

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

*PC-POOL RAUM 01.120
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
15. MAI, 2020*

MATTHIAS HANAUSKE

*FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK
D-60438 FRANKFURT AM MAIN
GERMANY*

Aufgrund der Corona Krise findet die Vorlesung und die freiwilligen Übungstermine in diesem Semester nur Online statt.

3. Vorlesung

Allgemeines zur Vorlesung

- Ort und Zeit:
Nur Online/Virtuell
Live-Streaming (synchrone Lehrangebote, Zoom Meetings):
Freitags von 15.15-16.45 Uhr: Vorlesungstermine
Freitags von 14.15-15.15 Uhr :freiwillige Übungstermine
- Vorlesungs-Materialien (asynchronen Lehrangebote):
<http://th.physik.uni-frankfurt.de/~hанаuske/VARTC/> bzw.
<http://th.physik.uni-frankfurt.de/~hанаuske/VARTC/VARTCorona.html>
- Übungsaufgaben auf der Online-Lernplattform Lon Capa:
<http://lon-capa.server.uni-frankfurt.de/>
- Generelles zur Vorlesung:
Bei erfolgreicher Teilnahme 3 Creditpoints
Benoteter Schein mittels einer mündlichen Prüfung (30 Min.)
- Plan für die heutige Vorlesung:
ART mit Python: grundlegende Größen, Geodätengleichung, Lösen von Differentialgleichungen mit Python und Maple,

interaktiven Vorlesung liegt sowohl auf der Allgemeine Relativitätstheorie als auch auf der Vermittlung spezieller Programmierkenntnisse.

Grundlegende Größen der Allgemeinen Relativitätstheorie

Im folgenden werden die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie und im besonderen die Einsteingleichung

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi T_{\mu\nu}$$

und die Geodatengleichung

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0$$

als bekannt vorausgesetzt. Die griechischen, raumzeitlichen Indices μ, ν, ρ, \dots laufen von 0..3, wobei, falls nicht anders angegeben, diese den folgenden kartesischen Raumzeitkoordinaten entsprechen: $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$.

Im folgenden werden einige grundlegende Größen der allgemeinen Relativitätstheorie am Beispiel der allgemeinen statischen, isotropen Metrik erläutert und aufgezeigt, wie man diese in Maple berechnet. Zunächst wird das "tensor"-Paket eingebunden. Die mit roter Schrift gekennzeichneten Wörter stellen die vom User eingegebenen Befehle dar und die blauen Wörter sind die vom Maple-Program ausgegebenen Größen. Hier werden im speziellen die im "tensor"-Paket neu definierten Befehle ausgegeben. Möchte man die eingegebenen Befehle zwar ausführen, aber nicht ausgeben lassen, so hat man am Ende des Befehls einen Doppelpunkt und kein Semikolon zu schreiben.

```
> restart:
with( tensor );
```

Vorige Vorlesung:
Grundlagen von Berechnungen
der Allgemeinen Relativitätstheorie in Maple

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer (General Theory of Relativity on the Computer)

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt
am Main (Sommersemester 2020)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 15.05.2020

Erster Vorlesungsteil: Allgemeine Relativitätstheorie mit Python

Grundlegende Größen der Allgemeinen Relativitätstheorie

ART mit Python, V1.ipynb (Python Paket „GraviPy“)

In [1]:

```
from gravipy.tensorial import *
from sympy import init_printing
import inspect
init_printing()
```

Definition der Koordinaten und der kovarianten Raumzeit-Metrik einer allgemeinen statischen, isotropen
Metrik:

$$x^\mu = (t, r, \theta, \phi) \quad , \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

, bzw. auskommentiert, Schwarzschildmetrik:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

Frankfurt am Main 15.05.2020

Erster Vorlesungsteil: Allgemeine Relativitätstheorie mit Python

Grundlegende Größen der Allgemeinen Relativitätstheorie

Im folgenden werden einige grundlegende Größen der allgemeinen Relativitätstheorie am Beispiel der
allgemeinen statischen, isotropen Metrik erläutert. Zunächst wird das Python Packet "GraviPy" eingebunden,
welches auf dem Packet SymPy basiert und symbolische Berechnungen in der Allgemeinen
Relativitätstheorie relativ einfach möglich macht.

In [1]:

```
from gravipy.tensorial import *
from sympy import init_printing
import inspect
init_printing()
```

Definition der Koordinaten und der kovarianten Raumzeit-Metrik einer allgemeinen statischen, isotropen
Metrik:

$$x^\mu = (t, r, \theta, \phi) \quad , \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

, bzw. auskommentiert, Schwarzschildmetrik:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

In [2]:

```
# define some symbolic variables
t, r, theta, phi, M = symbols('t, r, \\theta, \\phi, M')
A = Function('A')(r)
B = Function('B')(r)
# create a coordinate four-vector object instantiating
# the Coordinates class
x = Coordinates('x', [t, r, theta, phi])
# define a matrix of a metric tensor components
#Metric = diag((1-2*M/r), -1/(1-2*M/r), -r**2, -r**2*sin(theta)**2)
Metric = diag(A, -B, -r**2, -r**2*sin(theta)**2)
# create a metric tensor object instantiating the MetricTensor class
g = MetricTensor('g', x, Metric)
```

In [3]:

g(All, All)

Out[3]:

$$\begin{bmatrix} A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

Kontravariante Form der Metrik:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{A(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{B(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \end{pmatrix}$$

In [4]:

g(-All, -All)

Out[4]:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{A(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{B(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \end{bmatrix}$$

```
Metric = diag(A, -B, -r**2, -r**2*sin(theta)**2)
# create a metric tensor object instantiating the MetricTensor class
g = MetricTensor('g', x, Metric)
```

In [3]:

g(All, All)

Out[3]:

$$\begin{bmatrix} A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

Kontravariante Form der Metrik:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{A(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{B(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \end{pmatrix}$$

In [4]:

g(-All, -All)

Out[4]:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{A(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{B(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \end{bmatrix}$$

Partielle Ableitung:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

Hier speziell $\partial_2 g_{11} = \partial_r g_{11}$, wobei

$$g_{\mu\nu|\alpha} := \partial_\alpha g_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} g_{\mu\nu}$$

In [5]:

```
g.partialD(1, 1, 2)
```

Out[5]:

$$\frac{d}{dr}A(r)$$

In [6]:

```
g(1,1).diff(x(-2))
```

Out[6]:

$$\frac{d}{dr}A(r)$$

Die Christoffel Symbole in (kontravarianter Form):

$$\Gamma_{\rho\mu\nu} = g_{\rho\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}(g_{\rho\mu|\nu} + g_{\rho\nu|\mu} - g_{\mu\nu|\rho})$$

Hier speziell

$$\Gamma_{222} = \Gamma_{rrr}$$

In [7]:

```
Ga = Christoffel('Ga', g)
Ga(2, 2, 2)
```

Out[7]:

$$-\frac{\frac{d}{dr}B(r)}{2}$$

Die kovariante Ableitung eines Tensors zweiter Stufe T^{μ}_{ν} ist wie folgt definiert:

$$\nabla_{\alpha}T^{\mu}_{\nu} = \partial_{\alpha}T^{\mu}_{\nu} + \Gamma_{\alpha\rho}^{\mu}T^{\rho}_{\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\rho}T^{\mu}_{\rho}$$

In [8]:

```
T = Tensor('T', 2, g)
T.covariantD(1,2,1)
# Beachten Sie, dass die ersten zwei Zahlen die Indices des Tensors
# und dritte Zahl die Koordinate angibt nach der differenziert wird
```

Out[8]:

$$\frac{2A(r)B(r)\frac{\partial}{\partial t}T(1,2)(t,r,\theta,\phi) - A(r)T(2,2)(t,r,\theta,\phi)\frac{d}{dr}A(r) - B(r)T(1,1)(t,r,\theta,\phi)}{2A(r)B(r)}$$

g(1,1).diff(x(-2))

Out[6]:

$$\frac{d}{dr}A(r)$$

Die Christoffel Symbole in (kontravarianter Form):

$$\Gamma_{\rho\mu\nu} = g_{\rho\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}(g_{\rho\mu|\nu} + g_{\rho\nu|\mu} - g_{\mu\nu|\rho})$$

Hier speziell

$$\Gamma_{222} = \Gamma_{rrr}$$

In [7]:

```
Ga = Christoffel('Ga', g)
Ga(2, 2, 2)
```

Out[7]:

$$-\frac{\frac{d}{dr}B(r)}{2}$$

Die kovariante Ableitung eines Tensors zweiter Stufe T^{μ}_{ν} ist wie folgt definiert:

$$\nabla_{\alpha}T^{\mu}_{\nu} = \partial_{\alpha}T^{\mu}_{\nu} + \Gamma_{\alpha\rho}^{\mu}T^{\rho}_{\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\rho}T^{\mu}_{\rho}$$

In [8]:

```
T = Tensor('T', 2, g)
T.covariantD(1,2,1)
# Beachten Sie, dass die ersten zwei Zahlen die Indices des Tensors
# und dritte Zahl die Koordinate angibt nach der differenziert wird
```

Out[8]:

$$\frac{2A(r)B(r)\frac{\partial}{\partial t}T(1,2)(t,r,\theta,\phi) - A(r)T(2,2)(t,r,\theta,\phi)\frac{d}{dr}A(r) - B(r)T(1,1)(t,r,\theta,\phi)}{2A(r)B(r)}$$

Die kovariante Ableitung der Metric $g_{\mu\nu}$ ist identisch 0.

In [9]:

g.covariantD(1,1,2)

Out[9]:

0

Der Riemann Tensor:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu\sigma}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu\rho}}{\partial x^\sigma} + \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha\Gamma_{\mu\rho\alpha} - \Gamma_{\nu\rho}^\alpha\Gamma_{\mu\sigma\alpha} - \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^\alpha + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\sigma}\Gamma_{\nu\rho}^\alpha$$

Hier speziell

$$R_{1313} = R_{t\theta t\theta}$$

In [10]:

Rm = Riemann('Rm', g)
Rm(1,3,1,3)

Out[10]:

$$-\frac{r\frac{d}{dr}A(r)}{2B(r)}$$

Oder in gemischt kontra- kovarianter Form

$$R^1{}_{313} = R^t{}_{\theta t\theta}$$

In [11]:

Rm(-1,3,1,3)

Out[11]:

$$-\frac{r\frac{d}{dr}A(r)}{2A(r)B(r)}$$

Der Ricci Tensor:

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^\sigma}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\sigma}^\nu}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma\Gamma_{\sigma\rho}^\rho - \Gamma_{\mu\sigma}^\rho\Gamma_{\nu\rho}^\sigma$$

In [12]:

Ri = Ricci('Ri', g)
Ri(All, All)

Out[12]:

$$\begin{bmatrix} \frac{\frac{d^2}{dr^2}A(r)}{2B(r)} - \frac{\frac{d}{dr}A(r)\frac{d}{dr}B(r)}{4B^2(r)} - \frac{\left(\frac{d}{dr}A(r)\right)^2}{4A(r)B(r)} + \frac{\frac{d}{dr}A(r)}{rB(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\frac{d^2}{dr^2}A(r)}{2A(r)} + \frac{\frac{d}{dr}A(r)\frac{d}{dr}B(r)}{4A(r)B(r)} + \frac{\left(\frac{d}{dr}A(r)\right)^2}{4A^2(r)} + \frac{\frac{d}{dr}A(r)}{rB} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Der Ricci Tensor lässt sich auch durch folgende Kontraktion aus dem Riemann Tensor berechnen:

$$R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu}$$

In [13]:

```
ricci = sum([Rm(i, All, k, All)*g(-i, -k)
            for i, k in list(versions(range(1, 5), 2, True))],
            zeros(4))
ricci.simplify()
ricci
```

Out[13]:

$$\begin{bmatrix} \frac{\frac{d^2}{dr^2}A(r)}{2B(r)} - \frac{\frac{d}{dr}A(r)\frac{d}{dr}B(r)}{4B^2(r)} - \frac{\left(\frac{d}{dr}A(r)\right)^2}{4A(r)B(r)} + \frac{\frac{d}{dr}A(r)}{rB(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\frac{d^2}{dr^2}A(r)}{2A(r)} + \frac{\frac{d}{dr}A(r)\frac{d}{dr}B(r)}{4A(r)B(r)} + \frac{\left(\frac{d}{dr}A(r)\right)^2}{4A^2(r)} + \frac{\frac{d}{dr}A(r)}{rB} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Der Ricci Skalar ergibt sich aus der Kontraktion des Ricci Tensors: $R = R_{\mu}^{\mu} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$

