + \frac{l^2}{r^2}}$$



Numerisches Lösen der Geodätengleichung:

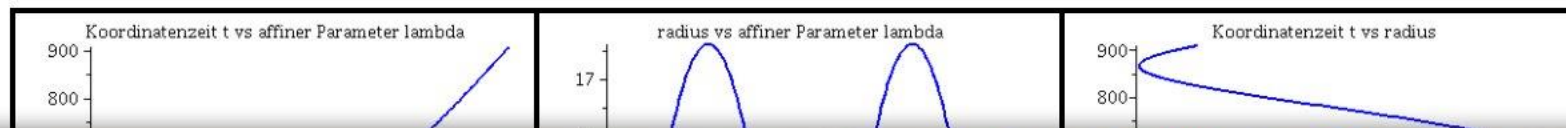
Numerisches Lösen der Geodätengleichung:

```
> Loes:=dsolve({eq1,eq2,eq4,t(0)=t0,r(0)=r0,D(r)(0)=dr0,D(t)(0)=dt0,phi(0)=phi0,D(phi)(0)=dphi0},  
              {r(lambda),t(lambda),phi(lambda)},type=numeric,output=listprocedure);
```

$$\begin{aligned} \text{Loes} := & \left[\lambda = \text{proc}(\text{lambda}) \dots \text{end proc}, \phi(\lambda) = \text{proc}(\text{lambda}) \dots \text{end proc}, \right. \\ & \frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) = \text{proc}(\text{lambda}) \dots \text{end proc}, r(\lambda) = \text{proc}(\text{lambda}) \dots \text{end proc}, \\ & \frac{d}{d\lambda} r(\lambda) = \text{proc}(\text{lambda}) \dots \text{end proc}, t(\lambda) = \text{proc}(\text{lambda}) \dots \text{end proc}, \\ & \left. \frac{d}{d\lambda} t(\lambda) = \text{proc}(\text{lambda}) \dots \text{end proc} \right] \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

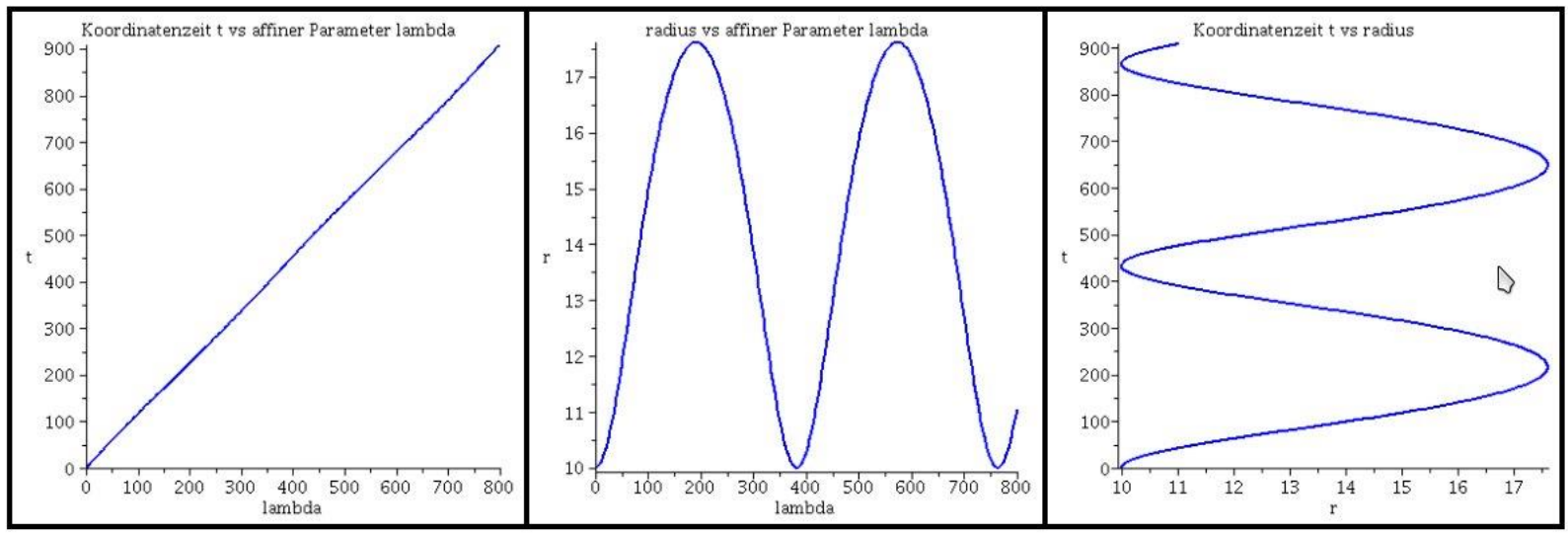
Grafische Veranschaulichung der Lösung:

```
> lend:=800:  
   lendn:=35.12:  
Plot1:=odeplot(Loes,[lambda,t(lambda)],0..lend,numpoints=200,color=blue,thickness=2,title="Koordinatenzeit t vs affiner Parameter  
           lambda");  
Plot2:=odeplot(Loes,[lambda,r(lambda)],0..lend,numpoints=200,color=blue,thickness=2,title="radius vs affiner Parameter lambda");  
Plot3:=odeplot(Loes,[r(lambda),t(lambda)],0..lend,numpoints=700,color=blue,thickness=2,title="Koordinatenzeit t vs radius");  
display(Matrix(1,3,[Plot1,Plot2,Plot3]));
```