In [14]:

```
Ri.scalar()
```

Out[14]:

$$\frac{\frac{d^2}{dr^2}A(r)}{A(r)B(r)} - \frac{\frac{d}{dr}A(r)\frac{d}{dr}B(r)}{2A(r)B^2(r)} - \frac{\left(\frac{d}{dr}A(r)\right)^2}{2A^2(r)B(r)} - \frac{2\frac{d}{dr}B(r)}{rB^2(r)} + \frac{2\frac{d}{dr}A(r)}{rA(r)B(r)} - \frac{2}{r^2} + \frac{2}{r^2B(r)}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2B(r)}{4B^2(r)} - \frac{4A(r)B(r)}{rB(r)} + 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\frac{d^2}{dr^2}A(r)}{2A(r)} + \frac{\frac{d}{dr}A(r)\frac{d}{dr}B(r)}{4A(r)B(r)} + \frac{\left(\frac{d}{dr}A(r)\right)^2}{4A^2(r)} + \frac{\frac{d}{dr}A(r)}{rB} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Der Ricci Skalar ergibt sich aus der Kontraktion des Ricci Tensors: $R = R_{\mu}^{\mu} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$

In [14]:

```
Ri.scalar()
```

Out[14]:

$$\frac{\frac{d^2}{dr^2}A(r)}{A(r)B(r)} - \frac{\frac{d}{dr}A(r)\frac{d}{dr}B(r)}{2A(r)B^2(r)} - \frac{\left(\frac{d}{dr}A(r)\right)^2}{2A^2(r)B(r)} - \frac{2\frac{d}{dr}B(r)}{rB^2(r)} + \frac{2\frac{d}{dr}A(r)}{rA(r)B(r)} - \frac{2}{r^2} + \frac{2}{r^2B(r)}$$

Der Einstein Tensor:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

In [15]:

```
G = Einstein('G', Ri)
G(All, All)
```

Out[15]:

$$\begin{bmatrix} \frac{\left(r \frac{d}{dr} B(r) + B^2(r) - B(r)\right) A(r)}{r^2 B^2(r)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\frac{d}{dr} A(r)}{r A(r)} - \frac{B(r)}{r^2} + \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r \left(2r A(r) B(r) \frac{d^2}{dr^2} A(r) - r A(r) \frac{d}{dr} A(r) \frac{d}{dr} B(r) - r B(r) \left(\frac{d}{dr} \right) \right)}{4 A^2(r) B^2(r)} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

(General Theory of Relativity on the Computer)

Vorlesung gehalten an der

J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main

(Sommersemester 2020)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 15.05.2020

Erster Vorlesungsteil: Allgemeine Relativitätstheorie mit Python

Bewegung eines Probekörpers um ein schwarzes Loch in der Ebene

ART mit Python, V2.ipynb
(Python Paket „GraviPy“)

In [4]:

```
from gravipy.tensorial import *
import sympy as sym
from sympy import init_printing
import inspect
init_printing()
import numpy as np
import math
```

J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main

(Sommersemester 2020)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 15.05.2020

Erster Vorlesungsteil: Allgemeine Relativitätstheorie mit Python

Bewegung eines Probekörpers um ein schwarzes Loch in der Ebene

Im folgenden wird die Geodätengleichung in vorgegebener Schwarzschild Raumzeit betrachtet. Die Geodätengleichung beschreibt wie sich ein Probekörper (Masse = 0) im Raum bewegt und sagt voraus, dass diese Bewegung sich stets entlang der kürzesten Kurve, in der durch die Metrik beschriebenen gekrümmten Raumzeit, vollzieht. Zunächst wird das Python Paket "GraviPy" eingebunden, welches auf dem Paket SymPy basiert und symbolische Berechnungen in der Allgemeinen Relativitätstheorie relativ einfach möglich macht.

In [4]:

```
from gravipy.tensorial import *
import sympy as sym
from sympy import init_printing
import inspect
init_printing()
import numpy as np
import math
```

Definition der Koordinaten und der kovarianten Raumzeit-Metrik der Schwarzschildmetrik:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

In [5]:

```
# define some symbolic variables
t, r, theta, phi, M = symbols('t, r, \theta, \phi, M')
# create a coordinate four-vector object instantiating
# the Coordinates class
x = Coordinates('x', [t, r, theta, phi])
# define a matrix of a metric tensor components
Metric = diag((1-2*M/r), -1/(1-2*M/r), -r**2, -r**2*sin(theta)**2)
#Metric = diag(A, -B, -r**2, -r**2*sin(theta)**2)
# create a metric tensor object instantiating the MetricTensor class
g = MetricTensor('g', x, Metric)
```

In [6]:

g(All, All)

Out[6]:

$$\begin{bmatrix} -\frac{2M}{r} + 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{-\frac{2M}{r} + 1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

Kontravariante Form der Metrik ($g^{\mu\nu}$)

In [7]:

g(-All, -All)

Out[7]:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{-\frac{2M}{r} + 1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2M}{r} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \end{bmatrix}$$

Die Christoffel Symbole in (kontravarianter Form):

$$\Gamma_{\rho\mu\nu} = g_{\rho\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}(g_{\rho\mu|\nu} + g_{\rho\nu|\mu} - g_{\mu\nu|\rho})$$

Hier speziell

$$\Gamma_{222} = \Gamma_{rrr}$$

g = MetricTensor('g', x, Metric)

In [6]:

g(All, All)

Out[6]:

$$\begin{bmatrix} -\frac{2M}{r} + 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{-\frac{2M}{r} + 1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

Kontravariante Form der Metrik ($g^{\mu\nu}$)

In [7]:

g(-All, -All)

Out[7]:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{-\frac{2M}{r} + 1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2M}{r} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \end{bmatrix}$$

Die Christoffel Symbole in (kontravarianter Form):

$$\Gamma_{\rho\mu\nu} = g_{\rho\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}(g_{\rho\mu|\nu} + g_{\rho\nu|\mu} - g_{\mu\nu|\rho})$$

Hier speziell

$$\Gamma_{222} = \Gamma_{rrr}$$

In [8]:

```
Ga = Christoffel('Ga', g)
Ga(2, 2, 2)
```

Out[8]:

$$\frac{M}{(2M - r)^2}$$

Der Riemann Tensor:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu\sigma}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu\rho}}{\partial x^\sigma} + \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha\Gamma_{\mu\rho\alpha} - \Gamma_{\nu\rho}^\alpha\Gamma_{\mu\sigma\alpha} - \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^\alpha + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\sigma}\Gamma_{\nu\rho}^\alpha$$

Hier speziell

$$R_{1313} = R_{t\theta t\theta}$$

In [9]:

```
Rm = Riemann('Rm', g)
Rm(1,3,1,3)
```

Out[9]:

$$\frac{M(2M-r)}{r^2}$$

Oder in gemischt kontra- kovarianter Form

$$R^1{}_{313} = R^t{}_{\theta t\theta}$$

In [10]:

```
Rm(-1,3,1,3)
```

Out[10]:

$$\frac{M(2M-r)}{r(-2M+r)}$$

Der Ricci Tensor:

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^\sigma}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\sigma}^\nu}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma\Gamma_{\sigma\rho}^\rho - \Gamma_{\mu\sigma}^\rho\Gamma_{\nu\rho}^\sigma$$

In [11]:

```
Ri = Ricci('Ri', g)
Ri(All, All)
```

Out[11]:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Der Ricci Tensor lässt sich auch durch folgende Kontraktion aus dem Riemann Tensor berechnen:

```
Rm = Riemann('Rm', g)
Rm(1,3,1,3)
```

Out[9]:

$$\frac{M(2M-r)}{r^2}$$

Oder in gemischt kontra- kovarianter Form

$$R^1{}_{313} = R^t{}_{\theta t\theta}$$

In [10]:

```
Rm(-1,3,1,3)
```

Out[10]:

$$\frac{M(2M-r)}{r(-2M+r)}$$

Der Ricci Tensor:

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^\sigma}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\sigma}^\nu}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma\Gamma_{\sigma\rho}^\rho - \Gamma_{\mu\sigma}^\rho\Gamma_{\nu\rho}^\sigma$$

In [11]:

```
Ri = Ricci('Ri', g)
Ri(All, All)
```

Out[11]:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Der Ricci Tensor lässt sich auch durch folgende Kontraktion aus dem Riemann Tensor berechnen:

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu}$$

In [12]:

```
ricci = sum([Rm(i, All, k, All)*g(-i, -k)
            for i, k in list(versions(range(1, 5), 2, True))],
            zeros(4))
ricci.simplify()
ricci
```

Out[12]:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Der Ricci Skalar ergibt sich aus der Kontraktion des Ricci Tensors: $R = R_{\mu}^{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$

In [13]:

```
Ri.scalar()
```

Out[13]:

0

Der Einstein Tensor:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

In [14]:

```
G = Einstein('G', Ri)
G(All, All)
```

Out[14]:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Geodätische Bewegung eines Probekörpers

Die Geodätengleichung lässt sich durch folgendes Variationsprinzip herleiten:

$$\int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}} = \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda}} d\lambda \rightarrow \text{Extremal}$$

, wobei sich dann die Geodätengleichung mittels der Euler-Lagrange Gleichungen $L = \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda}}$, bzw.

alternativ $L = g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda}$ ergibt:

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \frac{dx^{\mu}}{d\lambda}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^{\mu}} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 x^{\mu}}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} \frac{dx^{\rho}}{d\lambda} = 0$$

$\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}$ sind die Christoffel Symbole zweiter Art und λ ein affiner Parameter (z.B. die Eigenzeit τ des Probekörpers). Die Geodätengleichung ist ein System gekoppelter Differentialgleichungen und sie lässt sich in Python mit der Funktion "Geodesic" berechnen (in vollständig kovarianter Form):

$$\frac{d^2 x_{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\sigma\mu} \frac{dx^{\rho}}{d\tau} \frac{dx^{\sigma}}{d\tau} = 0$$

In [163]:

```
tau = Symbol('\tau')
w = Geodesic('w', g, tau)
w(All).transpose()
```

Out[163]:

$$\left[\begin{aligned} & \frac{2M \frac{d}{d\tau} r(\tau) \frac{d}{d\tau} t(\tau)}{r^2(\tau)} + \left(-\frac{2M}{r(\tau)} + 1 \right) \frac{d^2}{d\tau^2} t(\tau) \\ & - \frac{M \left(\frac{d}{d\tau} t(\tau) \right)^2}{r^2(\tau)} + \frac{M \left(\frac{d}{d\tau} r(\tau) \right)^2}{\left(-\frac{2M}{r(\tau)} + 1 \right)^2 r^2(\tau)} + r(\tau) \sin^2(\theta(\tau)) \left(\frac{d}{d\tau} \phi(\tau) \right)^2 + r(\tau) \left(\frac{d}{d\tau} \theta(\tau) \right)^2 - \\ & r^2(\tau) \sin(\theta(\tau)) \cos(\theta(\tau)) \left(\frac{d}{d\tau} \phi(\tau) \right)^2 - r^2(\tau) \frac{d^2}{d\tau^2} \theta(\tau) - 2r(\tau) \frac{d}{d\tau} \theta(\tau) \frac{d}{d\tau} r(\tau) \end{aligned} \right]$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \frac{dx^\mu}{d\lambda}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0$$

$\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ sind die Christoffel Symbole zweiter Art und λ ein affiner Parameter (z.B. die Eigenzeit τ des Probekörpers). Die Geodätengleichung ist ein System gekoppelter Differentialgleichungen und sie lässt sich in Python mit der Funktion "Geodesic" berechnen (in vollständig kovarianter Form):

$$\frac{d^2 x_\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\sigma\mu} \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0$$

In [163]:

```
tau = Symbol('\tau')
w = Geodesic('w', g, tau)
w(All).transpose()
```

Out[163]:

$$\begin{bmatrix} \frac{2M \frac{d}{dt} r(\tau) \frac{d}{dt} t(\tau)}{r^2(\tau)} + \left(-\frac{2M}{r(\tau)} + 1\right) \frac{d^2}{dt^2} t(\tau) \\ -\frac{M \left(\frac{d}{dt} t(\tau)\right)^2}{r^2(\tau)} + \frac{M \left(\frac{d}{dt} r(\tau)\right)^2}{\left(-\frac{2M}{r(\tau)} + 1\right)^2 r^2(\tau)} + r(\tau) \sin^2(\theta(\tau)) \left(\frac{d}{dt} \phi(\tau)\right)^2 + r(\tau) \left(\frac{d}{dt} \theta(\tau)\right)^2 - \\ r^2(\tau) \sin(\theta(\tau)) \cos(\theta(\tau)) \left(\frac{d}{dt} \phi(\tau)\right)^2 - r^2(\tau) \frac{d^2}{dt^2} \theta(\tau) - 2r(\tau) \frac{d}{dt} \theta(\tau) \frac{d}{dt} r(\tau) \\ -r^2(\tau) \sin^2(\theta(\tau)) \frac{d^2}{dt^2} \phi(\tau) - 2r^2(\tau) \sin(\theta(\tau)) \cos(\theta(\tau)) \frac{d}{dt} \phi(\tau) \frac{d}{dt} \theta(\tau) - 2r(\tau) \sin^2(\theta(\tau)) \end{bmatrix}$$

Die definierte Python-Klasse 'Geodesic' setzt die Koordinaten automatisch in einen Parametrisierungsmodus (Parametrisierung der Koordinaten nach dem affinen Parameter τ).