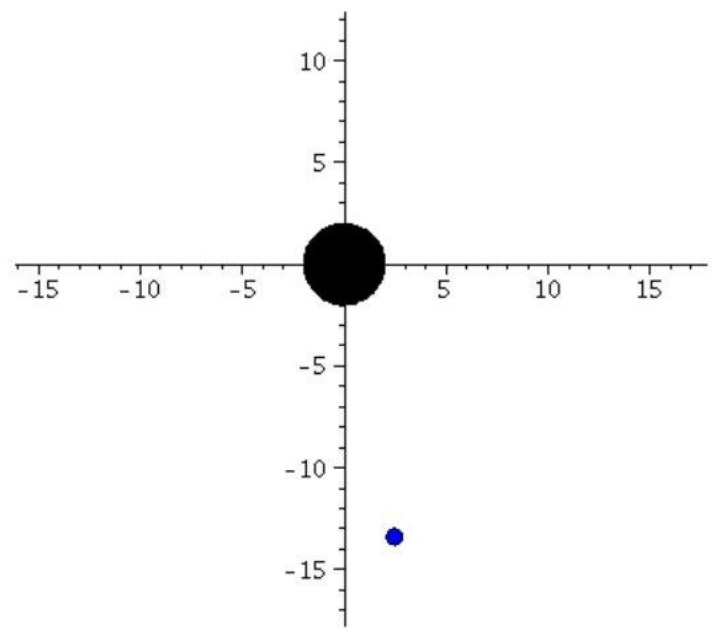


Grafische Veranschaulichung der Lösung:

```
>
lend:=800:
lendn:=35.12:
Plot1:=odeplot(Loes,[lambda,t(lambda)],0..lend,numpoints=200,color=blue,thickness=2,title="Koordinatenzeit t vs affiner Parameter lambda"):
Plot2:=odeplot(Loes,[lambda,r(lambda)],0..lend,numpoints=200,color=blue,thickness=2,title="radius vs affiner Parameter lambda"):
Plot3:=odeplot(Loes,[r(lambda),t(lambda)],0..lend,numpoints=700,color=blue,thickness=2,title="Koordinatenzeit t vs radius"):
display(Matrix(1,3,[Plot1,Plot2,Plot3]));
```

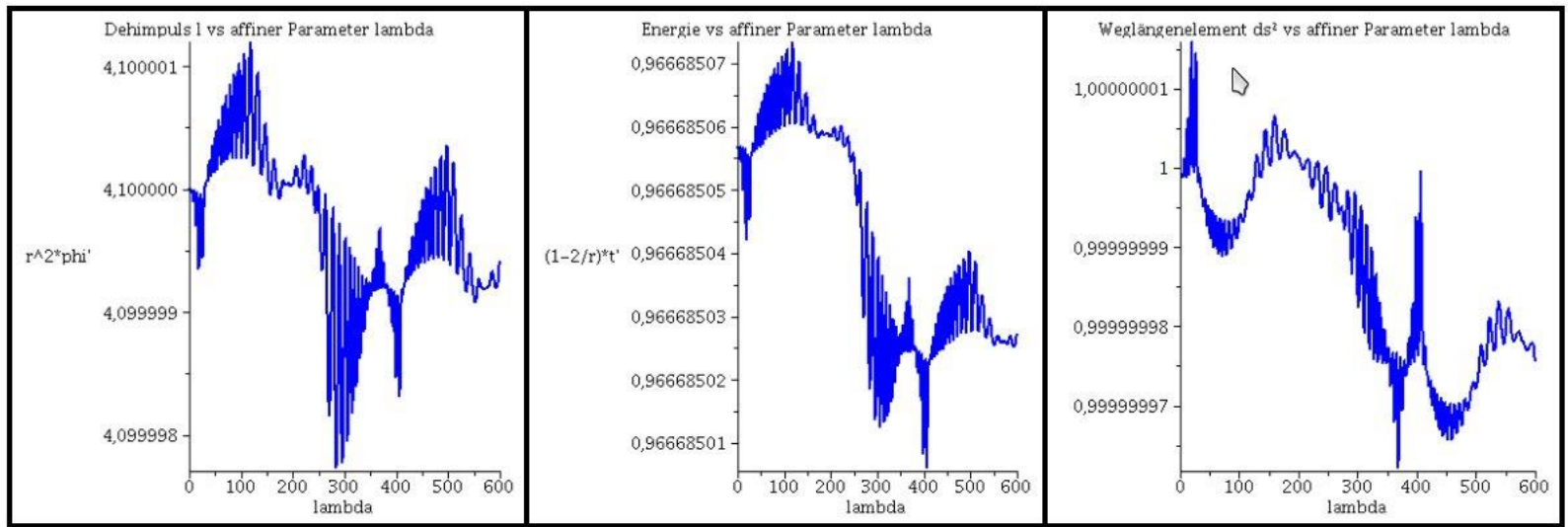



```
> frames:=300:  
  lend:=600:  
  BH:=display(disk([0,0],2,color=black)):  
  for i from 0 by 1 to frames do  
    Koerper[i]:=display(disk([rhs(Loes(i*lend/frames)[4])*cos(rhs(Loes(i*lend/frames)[2])),rhs(Loes(i*lend/frames)[4])*sin(rhs(Loes(i*lend/frames)[2]))],0.4,color=blue)):  
    Ani[i]:=display({Koerper[i],BH});  
  od:  
  
> display([seq(Ani[i],i=0..frames)],insequence=true,scaling=constrained);
```

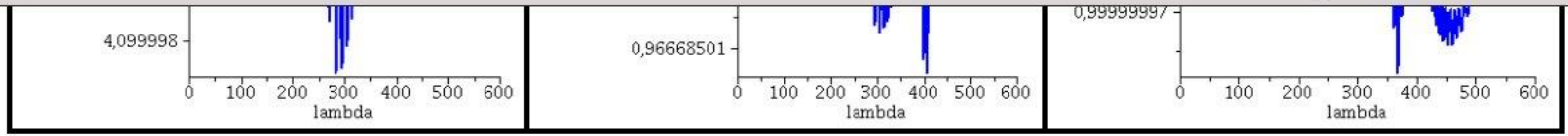


Während der Bewegung erhaltenen Größen (l: Drehimpuls pro Masse m, E: Energie pro Masse und Weglängenelement ds^2):

```
> Plot4:=odeplot(Loes,[lambda,r(lambda)^2*diff(phi(lambda), lambda)],0..lend,numpoints=700,color=blue,thickness=2,title="Dehimpuls l vs affiner Parameter lambda");
Plot5:=odeplot(Loes,[lambda,(1-2/r(lambda))*diff(t(lambda), lambda)],0..lend,numpoints=700,color=blue,thickness=2,title="Energie vs affiner Parameter lambda");
Plot6:=odeplot(Loes,[lambda,(1-2/r(lambda))*(diff(t(lambda), lambda))^2 - 1/(1-2/r(lambda))*(diff(r(lambda), lambda))^2 - r(lambda)^2*(diff(phi(lambda), lambda))^2],0..lend,numpoints=700,color=blue,thickness=2,title="Weglängenelement ds^2 vs affiner Parameter lambda");
display(Matrix(1,3,[Plot4,Plot5,Plot6]));
```