In [164]:

```
Parametrization.info()
```

Out[164]:

```
[[x, \tau]]
```

In [165]:

```
x(-All)
```

Out[165]:

```
[t(\tau) r(\tau) \theta(\tau) \phi(\tau)]
```

Diese Parametrisierung kann man mit dem folgenden Befehl wieder abstellen:

In [166]:

```
#Parametrization.deactivate(x)
```

Wir lassen nur ebene Bewegungen zu ($\theta = \frac{\pi}{2}$, $\frac{d\theta}{d\tau} = 0$, $\frac{d^2\theta}{d\tau^2} = 0$).

In [167]:

```
DGL = w(All).subs([(x(-3).diff(tau,tau),0),(x(-3).diff(tau),0),(x(-3),math.pi/2)])).transpose()
DGL
```

Out[167]:

$$\begin{bmatrix} \frac{2M \frac{d}{dt} r(\tau) \frac{d}{dt} t(\tau)}{r^2(\tau)} + \left(-\frac{2M}{r(\tau)} + 1\right) \frac{d^2}{dt^2} t(\tau) \\ -\frac{M \left(\frac{d}{dt} t(\tau)\right)^2}{r^2(\tau)} + \frac{M \left(\frac{d}{dt} r(\tau)\right)^2}{\left(-\frac{2M}{r(\tau)} + 1\right)^2 r^2(\tau)} + 1.0r(\tau) \left(\frac{d}{dt} \phi(\tau)\right)^2 - \frac{\frac{d^2}{dt^2} r(\tau)}{-\frac{2M}{r(\tau)} + 1} \\ 6.12323399573677 \cdot 10^{-17} r^2(\tau) \left(\frac{d}{dt} \phi(\tau)\right)^2 \\ -1.0r^2(\tau) \frac{d^2}{dt^2} \phi(\tau) - 2.0r(\tau) \frac{d}{dt} \phi(\tau) \frac{d}{dt} r(\tau) \end{bmatrix}$$

Zusätzlich kann man sich auf den radial in das schwarze Loch einfallenden Probekörper beschränken ($\frac{d\phi}{d\tau} = 0$, $\frac{d^2\phi}{d\tau^2} = 0$).

In [20]:

```
DGL1 = DGL.subs([(x(-4).diff(tau,tau),0),(x(-4).diff(tau),0)])
DGL1
```

Out[20]:

$$\begin{bmatrix} \frac{2M \frac{d}{dt} r(\tau) \frac{d}{dt} t(\tau)}{r^2(\tau)} + \left(-\frac{2M}{r(\tau)} + 1\right) \frac{d^2}{dt^2} t(\tau) \\ -\frac{M \left(\frac{d}{dt} t(\tau)\right)^2}{r^2(\tau)} + \frac{M \left(\frac{d}{dt} r(\tau)\right)^2}{\left(-\frac{2M}{r(\tau)} + 1\right)^2 r^2(\tau)} - \frac{\frac{d^2}{dt^2} r(\tau)}{-\frac{2M}{r(\tau)} + 1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lösen von Differentialgleichungen in Python

In Python kann man Differentialgleichungen z.B. mit dem Befehl `dsolve` lösen (falls eine analytische Lösung existiert). Hier ein einfaches Beispiel:

localhost:8888/nbconvert/html/V2.ipynb?download=false

6/10

14.5.2020

V2

In [21]:

```
BeispielDGL1=sym.Eq(x(-1).diff(tau,tau), -3*x(-1))
BeispielDGL1
```

Out[21]:

$$\frac{d^2}{d\tau^2}t(\tau) = -3t(\tau)$$

Lösung ohne Anfangsbedingungen:

In [34]:

```
sym.dsolve(BeispielDGL1)
```

Out[34]:

$$t(\tau) = C_1 \sin(\sqrt{3}\tau) + C_2 \cos(\sqrt{3}\tau)$$

Lösung mit Anfangsbedingungen:

In [35]:

```
LoesAnalytic = sym.dsolve(BeispielDGL1,x(-1),ics={x(-1).subs(tau,0):3,x(-1).diff(tau).subs(tau, 0): 2})
LoesAnalytic
```

Out[35]:

$$t(\tau) = \frac{2\sqrt{3} \sin(\sqrt{3}\tau)}{3} + 3 \cos(\sqrt{3}\tau)$$

Diese Lösung kann man sich z.B. wie folgt darstellen:

14.5.2020

V2

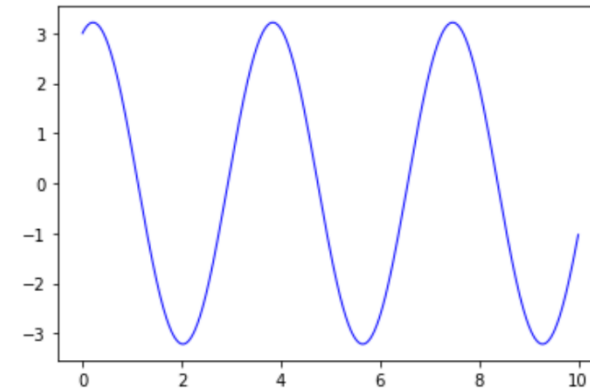
In [154]:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib

tauvals = np.linspace(0, 10, 1000)
func = sym.lambdify(tau, LoesAnalytic.rhs)
plt.plot(tauvals,func(tauvals),color='blue', linewidth=1, linestyle='-')
```

Out[154]:

[<matplotlib.lines.Line2D at 0x7f939b9dc1d0>]



Manchmal existiert keine analytische Lösung für die vorliegende Differentialgleichungen. In Python kann man Differentialgleichungen z.B. mit dem Befehl `solve_ivp` lösen. Wir demonstrieren die Vorgehensweise zunächst an dem folgenden Beispiel eines Systems von Differentialgleichungen, welches eine Kreisbahn beschreibt:

$$\frac{d}{dt} \vec{r} = \begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(y(t)) \\ \sin(x(t)) \end{pmatrix}$$

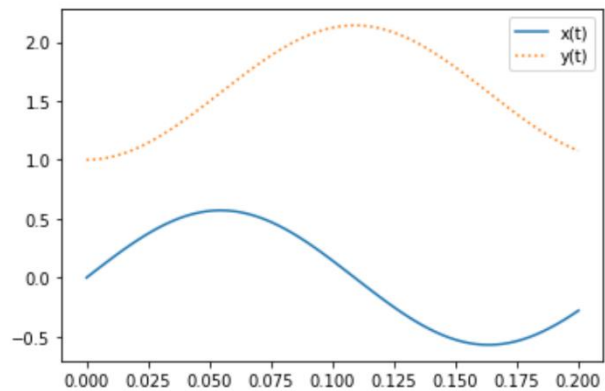
In [160]:

```
def f(t, r):
    x, y = r
    dxdt = np.cos(y)
    dydt = np.sin(x)
    return dxdt, dydt
sol = solve_ivp(f, (0,6), (0,1), t_eval=np.linspace(0,6,100))
```

Die Lösung können wir uns grafisch als zeitliche Funktionen von x und y darstellen

In [161]:

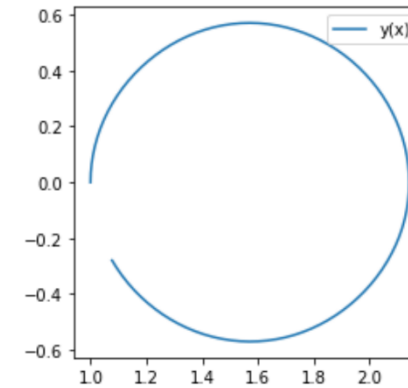
```
plt.clf()
fig, ax = plt.subplots(num=1)
ax.plot(tspan, sol.y[0], '-.', label='x(t)')
ax.plot(tspan, sol.y[1], ':', label='y(t)')
ax.legend(loc='best')
plt.show()
```



... oder als Raumkurve $\vec{r}(t)$ in einem x-y Diagram darstellen:

In [162]:

```
plt.clf()
fig, ax = plt.subplots(num=1)
ax.plot(sol.y[1], sol.y[0], '-.', label='y(x)')
ax.legend(loc='best')
plt.axis("scaled")
plt.show()
```



Lösen der Geodätengleichung in Python

Um das der Geodätengleichung zugrundeliegende System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung in Python zu lösen, muss man es zunächst in ein System erster Ordnung umschreiben und es dann dannach mit solve_ivp lösen -> Hausaufgabe!

Die Geodätengleichung mit Maple lösen

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0$$

Maple Ausgabe bei festgelegter Schwarzschild-Raumzeit

$$\begin{aligned} \text{eqns} := & \left\{ \frac{d^2}{d\lambda^2} \tau(\lambda) - \frac{2M \left(\frac{d}{d\lambda} \tau(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right)}{r(-r+2M)} = 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} \phi(\lambda) \right. \\ & + \frac{2 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)}{r} + \frac{2 \cos(\theta) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)}{\sin(\theta)} = 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} \theta(\lambda) \\ & + \frac{2 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right)}{r} - \sin(\theta) \cos(\theta) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)^2 = 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} r(\lambda) \\ & - \frac{(-r+2M)M \left(\frac{d}{d\lambda} \tau(\lambda) \right)^2}{r^3} + \frac{M \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right)^2}{r(-r+2M)} + (-r+2M) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right)^2 + (\\ & \left. -r+2M) \sin(\theta)^2 \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)^2 = 0 \right\} \end{aligned}$$

Berechnung der Geodätengleichung als Funktion des affinen Parameters λ : Die Geodätengleichung ist ein System gekoppelter Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d^2 t}{d\lambda^2} &= -\Gamma_{\nu\rho}^0 \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \\ \frac{d^2 r}{d\lambda^2} &= -\Gamma_{\nu\rho}^1 \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \\ \frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} &= -\Gamma_{\nu\rho}^2 \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \\ \frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} &= -\Gamma_{\nu\rho}^3 \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \end{aligned} ,$$

wobei λ ein affiner Parameter (z.B. die Eigenzeit), t, r, θ und ϕ die Schwarzschildkoordinaten und $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ die Christoffel Symbole zweiter Art darstellen.

```
> eqns:=geodesic_eqns( coord, lambda, Cf2 );
```

$$\begin{aligned} eqns := & \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2}{d\lambda^2} t(\lambda) - \frac{2M}{r(-r+2M)} \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) &= 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} \phi(\lambda) \\ + \frac{2 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)}{r} + \frac{2 \cos(\theta) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)}{\sin(\theta)} &= 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} \theta(\lambda) \\ + \frac{2 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right)}{r} - \sin(\theta) \cos(\theta) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)^2 &= 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} r(\lambda) \\ - \frac{(-r+2M)M \left(\frac{d}{d\lambda} t(\lambda) \right)^2}{r^3} + \frac{M \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right)^2}{r(-r+2M)} + (-r+2M) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right)^2 + & \\ -r+2M \sin(\theta)^2 \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)^2 &= 0 \end{aligned} \right. \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Wir lassen nur radiale Bewegung zu und setzen die Masse des schwarzen Lochs auf $M=1$:

```
> eq1:=subs({diff(phi(lambda), lambda)=0, diff(theta(lambda), lambda)=0, M=1}, eqns[1]):
eq2:=subs({diff(phi(lambda), lambda)=0, diff(theta(lambda), lambda)=0, M=1}, eqns[2]):
eq3:=subs({diff(phi(lambda), lambda)=0, diff(theta(lambda), lambda)=0, M=1}, eqns[3]):
eq4:=subs({diff(phi(lambda), lambda)=0, diff(theta(lambda), lambda)=0, M=1}, eqns[4]):
eq1:=simplify(subs({r=r(lambda)}, eq1)):
eq4:=simplify(subs({r=r(lambda)}, eq4)):
```

Anfangsbedingungen

Zum Lösen des Systems von Differentialgleichungen müssen die Anfangsbedingungen des Probekörpers festgelegt werden

z.B. wo befindet sich der Probekörper zur Eigenzeit $\lambda=0$: $r(0)=10$

Die Anfangsbedingung für $t'(0)$ erhält man z.B. mittels der folgenden Bedingungen aus dem infinitesimalen Weglängenelement ds :

$$\frac{ds^2}{d\lambda^2} = 1 \quad \xRightarrow{\substack{dr=d\theta=d\phi=0 \\ \text{bei } t=0}} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt^2}{d\lambda^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}}$$

Keine Anfangsgeschwindigkeit

Anfangsgeschwindigkeit in der äquatorialen Ebene:

$$\frac{ds^2}{d\lambda^2} = 1 \quad \xRightarrow{\substack{dr=d\theta=0, \\ \theta=\pi/2 \text{ bei } t=0}} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt^2}{d\lambda^2} - r^2 \frac{d\phi^2}{d\lambda^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{d\lambda} = \sqrt{\frac{1 + r^2 \frac{d\phi^2}{d\lambda^2}}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}}$$

Während der Bewegung erhaltene Größen

Zwei Gleichungen der Geodätengleichung lassen sich wie folgt umformulieren:

$$\begin{aligned} 1. \text{ Gleichung: } & \frac{d}{d\lambda} \left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\lambda} \right] = 0 \quad \rightarrow \quad \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\lambda} = E = \text{const} \\ 2. \text{ Gleichung: } & \frac{d}{d\lambda} \left(r^2 \sin^2(\theta) \frac{d\phi}{d\lambda} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad r^2 \sin^2(\theta) \frac{d\phi}{d\lambda} = l = \text{const} \quad , \end{aligned}$$

Die während der Bewegung erhaltenen Größen der Energie (E) und des Drehimpulses (l) lassen sich mittels des Viererimpulses definieren:

Viererimpulses $p_\mu = m u_\mu$ ergeben ($\lambda = \tau$):

$$\begin{aligned} p_0 &= m \frac{dx_0}{d\tau} = m g_{00} \frac{dx^0}{d\tau} = m g_{00} \frac{dt}{d\tau} = m \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\tau} = m E \\ p_3 &= m \frac{dx_3}{d\tau} = m g_{33} \frac{dx^3}{d\tau} = m g_{33} \frac{d\phi}{d\tau} = -m \left(r^2 \sin^2(\theta) \right) \frac{d\phi}{d\tau} = -m l \end{aligned}$$

Das effektive Potential

Mittels der radialen Gleichung läßt sich das effektive Potential definieren:

$$4. \text{ Gleichung: } \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V(r, M, l) = \frac{1}{2} (E^2 - 1)$$

$$\text{wobei: } V(r, M, l) = \frac{l^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) - \frac{M}{r} ,$$

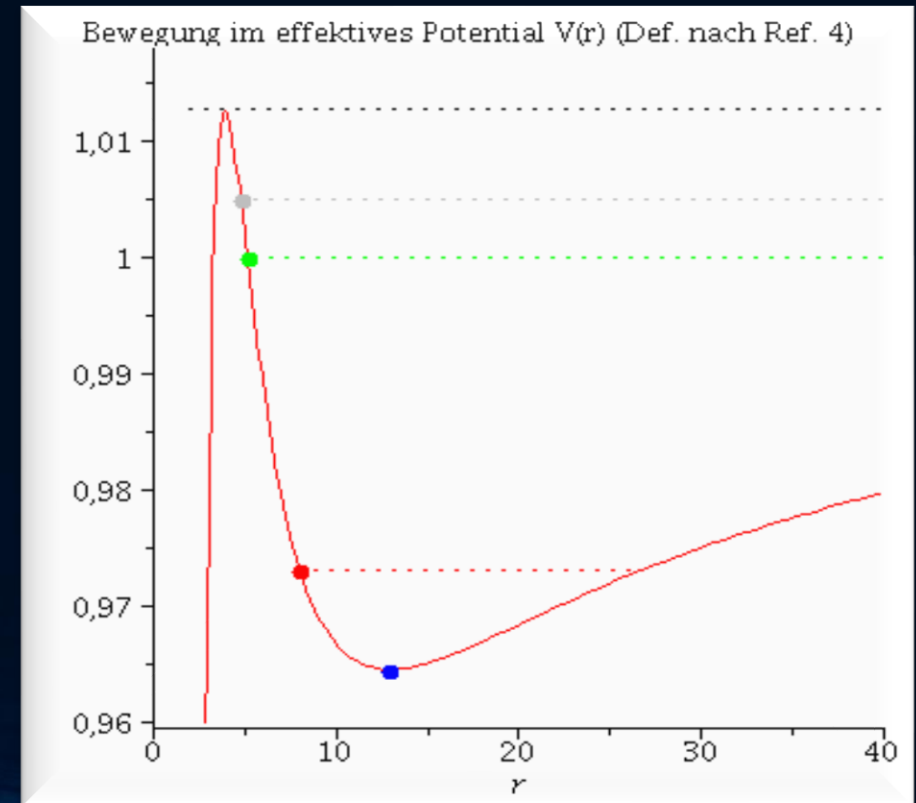
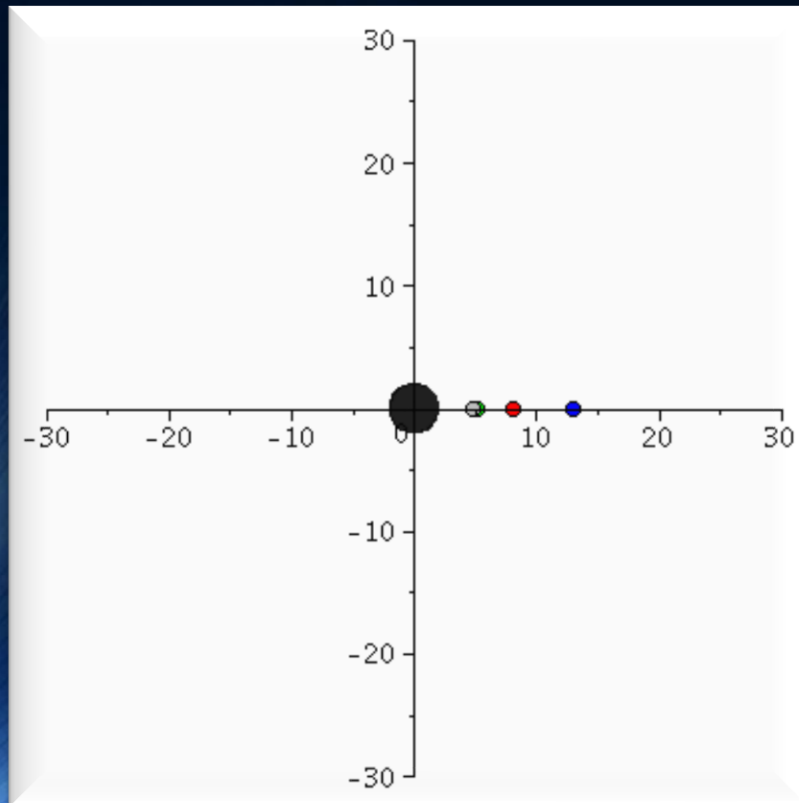
Alternative Definition (siehe Buch von Prof. Rezzolla):

$$4. \text{ Gleichung: } \rightarrow \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + (V(r, M, l))^2 = E^2$$

$$\text{wobei: } V(r, M, l) = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(1 + \frac{l^2}{r^2} \right)} ,$$

Klassifizierung der möglichen Bahnbewegungen eines Probekörpers um ein nichtrotierendes schwarzes Loch

Neben den gebundenen kreisförmigen (blau) und elliptischen (rot) Bahnen, den parabolischen (grün) und hyperbolischen (grau) Bahnverläufen ist auch eine durch das schwarze Loch eingefangene Bahn (schwarz: capture orbit) möglich



[Einführung](#)

[Teil I: Analytische Berechnungen und numerische Simulationen in Maple](#)

[Teil II: Paralleles Programmieren mit C++ und OpenMP/MPI](#)

[Teil III: Computersimulationen mit dem Einstein-Toolkit](#)

[Aufgaben](#)

Download Maple Worksheed

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer General Theory of Relativity on the Computer

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main (Sommersemester 2016)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 11.04.2016

Erster Vorlesungsteil: Allgemeine Relativitätstheorie mit Maple

3. Vorlesung

Einführung

Basierend auf den Ergebnissen der zweiten Vorlesung des ersten Teils wird im folgenden eine Klassifizierung der Umlaufbahnen eines Probekörpers um ein schwarzes Loch vorgestellt und mit den Newtonschen Umlaufbahnen verglichen.

Bewegung eines Probekörpers um ein schwarzes Loch in der Ebene

schwarzes Loch vorgestellt und mit den Newtonschen Umlaufbahnen verglichen.

Bewegung eines Probekörpers um ein schwarzes Loch in der Ebene

Im folgenden wird die Geodätengleichung in vorgegebener Schwarzschild Raumzeit betrachtet. Die Geodätengleichung beschreibt wie sich ein Probekörper (Masse = 0) im Raum bewegt und sagt voraus, dass diese Bewegung sich stets entlang der kürzesten Kurve, in der durch die Metrik beschriebenen gekrümmten Raumzeit, vollzieht.

Die Geodätengleichung und das effektive Potential $V(r)$

In der Version 1 des Maple-Worksheets des Teils I.2) der Vorlesung hatten wir erwähnt, dass sich die Geodätengleichung durch folgendes Variationsprinzip herleiten lässt,

$$\int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda \rightarrow \text{Extremal}$$

, wobei sich dann die Geodätengleichung mittels der Euler-Lagrange Gleichungen ($L = \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}$, bzw. alternativ $L = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}$) ergibt:

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \frac{dx^\mu}{d\lambda}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0 \quad ,$$

wobei die $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ die Christoffel Symbole zweiter Art und λ ein affiner Parameter (z.B. die Eigenzeit) darstellen.

```
> restart;  
with(tensor);  
with(plots);  
with(plottools);
```

Definition der kovarianten Raumzeit-Metrik eines schwarzen Lochs der Masse M in Schwarzschildkoordinaten:

Berechnung der Geodätengleichung als Funktion des affinen Parameters lambda. Die Geodätengleichung ist ein System gekoppelter Differentialgleichungen:

> eqns:=geodesic_eqns(coord, lambda, Cf2);

$$\begin{aligned}
 eqns := & \left\{ \begin{aligned}
 & \frac{d^2}{d\lambda^2} t(\lambda) - \frac{2M \left(\frac{d}{d\lambda} t(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right)}{r(-r+2M)} = 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} \phi(\lambda) \\
 & + \frac{2 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)}{r} + \frac{2 \cos(\theta) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)}{\sin(\theta)} = 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} \theta(\lambda) \\
 & + \frac{2 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right)}{r} - \sin(\theta) \cos(\theta) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)^2 = 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} r(\lambda) \\
 & - \frac{(-r+2M)M \left(\frac{d}{d\lambda} t(\lambda) \right)^2}{r^3} + \frac{M \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right)^2}{r(-r+2M)} + (-r+2M) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right)^2 + (\\
 & -r+2M) \sin(\theta)^2 \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)^2 = 0 \left. \right\}
 \end{aligned} \tag{2.1.2}
 \end{aligned}$$

Man kann zeigen (siehe z.B. Seite 206 in "General relativity : An introduction for physicists by M. P. Hobson, G. P. Efstathiou and A. N. Lasenby"), dass sich die erste und zweite Gleichung dieses Systems von Differentialgleichungen in die folgenden Gleichungen umschreiben lässt:

1. Gleichung: $\frac{d}{d\lambda} \left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\lambda} \right] = 0 \rightarrow \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\lambda} = E = \text{const}$
2. Gleichung: $\frac{d}{d\lambda} \left(r^2 \sin^2(\theta) \frac{d\phi}{d\lambda} \right) = 0 \rightarrow r^2 \sin^2(\theta) \frac{d\phi}{d\lambda} = l = \text{const} ,$

wobei die während der Bewegungen erhaltenen Größen E (Teilchenenergie pro Masse) und l (Drehimpuls pro Masse m) sich aus der Definition des Viererimpuls $p = mu$ ergeben (Beachte: Die im folgenden benutzten einzelnen Rechenschritte gelten speziell nur für die Schwarzschildmetrik

Man kann zeigen (siehe z.B. Seite 206 in "General relativity : An introduction for physicists by M. P. Hobson, G. P. Efstathiou and A. N. Lasenby"), dass sich die erste und zweite Gleichung dieses Systems von Differentialgleichungen in die folgenden Gleichungen umschreiben lässt:

$$1. \text{ Gleichung: } \frac{d}{d\lambda} \left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\lambda} \right] = 0 \quad \rightarrow \quad \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\lambda} = E = \text{const}$$

$$2. \text{ Gleichung: } \frac{d}{d\lambda} \left(r^2 \sin^2(\theta) \frac{d\phi}{d\lambda} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad r^2 \sin^2(\theta) \frac{d\phi}{d\lambda} = l = \text{const} \quad ,$$

wobei die während der Bewegungen erhaltenen Größen E (Teilchenenergie pro Masse) und l (Drehimpuls pro Masse m) sich aus der Definition des Viererimpulses $p_\mu = m u_\mu$ ergeben (Beachte: Die im folgenden benutzten einzelnen Rechenschritte gelten speziell nur für die Schwarzschildmetrik und desweiteren ist $\lambda = \tau$):

$$p_0 = m \frac{dx_0}{d\tau} = m g_{00} \frac{dx^0}{d\tau} = m g_{00} \frac{dt}{d\tau} = m \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\tau} = m E$$

$$p_3 = m \frac{dx_3}{d\tau} = m g_{33} \frac{dx^3}{d\tau} = m g_{33} \frac{d\phi}{d\tau} = -m \left(r^2 \sin^2(\theta) \right) \frac{d\phi}{d\tau} = -m l$$

Wir lassen nur ebene Bewegungen zu ($\theta = \pi/2$, $d\theta = 0$) und setzen $M=1$:

```
> setM:=1:
eq1:=subs({r=r(lambda), sin(theta)=1, cos(theta)=0, diff(theta(lambda), lambda)=0, theta=Pi/2, M=setM}, eqns[1]):
eq2:=subs({r=r(lambda), sin(theta)=1, cos(theta)=0, diff(theta(lambda), lambda)=0, theta=Pi/2, M=setM}, eqns[2]):
eq3:=subs({r=r(lambda), sin(theta)=1, cos(theta)=0, diff(theta(lambda), lambda)=0, theta=Pi/2, M=setM}, eqns[3]):
eq4:=subs({r=r(lambda), sin(theta)=1, cos(theta)=0, diff(theta(lambda), lambda)=0, theta=Pi/2, M=setM}, eqns[4]):
eq1:=subs({r(lambda)(lambda)=r(lambda)}, eq1);
eq2:=subs({r(lambda)(lambda)=r(lambda)}, eq2);
eq3:=subs({r(lambda)(lambda)=r(lambda)}, eq3);
eq4:=subs({r(lambda)(lambda)=r(lambda)}, eq4);
```

$$\begin{aligned}
 eq1 &:= \frac{d^2}{d\lambda^2} \tau(\lambda) - \frac{2 \left(\frac{d}{d\lambda} \tau(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right)}{r(\lambda) (-r(\lambda) + 2)} = 0 \\
 eq2 &:= \frac{d^2}{d\lambda^2} \phi(\lambda) + \frac{2 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)}{r(\lambda)} = 0 \\
 eq3 &:= 0 = 0 \\
 eq4 &:= \frac{d^2}{d\lambda^2} r(\lambda) - \frac{(-r(\lambda) + 2) \left(\frac{d}{d\lambda} \tau(\lambda) \right)^2}{r(\lambda)^3} + \frac{\left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right)^2}{r(\lambda) (-r(\lambda) + 2)} + (-r(\lambda) + 2) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)^2 = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.1.3}$$

In Abhängigkeit von den Anfangswerten können unterschiedliche Bahnen der Bewegung entstehen. Wir wählen zunächst als Beispiel die Anfangswerte einer geschlossenen Bahn:

Zur Zeit t=0 sei der fallende Körper bei einem Radius von r=10=5*(Schwarzschildradius), die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers sei in radialer Richtung dr=0 und in phi-Richtung dphi=0.036. Wir beschreiben die Bewegung aus der Sichtweise eines im Unendlichen ruhenden Beobachters.

```

>
r0:=10:
t0:=0:
phi0:=0:
theta0:=Pi/2:
dr0:=0:
dphi0:=0.041:
dt0:=evalf(1/sqrt(1-2/r0)*sqrt(1+r0^2*dphi0^2)):
dtheta0:=0:
    
```

In der Literatur wird die Bewegung eines Probekörpers um ein schwarzes Loch mittels eines definierten, effektiven Potentials illustriert:

1. General relativity : An introduction for physicists by M. P. Hobson, G. P. Efstathiou and A. N. Lasenby
2. Gravity : An introduction to Einstein's general relativity by James B. Hartle

In der Literatur wird die Bewegung eines Probekörpers um ein schwarzes Loch mittels eines definierten, effektiven Potentials illustriert:

1. General relativity : An introduction for physicists by M. P. Hobson, G. P. Efstathiou and A. N. Lasenby
2. Gravity : An introduction to Einstein's general relativity by James B. Hartle
3. Allgemeine Relativitätstheorie by Torsten Fließbach
4. Relativistic hydrodynamics by Luciano Rezzolla and Olindo Zanotti

Dieses Potential hängt von dem, bei der Bewegung erhaltenen Drehimpuls pro Masse m ab. Die im Zentralfeld möglichen Bewegungen werden mittels zweier erhaltener Größen (l : Drehimpuls pro Masse m und E : Energie pro Masse) charakterisiert. Die Definition des effektiven Potential erfolgt mittels der radialen, 4. Geodätengleichung. So definieren z.B. die Literaturangaben 1.-3. das effektive Potential wie folgt:

$$4. \text{ Gleichung: } \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V(r, M, l) = \frac{1}{2} (E^2 - 1)$$
$$\text{wobei: } V(r, M, l) = \frac{l^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) - \frac{M}{r} \quad ,$$

In der Literaturangabe 4 wird das Potential $V(r, M, l)$ hingegen wie folgt definiert:

$$4. \text{ Gleichung: } \rightarrow \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + (V(r, M, l))^2 = E^2$$
$$\text{wobei: } V(r, M, l) = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(1 + \frac{l^2}{r^2} \right)} \quad ,$$

Die folgende Abbildung zeigt (in der Nomenklatur des 4. Buches (Diagramm links) bzw. des 1. bis 3. Buches (Diagramm rechts)) das effektive Potential als Funktion des Radius bei den obigen gewählten Anfangswerten:

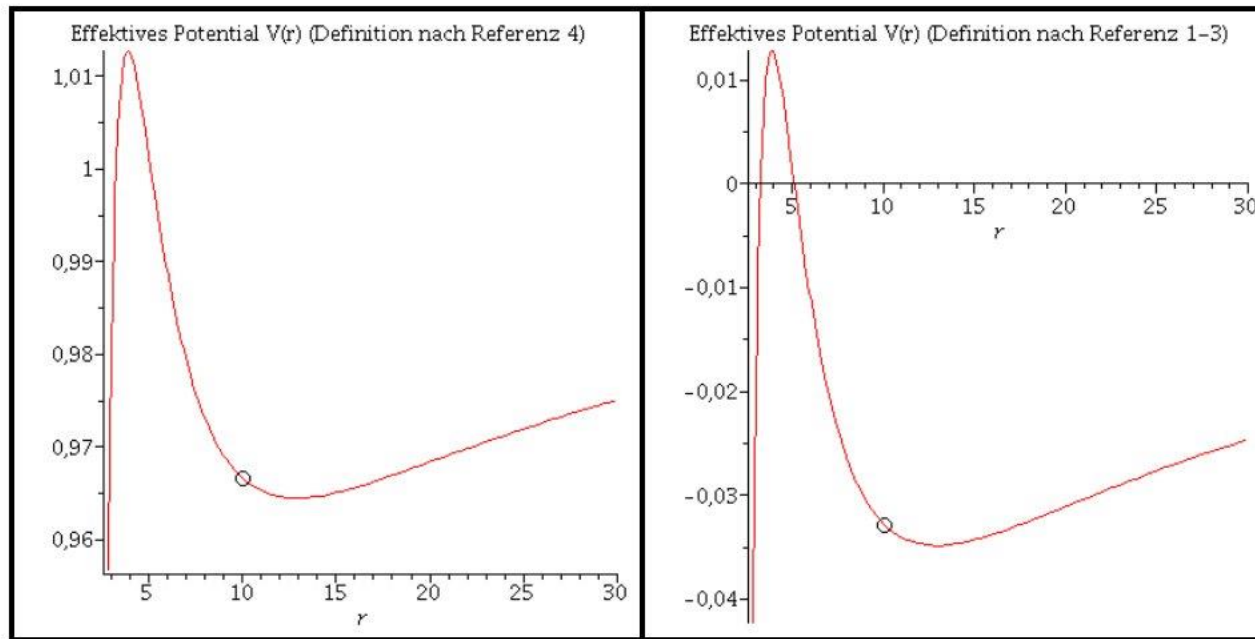
`setl:=r0^2*dphi0;`

$$setl := 4.100$$

$$setE := 0.9666850568$$

$$V_{effFb} := (r, M, l) \rightarrow -\frac{M}{r} + \frac{1}{2} \frac{l^2}{r^2} - \frac{M l^2}{r^3}$$

$$V_{effRez} := (r, M, l) \rightarrow \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} \sqrt{1 + \frac{l^2}{r^2}}$$



Numerisches Lösen der Geodätengleichung:

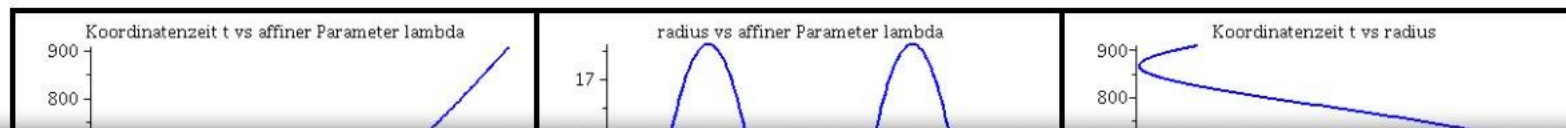
Numerisches Lösen der Geodätengleichung:

```
> Loes:=dsolve({eq1,eq2,eq4,t(0)=t0,r(0)=r0,D(r)(0)=dr0,D(t)(0)=dt0,phi(0)=phi0,D(phi)(0)=dphi0},  
              {r(lambda),t(lambda),phi(lambda)},type=numeric,output=listprocedure);
```

$$\begin{aligned} \text{Loes} := & \left[\lambda = \text{proc}(\text{lambda}) \dots \text{end proc}, \phi(\lambda) = \text{proc}(\text{lambda}) \dots \text{end proc}, \right. \\ & \frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) = \text{proc}(\text{lambda}) \dots \text{end proc}, r(\lambda) = \text{proc}(\text{lambda}) \dots \text{end proc}, \\ & \frac{d}{d\lambda} r(\lambda) = \text{proc}(\text{lambda}) \dots \text{end proc}, t(\lambda) = \text{proc}(\text{lambda}) \dots \text{end proc}, \\ & \left. \frac{d}{d\lambda} t(\lambda) = \text{proc}(\text{lambda}) \dots \text{end proc} \right] \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

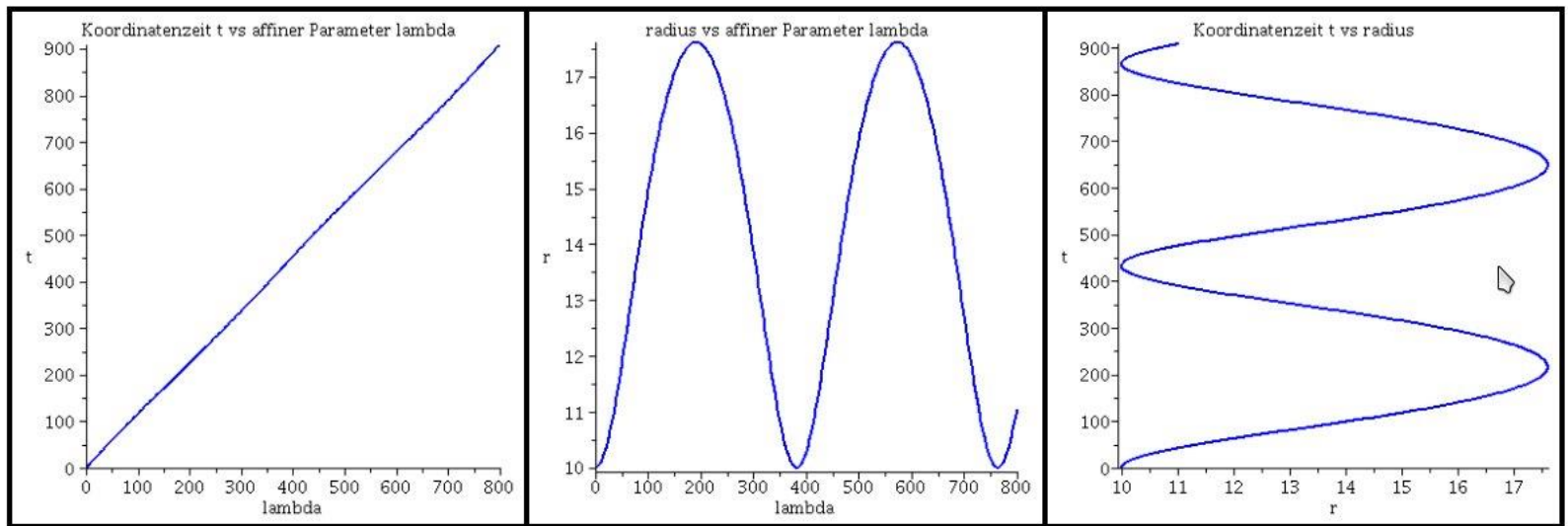
Grafische Veranschaulichung der Lösung:

```
> lend:=800:  
   lendn:=35.12:  
Plot1:=odeplot(Loes,[lambda,t(lambda)],0..lend,numpoints=200,color=blue,thickness=2,title="Koordinatenzeit t vs affiner Parameter  
           lambda");  
Plot2:=odeplot(Loes,[lambda,r(lambda)],0..lend,numpoints=200,color=blue,thickness=2,title="radius vs affiner Parameter lambda");  
Plot3:=odeplot(Loes,[r(lambda),t(lambda)],0..lend,numpoints=700,color=blue,thickness=2,title="Koordinatenzeit t vs radius");  
display(Matrix(1,3,[Plot1,Plot2,Plot3]));
```



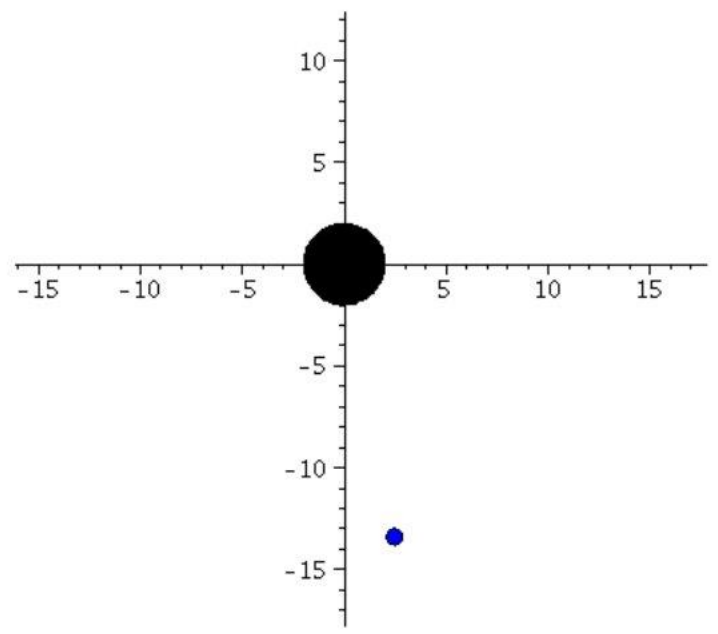
Grafische Veranschaulichung der Lösung:

```
>
lend:=800:
lendn:=35.12:
Plot1:=odeplot(Loes,[lambda,t(lambda)],0..lend,numpoints=200,color=blue,thickness=2,title="Koordinatenzeit t vs affiner Parameter lambda"):
Plot2:=odeplot(Loes,[lambda,r(lambda)],0..lend,numpoints=200,color=blue,thickness=2,title="radius vs affiner Parameter lambda"):
Plot3:=odeplot(Loes,[r(lambda),t(lambda)],0..lend,numpoints=700,color=blue,thickness=2,title="Koordinatenzeit t vs radius"):
display(Matrix(1,3,[Plot1,Plot2,Plot3]));
```



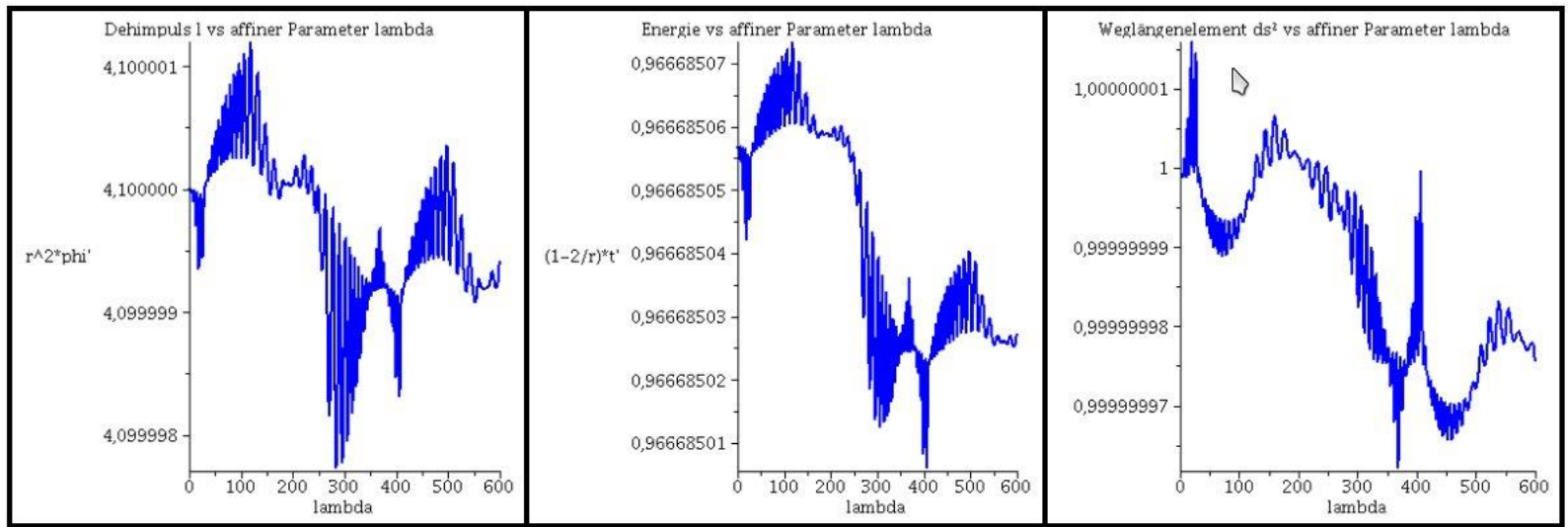
```
>
frames:=300:
lend:=600:
BH:=display(disk([0,0],2,color=black)):
for i from 0 by 1 to frames do
Koerper[i]:=display(disk([rhs(Loes(i*lend/frames)[4])*cos(rhs(Loes(i*lend/frames)[2])),rhs(Loes(i*lend/frames)[4])*sin(rhs(Loes(i*lend/frames)[2]))],0.4,color=blue)):
Ani[i]:=display({Koerper[i],BH});
od:

> display([seq(Ani[i],i=0..frames)],insequence=true,scaling=constrained);
```

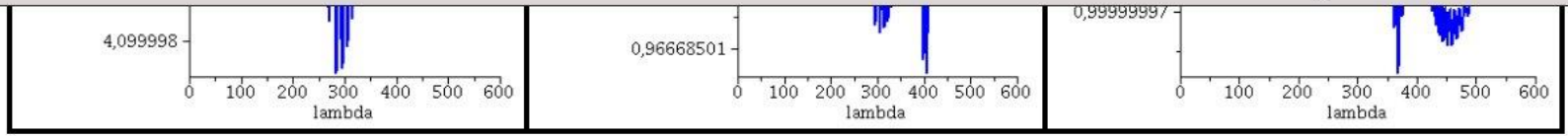


Während der Bewegung erhaltenen Größen (l: Drehimpuls pro Masse m, E: Energie pro Masse und Weglängenelement ds^2):

```
> Plot4:=odeplot(Loes,[lambda,r(lambda)^2*diff(phi(lambda), lambda)],0..lend,numpoints=700,color=blue,thickness=2,title="Dehimpuls l vs affiner Parameter lambda");  
Plot5:=odeplot(Loes,[lambda,(1-2/r(lambda))*diff(t(lambda), lambda)],0..lend,numpoints=700,color=blue,thickness=2,title="Energie vs affiner Parameter lambda");  
Plot6:=odeplot(Loes,[lambda,(1-2/r(lambda))*(diff(t(lambda), lambda))^2 - 1/(1-2/r(lambda))*(diff(r(lambda), lambda))^2 - r(lambda)^2*(diff(phi(lambda), lambda))^2],0..lend,numpoints=700,color=blue,thickness=2,title="Weglängenelement ds^2 vs affiner Parameter lambda");  
display(Matrix(1,3,[Plot4,Plot5,Plot6]));
```

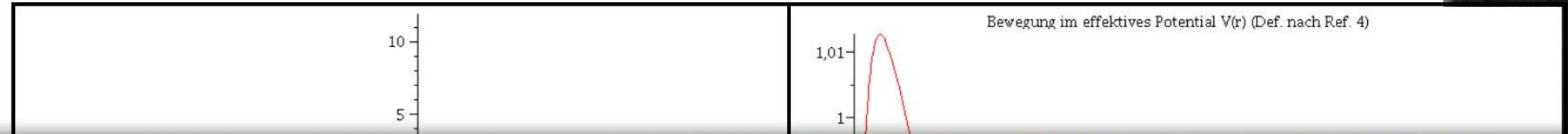


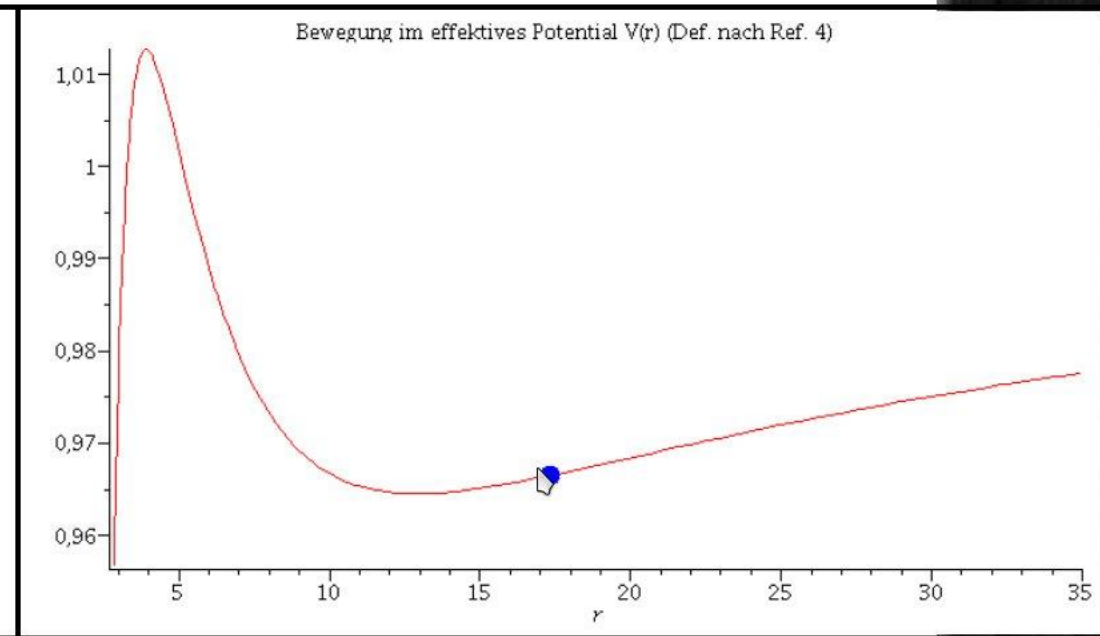
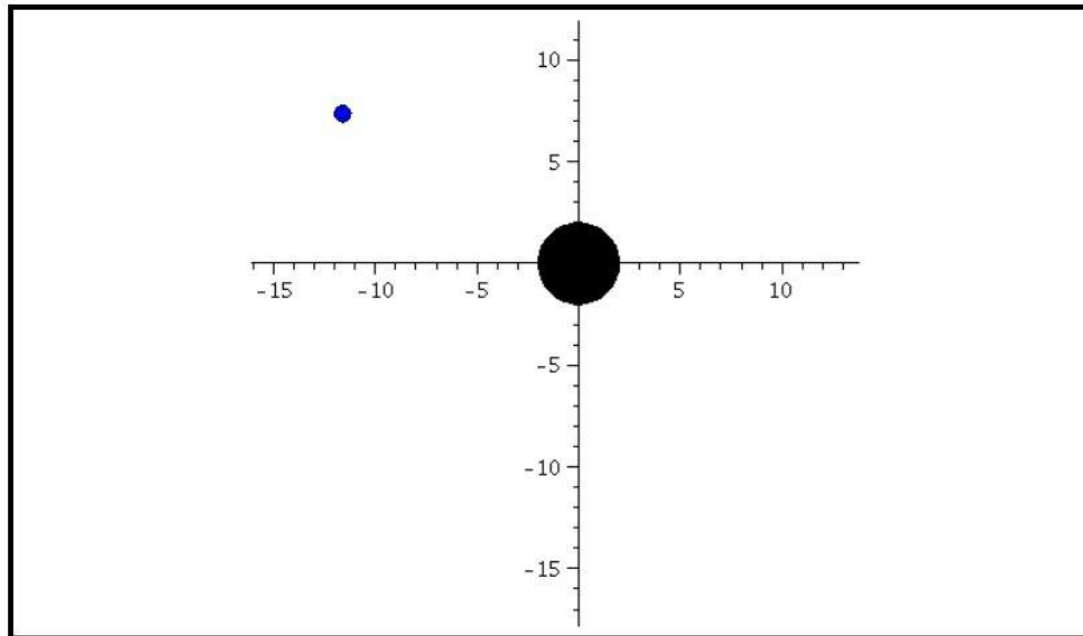
Animation der Bewegung im effektiven Potential:



Animation der Bewegung im effektiven Potential:

```
> frames:=300:  
  lend:=600:  
  Pot:=plot(VeffRez(r,1,setl),r=2.85..35):  
    for i from 0 by 1 to frames do  
  Koerper[i]:=pointplot({[rhs(Loes(i*lend/frames)[4]), setE]}, symbol=solidcircle,symbolsize=20,color=blue):  
  Ani1[i]:=display({Pot,Koerper[i]});  
    od:  
  
> display([seq(Ani1[i],i=0..frames)],insequence=true):  
  