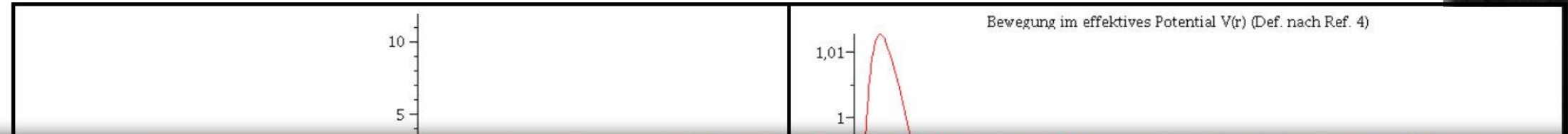


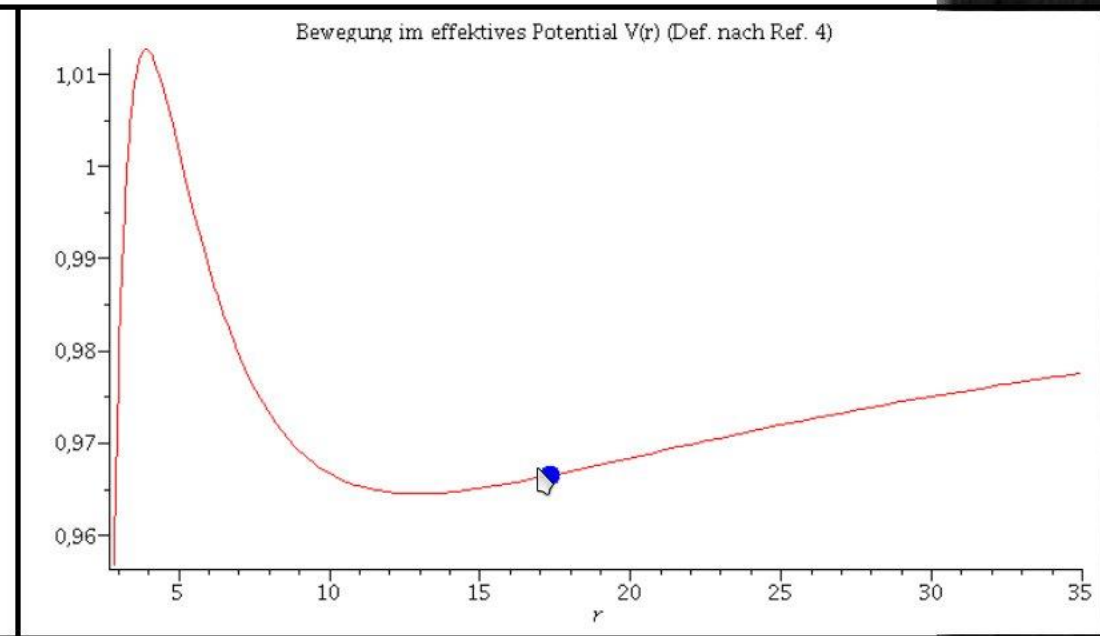
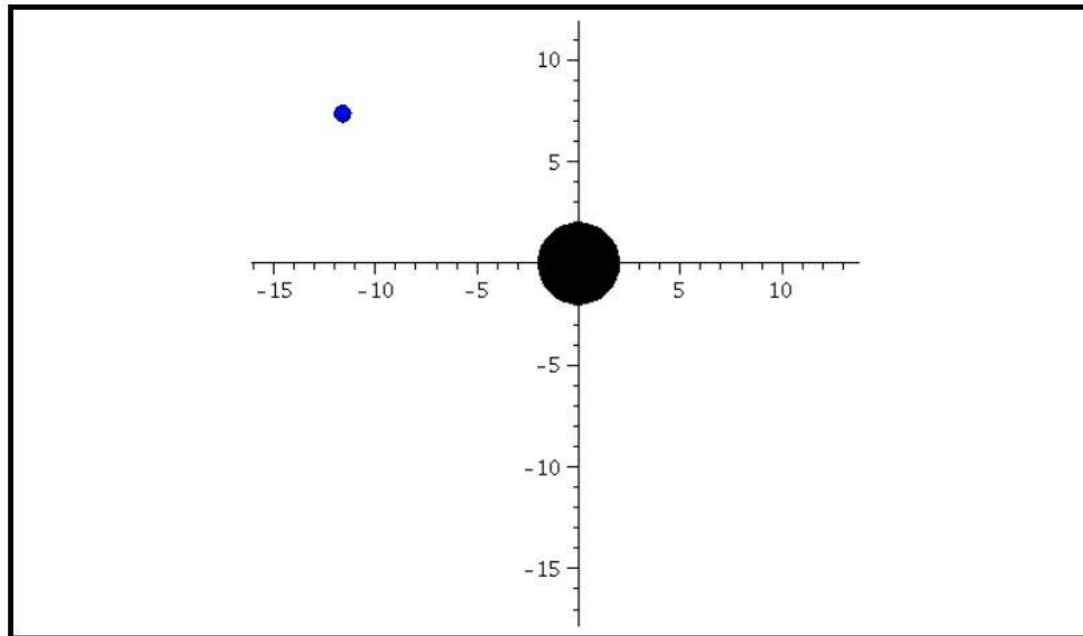
Animation der Bewegung im effektiven Potential:



Animation der Bewegung im effektiven Potential:

```
> frames:=300:  
  lend:=600:  
  Pot:=plot(VeffRez(r,1,setl),r=2.85..35):  
    for i from 0 by 1 to frames do  
  Koerper[i]:=pointplot({[rhs(Loes(i*lend/frames)[4]), setE]}, symbol=solidcircle,symbolsize=20,color=blue):  
  Ani1[i]:=display({Pot,Koerper[i]});  
    od:  
  
> display([seq(Ani1[i],i=0..frames)],insequence=true):  
  
> Animat1:=display([seq(Ani[i],i=0..frames)],insequence=true,scaling=constrained):  
  Animat2:=display([seq(Ani1[i],i=0..frames)],insequence=true,title="Bewegung im effektives Potential V(r) (Def. nach Ref. 4)":  
    display(Array([Animat1,Animat2])));
```





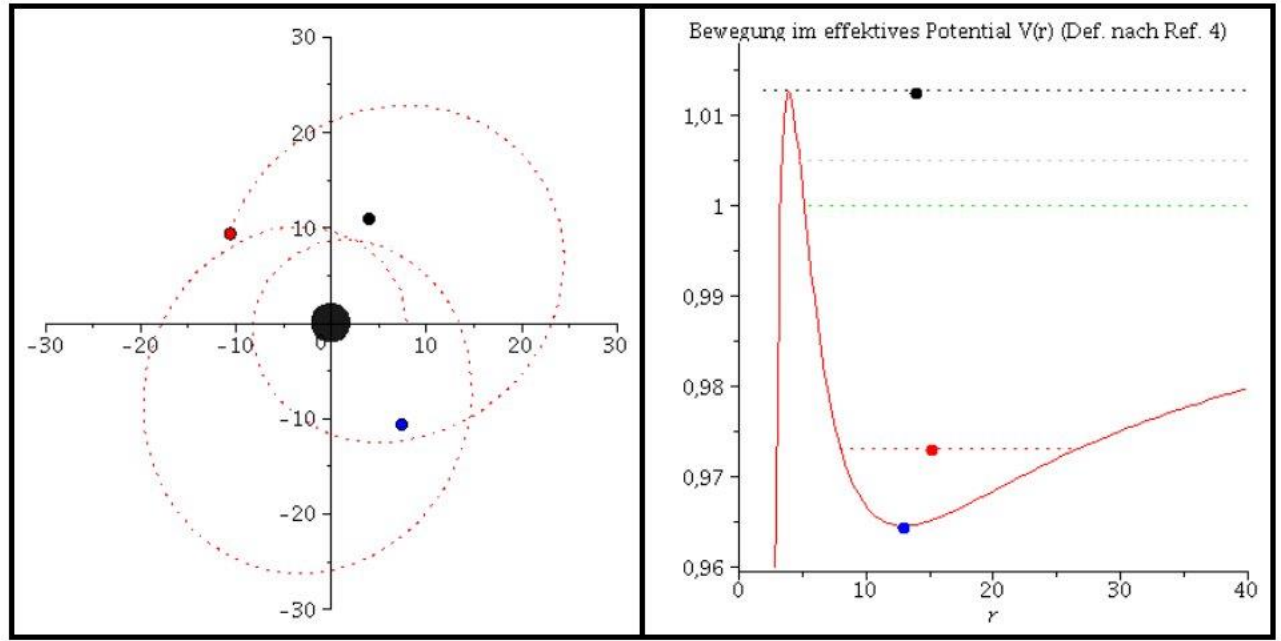
>

Klassifizierung unterschiedlicher Bahnbewegungen

Im folgenden werden die unterschiedlichen Bahnbewegungen um ein schwarzes Loch klassifiziert. Neben den gebundenen kreisförmigen (A: blau) und elliptischen (B: rot) Bahnen, den parabolischen (C: grün) und hyperbolischen (D: grau) Bahnverläufen ist auch eine durch das schwarze Loch eingefangene Bahn (E: capture orbit, schwarz) möglich. Wir setzen $M=1$ und $l=4.1$.

>

t0:=0:
phi0:=0:
theta0:=Pi/2:
dtheta0:=0:



>

Die unterschiedlichen Bahnbewegungen um ein schwarzes Loch (gebunden kreisförmige (A: blau) und elliptische (B: rot) Bahn, parabolische (C: grün) und hyperbolische (D: grau) Bahnverläufe bzw. eingefangene Bahn (E: capture orbit, schwarz)) sind in der ogigen Abbildung dargestellt. Bei der elliptische, roten Bahn erkennt man hierbei gut den allgemeinrelativistem Effekt der Periheldrehung, d.h. der nächste Punkt (der Perihel) und der am weitesten entfernte Punkt (der Aphel) vom Zentrum des schwarzen Lochs betrachtet, ändert seine Position und rotiert entgegen dem Uhrzeigersinn in ϕ -Richtung.

>

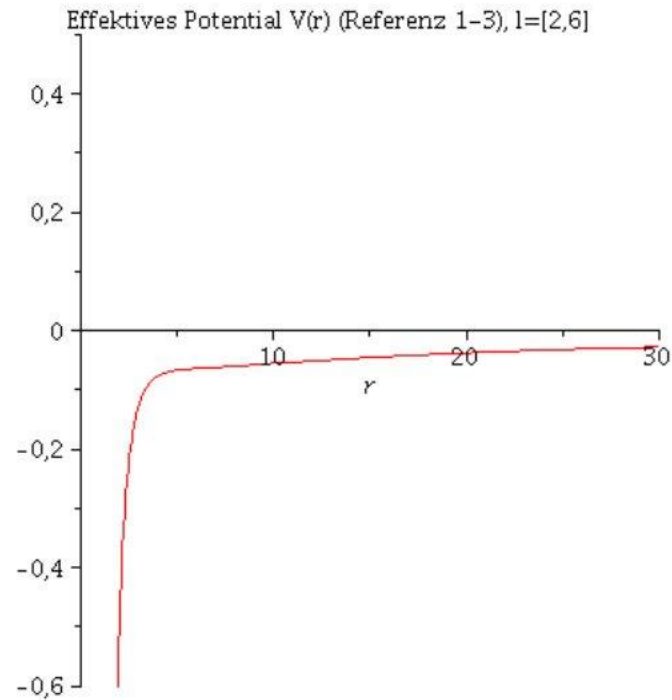
Die innerste stabile kreisförmige Bahnbewegung (Innermost Stable Circular Orbit (ISCO)) eines

Die innerste stabile kreisförmige Bahnbewegung (Innermost Stable Circular Orbit (ISCO)) eines Probekörpers

Wir berechnen die kreisförmigen Bahnbewegungen indem wir das Minimum des effektiven Potentials berechnen.