> Animat1:=display([seq(Ani[i],i=0..frames)],insequence=true,scaling=constrained):  
  Animat2:=display([seq(Ani1[i],i=0..frames)],insequence=true,title="Bewegung im effektives Potential V(r) (Def. nach Ref. 4)":  
    display(Array([Animat1,Animat2])));
```





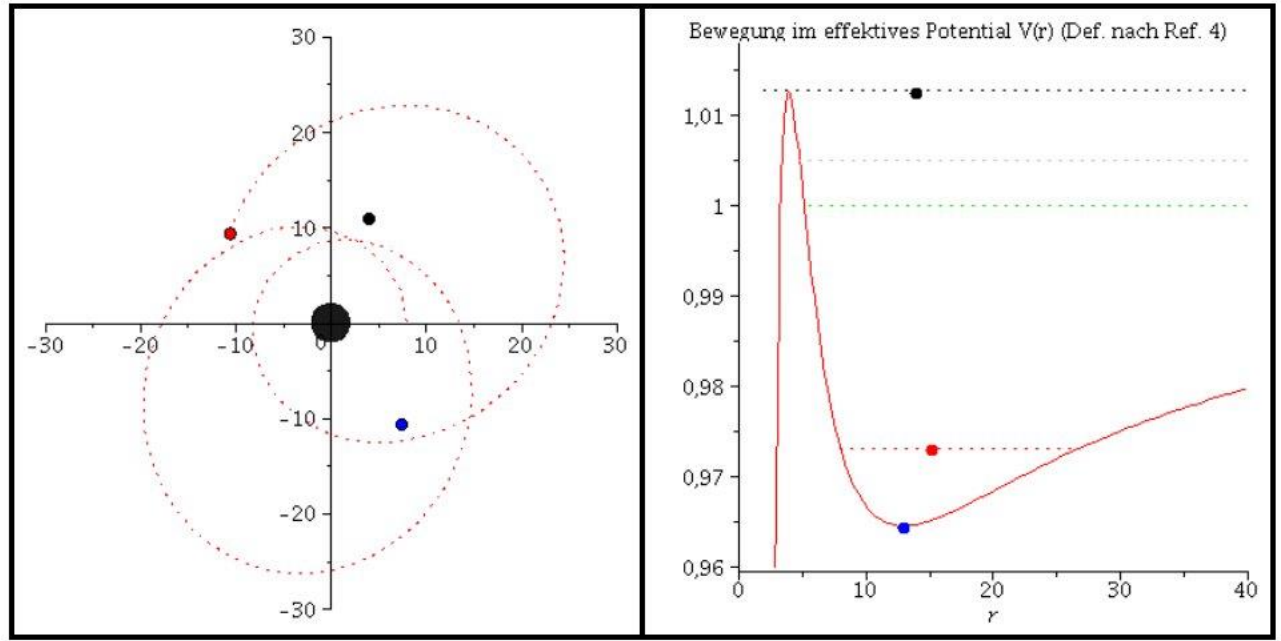
>

Klassifizierung unterschiedlicher Bahnbewegungen

Im folgenden werden die unterschiedlichen Bahnbewegungen um ein schwarzes Loch klassifiziert. Neben den gebundenen kreisförmigen (A: blau) und elliptischen (B: rot) Bahnen, den parabolischen (C: grün) und hyperbolischen (D: grau) Bahnverläufen ist auch eine durch das schwarze Loch eingefangene Bahn (E: capture orbit, schwarz) möglich. Wir setzen $M=1$ und $l=4.1$.

>

t0:=0:
phi0:=0:
theta0:=Pi/2:
dtheta0:=0:



>

Die unterschiedlichen Bahnbewegungen um ein schwarzes Loch (gebunden kreisförmige (A: blau) und elliptische (B: rot) Bahn, parabolische (C: grün) und hyperbolische (D: grau) Bahnverläufe bzw. eingefangene Bahn (E: capture orbit, schwarz)) sind in der ogigen Abbildung dargestellt. Bei der elliptische, roten Bahn erkennt man hierbei gut den allgemeinrelativistem Effekt der Periheldrehung, d.h. der nächste Punkt (der Perihel) und der am weitesten entfernte Punkt (der Aphel) vom Zentrum des schwarzen Lochs betrachtet, ändert seine Position und rotiert entgegen dem Uhrzeigersinn in ϕ -Richtung.

>

Die innerste stabile kreisförmige Bahnbewegung (Innermost Stable Circular Orbit (ISCO)) eines

das Bild des schwarzen Lochs

Ein wenig mehr als hundert Jahre nachdem Albert Einstein seine Feldgleichungen der *Allgemeine Relativitätstheorie* der Öffentlichkeit präsentierte, und er damit die Grundlage für Gravitationswellen und schwarzer Löcher formulierte, ist seit einigen Wochen ein Meilenstein in der Geschichte der Astronomie in aller Munde (erstes Bild eines schwarzen Lochs, siehe rechte Abbildung).

Echte Singularität im Zentrum

Ereignishorizont

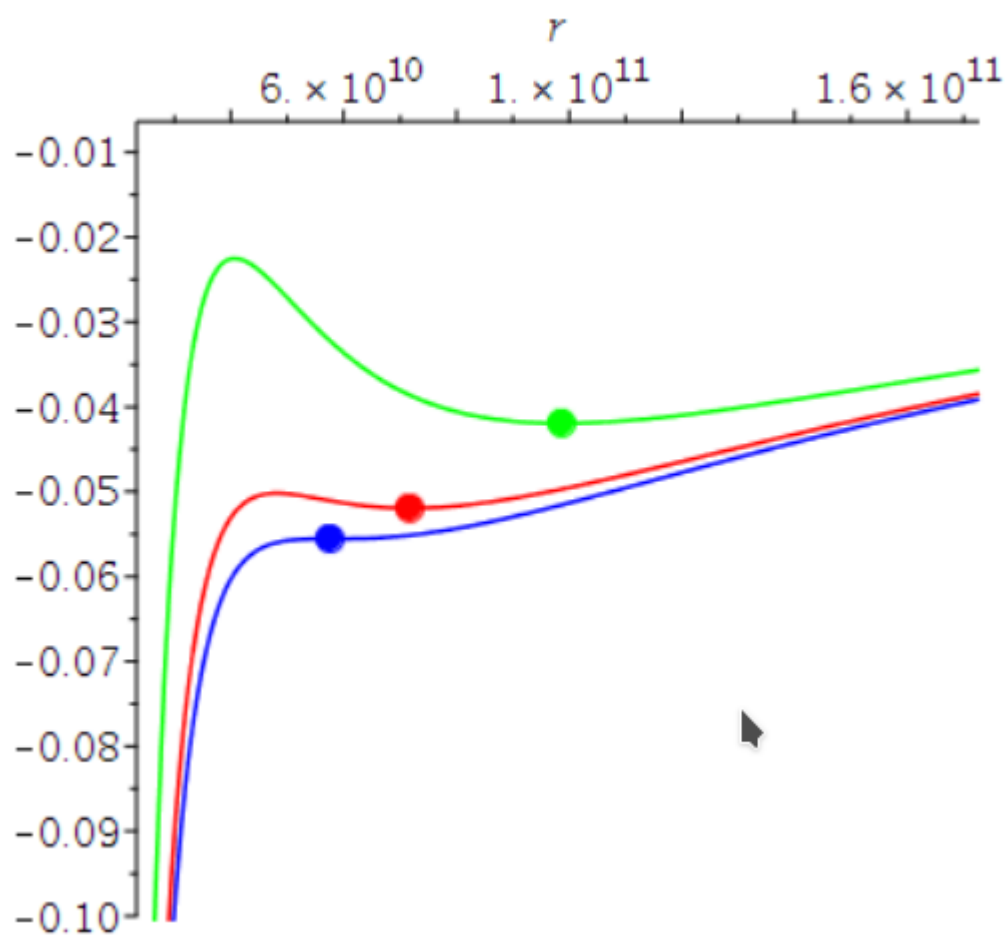
Photonensphäre
Letzte stabile
kreisförmige
Bahnbewegung eines
masselosen Teilchens

Akkretionsscheibe
Letzte stabile kreisförmige Bahn-
bewegung eines massiven
Probekörpers
Last Stable Circular Orbit (ISCO)

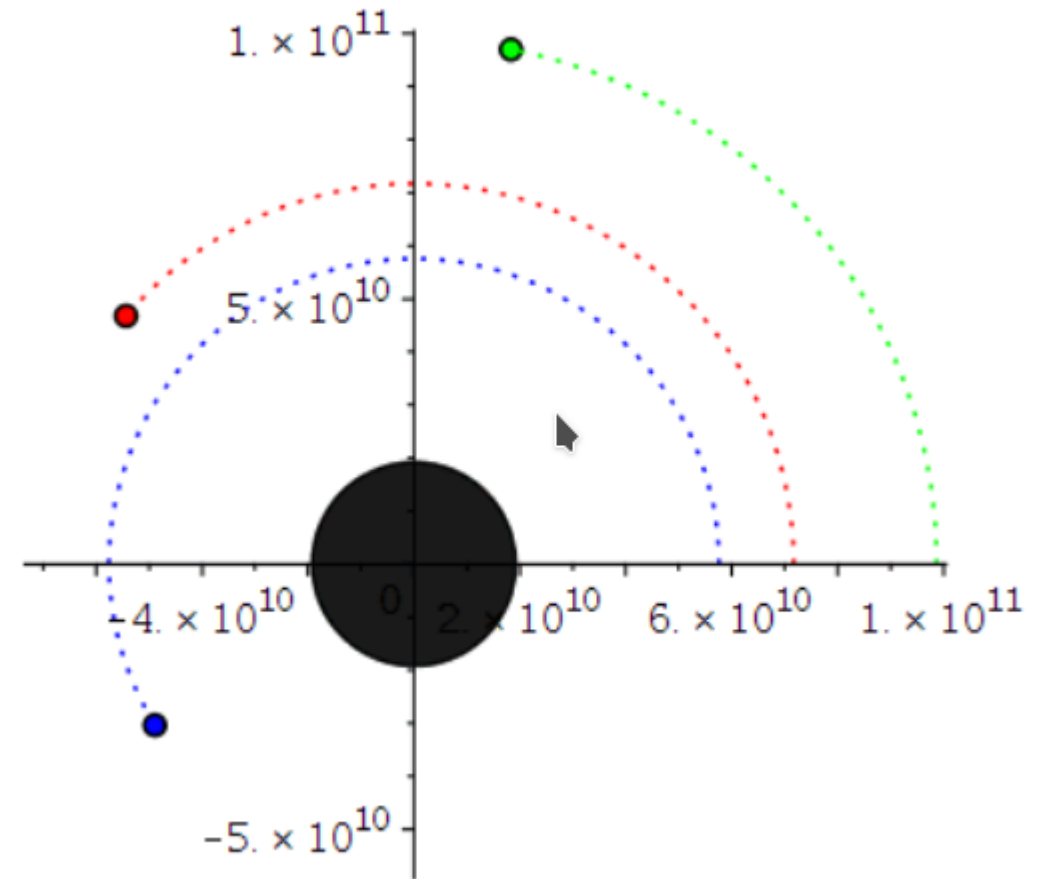
Benutzen Sie hierfür das vorgestellte Maple worksheet und nehmen Sie an das schwarze Loch in M87 rotiere nicht und habe eine Masse von $6.5 \cdot 10^9$ Sonnenmassen. Berechnen Sie wo sich der Ereignishorizont und die letzte stabile kreisförmige Bahnbewegung eines massiven Körpers (ISCO) befindet (in Einheiten von km). Wie viel Zeit benötigt ein Körper auf der ISCO-Trajektorie um einmal um das schwarze Loch zu kreisen?

Das effektive Potential eines Probekörpers am ISCO hat eine Sattelpunkteigenschaft

Effektives Potential $V(r)$ (Def. nach Ref. 1-3) für drei verschiedene Drehimpulse



Kreisförmige Bahnbewegungen und ISCO



Ein wenig mehr als hundert Jahre nachdem Albert Einstein seine Feldgleichungen der Allgemeine Relativitätstheorie der Öffentlichkeit präsentierte, und er damit die Grundlage für Gravitationswellen und schwarzer Löcher formulierte, ist seit einigen Wochen ein Meilenstein in der Geschichte der Astronomie in aller Munde:

Vergleich der Simulationsergebnisse mit dem Bild des schwarzen Lochs in M87

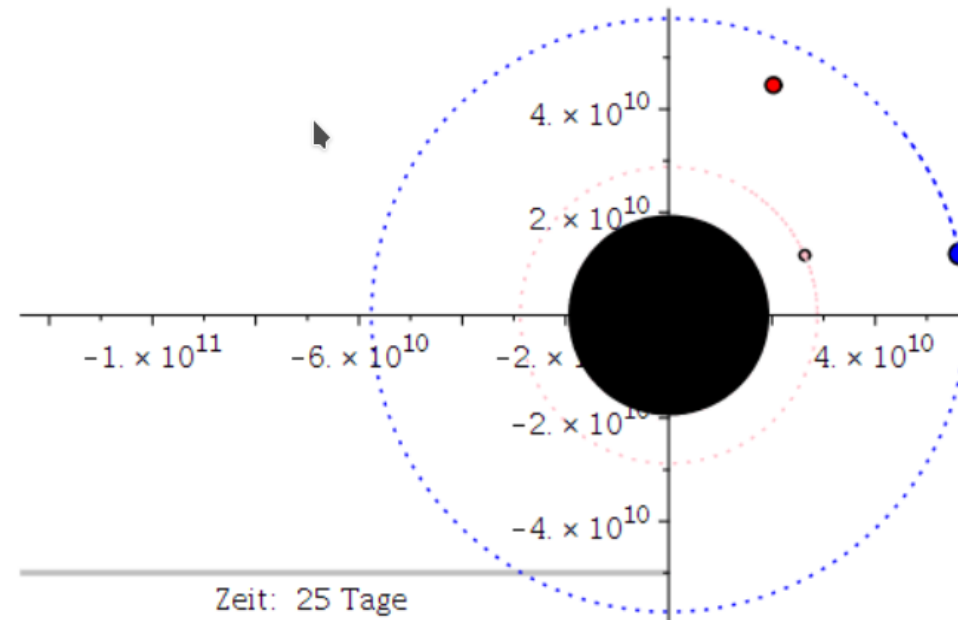
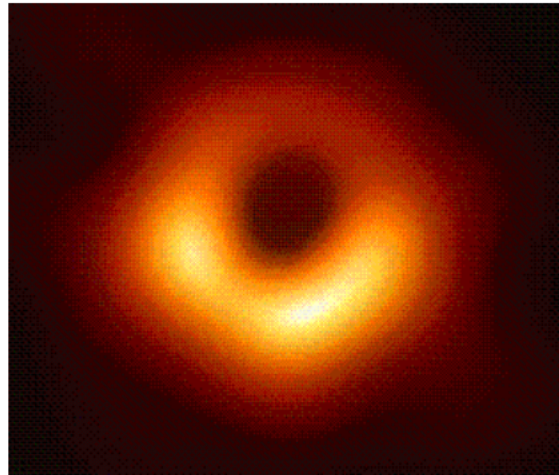


Abb. 1: Erstes Bild eines schwarzen Lochs im Vergleich mit den Simulationsergebnissen des Maple- Worksheets.

Das Bild zeigt das schwarze Loch im Zentrum unserer Nachbargalaxie M87; bzw. ein wenig genauer, die um ein schwarze Loch entstehende Radiostrahlung (das Bild wurde mittels eines weltweiten Verbunds von Radiowellenteleskopen (EHT: Event Horizon Teleskop) sichtbar gemacht). In Kürze (voraussichtlich im Sommer 2019) werden die aufgenommenen

Die Bewegung eines Probekörpers um ein nichtrotierendes schwarzes Loch wird mittels der Geodätengleichung beschrieben:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0 \Rightarrow$$

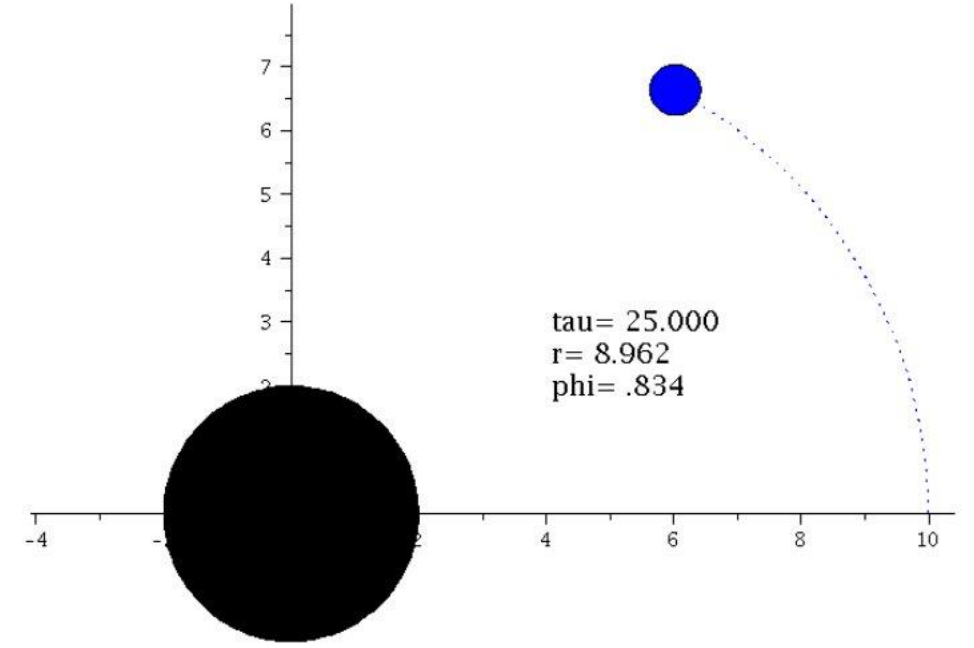
$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^0 \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}$$

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^1 \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}$$

$$\frac{d^2 \theta}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^2 \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}$$

$$\frac{d^2 \phi}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^3 \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} ,$$

wobei τ ein affiner Parameter (z.B. die Eigenzeit), t , r , θ und ϕ die Schwarzschildkoordinaten und $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ die Christoffel Symbole zweiter Art darstellen. Lösen Sie, unter Verwendung des Computeralgebra-Systems Maple, die Geodätengleichung numerisch und wählen Sie dabei die folgenden Anfangsbedingungen. Zur Eigenzeit $\tau=0$ sei der Probekörper bei $r=15.4$, $\theta=0$ und $\phi=0$; die Anfangsgeschwindigkeiten seien: $\frac{dr}{d\tau}=0$, $\frac{d\theta}{d\tau}=0$, $\frac{d\phi}{d\tau}=0.031$ und die Masse des schwarzen Lochs betrage $M=1$. Berechnen Sie wo sich der Probekörper bei $\tau=50$ befindet und geben Sie den Radius r und die polare Koordinate ϕ an.



$r =$, $\phi =$

Submit Answer Tries 0/20

Die Bewegung eines Probekörpers um ein nichtrotierendes schwarzes Loch wird mittels der Geodätengleichung beschrieben. Die Art und Weise wie sich der Probekörper um das schwarze Loch bewegen wird mithilfe der radialen Komponente der Geodätengleichung und der Definition eines effektiven Potentials charakterisiert werden:

Maximum des Potentials bei r =

Minimum des Potentials bei r =

Submit Answer Tries 0/20

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V(r, M, l) = \frac{1}{2} (E^2 - 1)$$

wobei:
$$V(r, M, l) = \frac{l^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) - \frac{M}{r}$$

Die im Zentralfeld möglichen Bewegungen werden mittels zweier erhaltener Größen (l: Drehimpuls pro Masse m und E: Energie pro Masse) charakterisiert. Die Masse des schwarzen Loches sei M=1 und der Drehimpuls des Probekörper sei l=4.72. Geben Sie an bei welchem Abstand r sich das Maximum und das Minimum des Potentials befindet. Was bedeutet das Minimum des Potentials?

Die Bewegung eines Probekörpers um ein nichtrotierendes schwarzes Loch wird mittels der Geodätengleichung beschrieben:

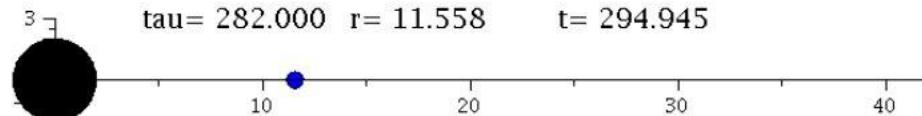
$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^0 \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}$$

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^1 \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}$$

$$\frac{d^2 \theta}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^2 \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}$$

$$\frac{d^2 \phi}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^3 \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}$$



wobei τ ein affiner Parameter (z.B. die Eigenzeit), t , r , θ und ϕ die Schwarzschildkoordinaten und $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ die Christoffel Symbole zweiter Art darstellen. Lösen Sie, unter Verwendung des Computeralgebra-Systems Maple, die Geodätengleichung eines radial in ein schwarzes Loch einfallenden Probekörpers. Verwenden Sie die folgenden Anfangsbedingungen: Zur Eigenzeit $\tau=0$ sei der Probekörper bei $r=50.5$, $\theta=0$ und $\phi=0$; die Anfangsgeschwindigkeiten seien: $\frac{dr}{d\tau}=0$, $\frac{d\theta}{d\tau}=0$, $\frac{d\phi}{d\tau}=0$ und die Masse des schwarzen Lochs betrage $M=1$. Berechnen Sie wo sich der Probekörper bei $\tau = 300 \approx 1$ [ms] befindet und geben Sie den Radius $r(300)$ in [km] an.

Die folgende Metrik beschreibt die homogene, isotrope zeitliche Entwicklung des Universums (Robertson-Walker Metrik):

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a(t)^2}{1 - k r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

Die Funktion $a(t)$ bezeichnet den Skalenfaktor des Universums zur Zeit t und der Parameter k kennzeichnet den Krümmungsparameter des Universums. Die griechischen, raumzeitlichen Indices μ, ν laufen von 0..3 und entsprechen den folgenden sphärischen Koordinaten: $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \phi)$. Berechnen Sie das Christoffelsymbols Γ_{11}^0 und geben Sie an welcher der unten stehende Ausdrücke richtig ist:

- $\Gamma_{11}^0 = \frac{k r}{1 - k r^2}$
- $\Gamma_{11}^0 = \frac{\frac{da(t)}{dt}}{1 - k r^2}$
- $\Gamma_{11}^0 = -\frac{a(t)}{1 - k r^2}$
- $\Gamma_{11}^0 = \frac{2 a(t) \frac{da(t)}{dt}}{1 - k r^2}$
- $\Gamma_{11}^0 = \frac{a(t) \frac{da(t)}{dt}}{1 - k r^2}$

Antwort einreichen | Versuche 0/2

Die folgende Metrik beschreibt die homogene, isotrope zeitliche Entwicklung des Universums (Robertson-Walker Metrik):

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a(t)^2}{1 - k r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

Die Funktion $a(t)$ bezeichnet den Skalenfaktor des Universums zur Zeit t und der Parameter k kennzeichnet den Krümmungsparameter des Universums. Die griechischen, raumzeitlichen Indices μ, ν laufen von 0..3 und entsprechen den folgenden sphärischen Koordinaten: $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \phi)$. Berechnen Sie die (1, 1)-Komponente des Einsteintensors $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$ und geben Sie an welcher der unten stehende Ausdrücke richtig ist:

- $G_{11} = G_{rr} = -\frac{3 \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 + k}{(a(t))^2}$
- $G_{11} = G_{rr} = -\frac{4 a(t) \frac{d^2 a(t)}{dt^2} + \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 + k}{1 - k r^2}$
- $G_{11} = G_{rr} = -\frac{2 a(t) \frac{d^2 a(t)}{dt^2} + 2 \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 + k}{1 - k r^2}$
- $G_{11} = G_{rr} = \frac{2 a(t) \frac{d^2 a(t)}{dt^2} + \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 + k}{1 - k r^2}$
- $G_{11} = G_{rr} = \frac{2 a(t) \frac{d^2 a(t)}{dt^2} + \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 + k}{1 - k r^4}$

Die folgende Metrik beschreibt die homogene, isotrope zeitliche Entwicklung des Universums (Robertson-Walker Metrik):

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a(t)^2}{1 - k r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

Die Funktion $a(t)$ bezeichnet den Skalenfaktor des Universums zur Zeit t und der Parameter k kennzeichnet den Krümmungsparameter des Universums. Die griechischen, raumzeitlichen Indices μ, ν laufen von 0..3 und entsprechen den folgenden sphärischen Koordinaten: $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \phi)$. Berechnen Sie die $(0, 0)$ -Komponente des folgenden zusammengesetzten Tensors $Q^\mu{}_\nu = R^{\alpha\beta\gamma\mu} R_{\alpha\beta\gamma\nu} - \frac{1}{4} R^{\alpha\beta\gamma\lambda} R_{\alpha\beta\gamma\lambda} g^\mu{}_\nu$ und geben Sie an welcher der unten stehende Ausdrücke richtig ist:

- $Q^0{}_0 = Q^t{}_t = \frac{3 \left((a(t))^4 \left(\frac{d^2 a(t)}{dt^2} \right)^2 - \left(\frac{da(t)}{dt} \right)^2 - 2 k \left(\frac{da(t)}{dt} \right)^2 - k^2 \right)}{(a(t))^4}$
- $Q^0{}_0 = Q^t{}_t = \frac{3 \left((a(t))^2 \left(\frac{d^2 a(t)}{dt^2} \right)^2 - \left(\frac{da(t)}{dt} \right)^4 - 2 k \left(\frac{da(t)}{dt} \right)^2 - k^2 \right)}{(a(t))^4}$
- $Q^0{}_0 = Q^t{}_t = \frac{2 \left((a(t))^2 \left(\frac{d^2 a(t)}{dt^2} \right)^2 - \left(\frac{da(t)}{dt} \right)^4 - 4 k \left(\frac{da(t)}{dt} \right)^2 - k^2 \right)}{(a(t))^4}$
- $Q^0{}_0 = Q^t{}_t = \frac{3 \left((a(t))^2 \left(\frac{d^2 a(t)}{dt^2} \right)^2 - \left(\frac{da(t)}{dt} \right)^4 - 2 k \left(\frac{da(t)}{dt} \right)^2 - k^2 \right)}{1 - k r^2}$