In der vorigen Animation der unterschiedlichen Bahnbewegungen wurde der Drehimpuls l fest auf den Wert 4.1 und die Masse des schwarzen Lochs auf 1 festgelegt. Das effektive Potential $V(r, M, l)$ war somit nur noch von r abhängig. Die folgende Animation zeigt wie sich die Form des effektiven Potentials bei Variation des Parameters l von $l=2$ bis $l=6$ verändert.

```
> animate(VeffFb(r,1,l),r=0..30,l=2..6,view=-0.6..0.5,title="Effektives Potential V(r) (Referenz 1-3), l=[2,6]",numpoints=500);
```



Wir benutzen nun die Potential-Nomenklatur der 1. bis 3. Literaturangabe (siehe weiter oben). Ist der Wert des Drehimpulses l oberhalb einer gewissen Grenze, so sind stabile Bahnen möglich, da ein Minimum im Potential vorhanden ist. Kreisförmige Bahnbewegungen sind dadurch charakterisiert, dass der Wert des Radiuses sich im Laufe der Zeit nicht verändert und somit sich der radiale Abstand des Probekörpers vom schwarzen Loch gerade im Minimum des effektiven Potentials befindet. Es muss somit gelten:

$$\frac{dV}{dr} = 0 \quad \text{Bedingung für kreisförmige Bahnverläufe}$$

> `Diff(V(r,M,l),r)=0;`
`ExtremaV:=diff(Veff(r,M,l),r)=0;`

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} V(r, M, l) &= 0 \\ \text{ExtremaV} &= \frac{M}{r^2} - \frac{l^2}{r^3} + \frac{3Ml^2}{r^4} = 0 \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

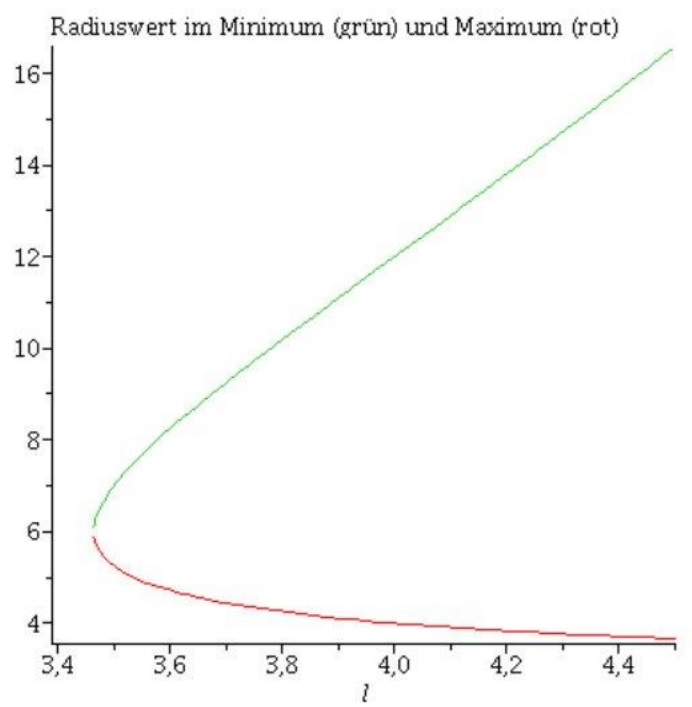
Lösen wir diese Gleichung nach r auf, so erhalten wir die folgenden Lösungen, wobei der erste (positives Vorzeichen) Wert dem Minimum und der zweite (negatives Vorzeichen) dem Maximum entspricht:

$$\frac{dV}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{\pm} = \frac{l}{2M} \left(l \pm \sqrt{l^2 - 12M^2} \right)$$

$$r_{extr} := \frac{1}{2} \frac{(l + \sqrt{l^2 - 12 M^2})}{M}, -\frac{1}{2} \frac{(-l + \sqrt{l^2 - 12 M^2})}{M} \quad (2.3.2)$$

Darstellen des Radiuswertes im Minimum (grün) und Maximum (rot) des effektiven Potentials

```
> plot({subs(M=1, rextr[1]), subs(M=1, rextr[2])}, l=3.4..4.5, title="Radiuswert im Minimum (grün) und Maximum (rot)");
```



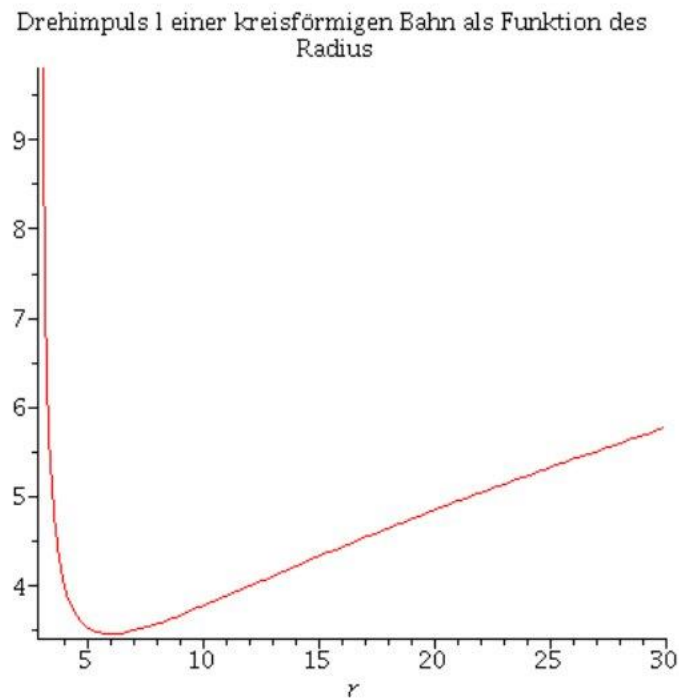
Der Drehimpuls l für eine kreisförmige Bahnbewegung ergibt sich durch Auflösen von V'=0 nach l:

Die beiden Lösungen entsprechen rechts und links rotierenden Probekörpern. Kreisförmige Bahnbewegung sind somit durch die folgende Bedingung an das effektive Potential charakterisiert:

$$\frac{dV}{dr} = 0 \Rightarrow l = \pm \frac{\sqrt{Mr}}{\sqrt{r-3M}}$$

Man erkennt an dieser Stelle schon, dass stabile kreisförmige Bahnbewegungen nur möglich sind, falls $r \geq 3M$. Darstellung einer Lösung:

```
> plot(subs(M=1,lextr[2]),r=3.1..30,title="Drehimpuls l einer kreisförmigen Bahn als Funktion des Radius");
```



Die innerste stabile Kreisbahn hat die Eigenschaft: $V'=0$ und $V''=0$. Der Drehimpuls l muss somit einen Wert annehmen, dass das effektive Potential einen Sattelpunkt bei einem speziellen Radiuswert annimmt:

$$\frac{dV}{dr} = 0, \quad \frac{d^2V}{dr^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{r = 6M, \quad l = 2\sqrt{3}M}_{\text{ISCO}}$$

```
> ExtremaV2:=diff(VeffFb(r,M,l),r,r)=0;
lISCO:=solve(simplify(subs(r=rextr[1],ExtremaV2)),l);
rISCO:=solve(simplify(subs(l=lextr[2],ExtremaV2)),r);
```

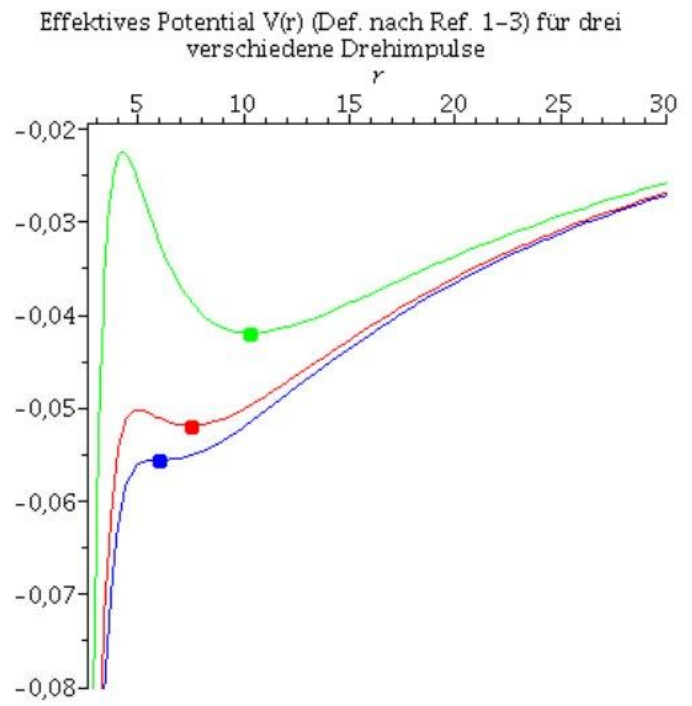
$$\text{ExtremaV2} := -\frac{2M}{r^3} + \frac{3l^2}{r^4} - \frac{12Ml^2}{r^5} = 0$$

$$l_{\text{ISCO}} := 2\sqrt{3}M, -2\sqrt{3}M$$

$$r_{\text{ISCO}} := 6M$$

(2.3.4)

Definition der Anfangswerte der innersten stabilen Kreisbahn und zweier weiterer stabilen kreisförmigen Bahnbewegungen.



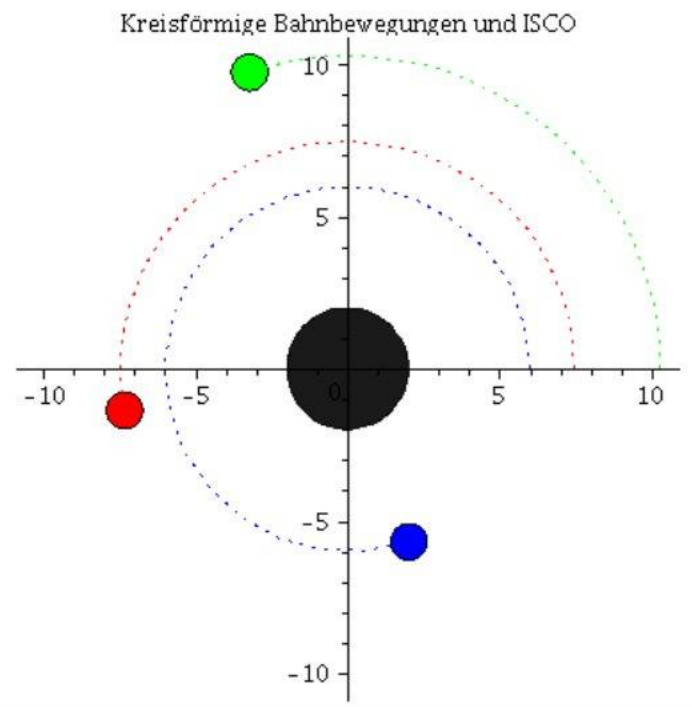
Numerische Lösung der drei Bahnbewegungen:

```
> LoesA:=dsolve({eq1,eq2,eq4,t(0)=t0,r(0)=r0A,D(r)(0)=dr0,D(t)(0)=dt0A,phi(0)=phi0,D(phi)(0)=dphi0A},  
              {r(lambda),t(lambda),phi(lambda)},type=numeric,output=listprocedure):  
LoesB:=dsolve({eq1,eq2,eq4,t(0)=t0,r(0)=r0B,D(r)(0)=dr0,D(t)(0)=dt0B,phi(0)=phi0,D(phi)(0)=dphi0B},  
              {r(lambda),t(lambda),phi(lambda)},type=numeric,output=listprocedure):  
LoesC:=dsolve({eq1,eq2,eq4,t(0)=t0,r(0)=r0C,D(r)(0)=dr0,D(t)(0)=dt0C,phi(0)=phi0,D(phi)(0)=dphi0C},  
              {r(lambda),t(lambda),phi(lambda)},type=numeric,output=listprocedure):
```

Animation der Bewegungen: Der ISCO ist die blaue Kurve

```
[4])*sin(rhs(LoesC(i*lend/frames)[2])),0.6,color=green)):
TrajA[i]:=listplot([seq([rhs(LoesA(j*lend/frames)[4])*cos(rhs(LoesA(j*lend/frames)[2])),rhs(LoesA(j*lend/frames)[4])*sin(rhs(LoesA(j*lend/frames)[2])), j = 0 .. i],color=blue,linestyle=dot):
TrajB[i]:=listplot([seq([rhs(LoesB(j*lend/frames)[4])*cos(rhs(LoesB(j*lend/frames)[2])),rhs(LoesB(j*lend/frames)[4])*sin(rhs(LoesB(j*lend/frames)[2])), j = 0 .. i],color=red,linestyle=dot):
TrajC[i]:=listplot([seq([rhs(LoesC(j*lend/frames)[4])*cos(rhs(LoesC(j*lend/frames)[2])),rhs(LoesC(j*lend/frames)[4])*sin(rhs(LoesC(j*lend/frames)[2])), j = 0 .. i],color=green,linestyle=dot):
Ani[i]:=display({KoerperA[i],KoerperB[i],KoerperC[i],TrajA[i],TrajB[i],TrajC[i],BH});
od:
```

```
> display([seq(Ani[i],i=0..frames)],insequence=true,scaling=constrained,title="Kreisförmige Bahnbewegungen und ISCO");
```



das Bild des schwarzen Lochs

Ein wenig mehr als hundert Jahre nachdem Albert Einstein seine Feldgleichungen der *Allgemeine Relativitätstheorie* der Öffentlichkeit präsentierte, und er damit die Grundlage für Gravitationswellen und schwarzer Löcher formulierte, ist seit einigen Wochen ein Meilenstein in der Geschichte der Astronomie in aller Munde (erstes Bild eines schwarzen Lochs, siehe rechte Abbildung).

Echte Singularität im Zentrum

Ereignishorizont

Photonensphäre
Letzte stabile
kreisförmige
Bahnbewegung eines
masselosen Teilchens

Akkretionsscheibe
Letzte stabile kreisförmige Bahn-
bewegung eines massiven
Probekörpers
Last Stable Circular Orbit (ISCO)

Benutzen Sie hierfür das vorgestellte Maple worksheet und nehmen Sie an das schwarze Loch in M87 rotiere nicht und habe eine Masse von $6.5 \cdot 10^9$ Sonnenmassen. Berechnen Sie wo sich der Ereignishorizont und die letzte stabile kreisförmige Bahnbewegung eines massiven Körpers (ISCO) befindet (in Einheiten von km). Wie viel Zeit benötigt ein Körper auf der ISCO-Trajektorie um einmal um das schwarze Loch zu kreisen?